FORTSCHRITTLICHE UNSICHERHEITSMODELLIERUNG UND ROBUSTHEITSANALYSE FÜR DEN BASISREGLER EINES MODERNEN TRAINERS

M. Herrnberger
Lehrstuhl für Regelungstechnik, TU München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching

M. Heller
Flugdynamik, Military Air Systems, EADS Deutschland GmbH
81663 München

R. Leitner und G. Sachs
Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, TU München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching

ÜBERSICHT

Bei der Nachweisführung und Zulassung von Flugzeugen kommt der Robustheit von Regelungssystemen gegenüber Modellunsicherheiten infolge zunehmender Anforderungen an den Entwurf (instabile Konfigurationen) eine immer größere Bedeutung zu. Mit klassischen Ansätzen (z.B. „Stabilitätsradius“ im Nicholsdiagramm) lassen sich oft nur unzureichende Aussagen über Qualität und Quantität der Robustheit treffen. Deshalb wird hier eine aussagekräftigere Methode für die Robustheitsanalyse des Basisreglers eines modernen Jet-Trainingsflugzeugs aufgezeigt, die den strukturierten Singulärwert μ und ein physikalisch motiviertes, parametrisches Unsicherheitsmodell verwendet. Insbesondere die Einführung einer Trimmpunkt-Unsicherheit, welche die Abhängigkeit der Regelkreisparameter vom Trimmpunkt ins Unsicherheitsmodell einbindet, ist ein fortschrittlicher Ansatz, da dadurch eine Analyse des Reglers über einen ganzen Envelopenbereich hinweg durchgeführt werden kann. Mit dem vorgestellten Verfahren wird prinzipiell eine Möglichkeit aufgezeigt, die konventionelle Reglerrobustheits-Nachweisführung durch ein effektiveres Verfahren zu substituieren.

1. EINLEITUNG

Durch die fortgeschrittene Entwicklung im Bereich der Hochleistungsflugzeuge haben sich auch die Anforderungen an die für die Ausbildung notwendigen Trainings-Jets stark erhöht. Während früher das Schub-Gewichts-Verhältnis für solche Trainer relativ klein war, werden heutzutage eine weitaus höhere Agilität und damit auch ein wesentlich größeres Schub-Gewichts-Verhältnis gefordert. Gleichzeitig kann ein Trend beobachtet werden, dass solche Ausbildungsflugzeuge als "Advanced Trainer" zunehmend auch als leichte Hochleistungsflugzeuge Verwendung finden. Allgemein lässt sich sagen, dass die unter dem Stichwort "Multirole Capability" bekannte Vielseitigkeit von solchen Flugzeugen eine immer größere Rolle spielt.

Deshalb ist auch bei der Firma EADS Military Air Systems mit der Entwicklung eines modernen Jet-Trainers begonnen worden, bei dem der Fokus neben besagter Multirole Capability, welche den vielseitigen Einsatz als Ausbildungs- und als vollwertiges leichtes Hochleistungsflugzeug ermöglichen soll, auf Leistungsoptimierung und Kostenminimierung liegt. Neben Überschallfähigkeit und geringer Flächenbelastung steht hier vor allem ein hohes Schub-Gewichts-Verhältnis im Vordergrund. Dies kann unter anderem durch ein leistungsstarkes Triebwerk mit Nachbrenner und eine neutral stabile (bis partiell instabile) Auslegung umgesetzt werden.

Durch die erhöhten flugdynamischen Ansprüche und die neutral bis instabile Grundkonfiguration steigen auch die Anforderungen an das Flugregelungssystem, wenn ohne Leistungsverlust gleichzeitig Sicherheit garantiert werden soll. Für den Advanced Trainer der EADS ist deshalb ein fortschrittlicher nichtlinearer Regler entworfen worden, dessen Längsbewegungs-Basissteuer- und Regelsystem als Referenz für die im Rahmen des FF&E-Projekts „Fortschrittliche Synthese- & Analysewerkzeuge für die Flugreglerentwicklung“ hier vorgestellten Arbeiten dient.

Dem Nickachsen-Basisregler kommt neben der Stabilisierung (Dämpfung und Frequenz) der z.T. instabilen Anstellwinkelschwingung auch die wichtige Aufgabe der Bereitstellung exzellenter Flugeigenschaften im Sinne eines „MIL-Std. Level 1“ für den Piloten zu.

Für die Zertifizierung / Zulassung dieses Basisreglers ist zusätzlich zum Stabilitäts-/Flugeigenschafts- auch ein Robustheitsnachweis erforderlich, der konventionell mittels Stabilitätsreserven in Nichols-Charts durchgeführt wird. Dazu müssen in einer Vielzahl von Trimmpunkten entlang der Envelope die Nichols-

Frequenzgänge aller Eingrößen-Schnitte, d.h. die sog. *SISO*-Übertragungsfunktionen des offenes Kreises betrachtet werden, wobei weder auf durch das Mehgrößensystem bedingte Kopplungen noch auf eine exakte Beziehung der Robustheitsmaße zu physikalischen Systemparametern eingegangen werden kann.
Deshalb wird hier ein innovativeres Verfahren zur Robustheitsprüfung vorgestellt, welches die oben beschriebenen Schwächen kompensiert. Dieses Verfahren arbeitet mit einer durch eine dynamische Aktuatorunsicherheit ergänzten, parametrischen Unsicherheitsmodellierung, welche Modellierungsfehler einzelner physikalischer Parameter berücksichtigt und damit eine konkrete Aussage über die Beziehung von Modellunsicherheiten und Robustheit zulässt. Auch die Größe des Einflusses der einzelnen Parameterschwankungen auf die Stabilität kann dadurch abgeschätzt werden. Der Robustheitsnachweis selbst wird mit Hilfe des strukturierten Singulärwerts μ durchgeführt, der diese parametrische Unsicherheitsmodellierung beim Nachweis der robusten Stabilität exakt berücksichtigt. In einem weiteren Schritt wird zudem auch die Abhängigkeit der Systemparameter vom Trimmpunkt mit Hilfe einer virtuellen Trimmpunktunsicherheit ins Modell einbezogen, wodurch, im Gegensatz zu einer Vielzahl von Analysen in verschiedenen Trimmpunkten, eine einzige Analyse über den gesamten Trimmpunktbereich ermöglicht wird. Die folgenden Kapitel beschreiben, wie eine solche Unsicherheitsmodellierung und die Umformung auf eine für die μ-Analyse adäquate Form durchgeführt werden können.

2. BESCHREIBUNG DES NOMINAL-SYSTEMS

Wie bereits erwähnt, wird in den hier vorliegenden Untersuchungen der Basisregelkreis der Längsbewegung betrachtet, dem die Aufgaben der Stabilisierung (Dämpfung und Frequenz) der partiell instabilen Anstellwinkelschwingung sowie der Gewährleistung adäquater Flugeigenschaften zukommen. Neben einer klassischen Rückführung der Nickrate q ist hierfür auch eine Rückführung des Anstellwinkels α notwendig. Nach Linearisierung und den üblichen, u.a. in [1] beschriebenen Annahmen und Vereinfachungen für die Längsbewegung erhält man für die Starrkörperbewegung der Nickachsen-Kruzzeitdynamik das in Gl. (1) angegebene 2-Freiheitsgrad-Zustandsraummodell mit den Zustandsgrößen α und q, welche hier gleichzeitig auch die Messgrößen repräsentieren.

$$(1)\quad \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\eta \\ M_\eta \end{bmatrix} \cdot \eta$$

Dabei beschreibt η den effektiven Höhenruderausschlag und die Stabilitätsderivativa lassen sich gemäß der Herleitung in [2] auf folgende Weise definieren:

$$(2)\quad \begin{aligned} M_\alpha &= \bar{q}\frac{S\,l_{ref}}{I_{yy}} C_{m\alpha} + M_{f\alpha} \\ M_q &= \bar{q}\frac{S\,l_{ref}}{I_{yy}} \frac{l_{ref}}{V_0}(C_{mq} + C_{m\dot{\alpha}}) \\ M_\eta &= \bar{q}\frac{S\,l_{ref}}{I_{yy}} C_{m\eta} \\ Z_\alpha &= -\frac{\bar{q}\,S}{mV_0}(C_W + C_{A\alpha}) \\ Z_n &= -\frac{\bar{q}\,S}{mV_0} C_{A\eta} \end{aligned}$$

Es sollte in Erinnerung behalten werden, dass viele der im obigen Modell verwendeten Parameter nicht konstant, sondern vom Trimmpunkt (Anstellwinkel, Machzahl, Höhe, usw.) abhängig sind.
Durch Hinzufügen der Modelle für den Höhenruder-Aktuator und die Sensorik sowie des Basisreglers lässt sich der Regelkreis wie in BILD 1 dargestellt vervollständigen, wobei der Kommandozweig (Führungsgrößenvorgabe) für die Stabilitätsbetrachtung nicht von Belang ist und daher weggelassen wurde. Hierin stellen $G_{Act}(s)$ die Übertragungsfunktion des Aktuator, $\boldsymbol{G_{RB}}(s)$ die des in Gl. (1) definierten Starrkörpersystems, $\boldsymbol{G_{Sens}}(s)$ die des Sensorsystems und $\boldsymbol{G_{Cont}}(s)$ die des Reglers dar. Der Aktuator ist dabei durch ein System 3. Ordnung approximiert, während für die Sensorik zwei Systeme 2. Ordnung je für α-Sensor und q-Sensor verwendet wurden.

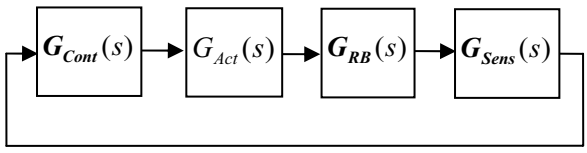

BILD 1. Nomineller Regelkreis

Der lineare Regler selbst setzt sich prinzipiell aus einer proportionalen Rückführung von q sowie einem *PI*-Anteil für α zusammen und ist mittels drei veränderlichen (adaptierten) Verstärkungsparametern vom Trimmpunkt abhängig. Im kompletten Modell geht zudem noch eine Vorsteuerung in den Regelalgorithmus ein, die allerdings unerheblich ist für die Stabilitätsuntersuchung und deshalb hier nicht berücksichtigt wird.

3. LFT-UNSICHERHEITSMODELLIERUNG OHNE TRIMMPUNKTUNSICHERHEIT

3.1. Definition parametrischer Unsicherheiten

Der parametrischen Unsicherheitsmodellierung, wie sie z.B. in [3] beschrieben wird, liegt hier die Idee zu

Grunde, einzelne Parameter p mit physikalisch motivierten Unsicherheiten zu beaufschlagen. Es werden prinzipiell multiplikative Unsicherheiten δ_P verwendet, deren „Gewichtung" η_P die maximale (prozentuale) Abeichung vom nominellen Wert $\overline{p}$ angibt:

$$p = \overline{p} \cdot (1 + n_P \delta_P), \quad \eta_P \geq 0, \quad |\delta_P| \leq 1 \tag{3}$$

Entsprechend ihrer erwarteten Relevanz sind hier sieben Parameter gemäß Gl. (3) als unsicher modelliert worden: Die Masse m, das Trägheitsmoment I_{yy} und die aerodynamischen Derivativa $C_{m\eta}$, C_{mq}, $C_{m\alpha}$, $C_{A\eta}$, $C_{A\alpha}$. Diese Parameter fließen gemäß Gl. (2) in die Elemente der Zustandsraummatrizen $\boldsymbol{A_{RB}}$ und $\boldsymbol{B_{RB}}$ des Starrkörpersystems ein, wodurch die Stabilitäts- und Steuerderivativa zum einen selbst unsicher werden und zum anderen Kopplungen auftreten, da die Elemente teils von den selben Parametern abhängen.

3.2. Definition einer komplexen dynamischen Unsicherheit

Zusätzlich zu den physikalisch direkt motivierten, parametrischen Unsicherheiten wird im Aktuator-Eingangskanal eine komplexe multiplikative Signalunsicherheit eingebracht, welche „pauschal" neben betragsmäßigen Abweichungen auch dynamische Unsicherheiten des Aktuatorsystems G_{Act} erfassen soll. Sie wird als über $g(s)$ frequenzgewichtete komplexe Unsicherheit modelliert.

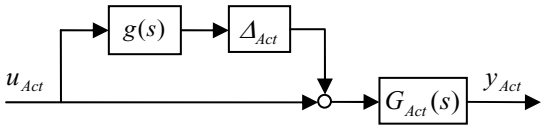

BILD 2. Multiplikative dynamische Unsicherheit

$$y_{Act} = G_{Act} \cdot \left(1 + \Delta_{Act} \cdot g(s)\right) \cdot u_{Act}$$
$$\left\|\Delta_{Act}\right\|_\infty \leq 1, \quad \Delta_{Act} \in \mathbf{C} \tag{4}$$

In Anlehnung an [4] wird das Gewicht $g(s)$ als Vorhalt-Filter (sog. Lead-Lag) gewählt. Durch die komplexe Modellierung kommt zudem eine Phasenunsicherheit hinzu. Dadurch wird gerade bei hohen Frequenzen den Unsicherheiten im System Rechnung getragen.

3.3. Umformung des Regelkreises auf LFT-Form

3.3.1. LFT-Form des Starrkörper-Zustandsraummodells

Um die in 3.1 aufgeführten parametrischen Unsicherheiten erfassen zu können, müssen die Elemente der Zustandsraummatrizen $\boldsymbol{A_{RB}}$ und $\boldsymbol{B_{RB}}$ des Starrkörpersystems mit einem Unsicherheitsmodell versehen werden. Exemplarisch lässt sich dies für ein Element a^{ik} der Matrix $\boldsymbol{A_{RB}}$ (für $\boldsymbol{B_{RB}}$ analog) folgendermaßen definieren:

$$a^{ik} = \frac{\alpha_A^{ik}}{1 + \eta_{A1}^{ik}\delta_{A1}^{ik}} \cdot \left(\beta_A^{ik} \cdot (1 + \eta_{A2}^{ik}\delta_{A2}^{ik}) + \gamma_A^{ik}\right) =$$
$$\left(\alpha_A^{ik} - \frac{\alpha_A^{ik}\eta_{A1}^{ik}\delta_{A1}^{ik}}{1 + \eta_{A1}^{ik}\delta_{A1}^{ik}}\right) \cdot \left(\beta_A^{ik} \cdot (1 + \eta_{A2}^{ik}\delta_{A2}^{ik}) + \gamma_A^{ik}\right) \tag{5}$$

Die Parameter α_A^{ik}, β_A^{ik} und γ_A^{ik} sind vom Trimmpunkt abhängig und ergeben sich durch Einsetzen nomineller Werte in die Gleichungen (2). Je nach Element und verwendeten Unsicherheiten können die Unsicherheiten δ_{A1}^{ik} und δ_{A2}^{ik} sowie ihre Gewichte η_{A1}^{ik} und η_{A2}^{ik} auch nicht vorhanden sein, ansonsten wird ihnen eine der sieben parametrischen Unsicherheiten, welche gemäß Gl. (3) für die sieben physikalischen Parameter definiert sind, zugewiesen. Diese Zuweisung ergibt sich dadurch, wenn man gemäß Gl. (3) vergleicht, welche Parameter durch die η_{A1}^{ik} und η_{A2}^{ik} jeweils mit einer Unsicherheit versehen wurden. Am Beispiel von a^{11}, in dem die unsicheren Parameter die Masse m (mit δ_m) und das aerodynamische Derivativ $C_{A\alpha}$ (mit $\delta_{C_{A\alpha}}$) sind, soll dies kurz anschaulich erläutert werden:

$$a^{11} = Z_\alpha = \frac{-(\overline{q}\,S)/(\overline{m}\,V_0)}{(1 + \eta_{A1}^{11}\delta_{A1}^{11})}(\overline{C}_{A\alpha}(1 + \eta_{A2}^{11}\delta_{A2}^{11}) + C_W)$$
$$\text{mit:} \quad -(\overline{q}\,S)/(\overline{m}\,V_0) = \alpha_A^{11} \qquad \eta_{A1}^{11} = \eta_m$$
$$\overline{C}_{A\alpha} = \beta_A^{11} \qquad \eta_{A2}^{11} = \eta_{C_{A\alpha}}$$
$$C_W = \gamma_A^{11} \tag{6}$$

Ziel ist es nun, die bekannten Größen und die unbekannten Parameter δ_{A1}^{ik} und δ_{A2}^{ik} in zwei Matrizen einer sog. LFT-Form (Linear Fractional Transformation) zu separieren, s. BILD 3. Der Weg dazu führt über die Einführung neuer virtueller Ein- und Ausgänge, wobei die Lösung des Problems nicht eindeutig ist, da es verschiedene Möglichkeiten gibt, die neuen Eingänge so zu definieren, dass die Unsicherheitsvariablen nicht mehr in den Zustandsgleichungen erscheinen. Die grundlegenden Ideen hierzu sind z.B. in [4] und [5] beschrieben.

Das Prinzip beruht darauf, die neuen Eingänge $w_{A1/2}^{ik}$ so zu definieren, dass sie jeweils eine Unsicherheitsvariable $\delta_{A1/2}^{ik}$ als Faktor im Zähler enthalten, wodurch diese in den Zustandsgleichungen verschwindet und der neue Eingang an der entsprechenden Stelle auftaucht. Um nun – wie gewünscht – die Unsicherheiten $\delta_{A1/2}^{ik}$ in eine Unsicherheitsmatrix $\boldsymbol{\Delta_{RB}^*}$ zu extrahieren und das „unsichere System" in LFT-Darstellung (vgl. BILD 3) zu überführen, definiert man zu jedem neuen Eingang einen neuen Systemausgang $q_{A1/2}^{ik}$, der über eine „Rückführschleife" mit dem zugehörigen $\delta_{A1/2}^{ik}$ mit dem Eingang über die Beziehung

(7) $w_{A1/2}^{ik} = q_{A1/2}^{ik}\delta_{A1/2}^{ik}$

verknüpft wird. Wenn man anhand dieser Beziehung aus Gl. (7) nun die Definition der virtuellen Eingänge $q_{A1/2}^{ik}$ ableitet, dann taucht das $\delta_{A1/2}^{ik}$ hierin im Zähler nicht mehr auf. Somit ist es möglich, das neue erweiterte Zustandsraumsystem ganz ohne die unbekannten Unsicherheitsvariablen $\delta_{A1/2}^{ik}$ anzuschreiben, wenn man die neu angelegten Ein- und Ausgänge gemäß dem LFT-Schaltbild aus BILD 3 mit einer Unsicherheitsmatrix, $\boldsymbol{\Delta}_{RB}^{*}$, welche die entsprechenden Unsicherheitsvariablen auf ihrer Diagonale enthält, miteinander verknüpft. Man spricht hier von der Trennung des Bekannten vom Unbekannten.
Hier wurden die neuen Eingänge folgendermaßen gewählt, wobei die $w_{A1/2}^{ik}$ mit den Unsicherheiten der $\boldsymbol{A}_{RB}$-Matrix und die $w_{B1/2}^{ik}$ mit den Unsicherheiten der $\boldsymbol{B}_{RB}$-Matrix verknüpft sind:

$$
\begin{aligned}
w_{A1}^{ik} &= \frac{-\eta_{A1}^{ik} x^k \delta_{A1}^{ik}}{1+\eta_{A1}^{ik}\delta_{A1}^{ik}} \\
w_{A2}^{ik} &= \alpha_A^{ik}\beta_A^{ik}\eta_{A2}^{ik}\left(x^k + w_{A1}^{ik}\right)\delta_{A2}^{ik} \\
w_{B1}^{ik} &= \frac{-\eta_{B1}^{ik} x^k \delta_{B1}^{ik}}{1+\eta_{B1}^{ik}\delta_{B1}^{ik}} \\
w_{B2}^{ik} &= \alpha_B^{ik}\beta_B^{ik}\eta_{B2}^{ik}\left(u^k + w_{B1}^{ik}\right)\delta_{B2}^{ik}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Damit resultiert als neue Zustandsgleichung

$$
\dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n}\left(\bar{a}^{ik}x^k + \bar{a}^{ik}w_{A1}^{ik} + w_{A2}^{ik}\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\bar{b}^{ik}u^k + \bar{b}^{ik}w_{B1}^{ik} + w_{B2}^{ik}\right), \tag{9}
$$

wobei n die Anzahl der Zustände und m die Anzahl der nominellen Eingänge beschreibt. Die nominellen Werte der Matrixelemente werden analog zu Gl. (3) mit $\bar{a}^{ik}$ und $\bar{b}^{ik}$ bezeichnet und ergeben sich aus (5) zu $\bar{a}^{ik} = \alpha_A^{ik}(\beta_A^{ik} + \gamma_A^{ik})$ und $\bar{b}^{ik} = \alpha_B^{ik}(\beta_B^{ik} + \gamma_B^{ik})$. Die neuen Ausgänge werden über die Unsicherheitsvariablen mit den neuen Eingängen verknüpft und lassen sich deshalb anschreiben als:

$$
\begin{aligned}
q_{A1}^{ik} &= \frac{w_{A1}^{ik}}{\delta_{A1}^{ik}} = \frac{-\eta_{A1}^{ik}x^k}{1+\eta_{A1}^{ik}\delta_{A1}^{ik}} = -\eta_{A1}^{ik}\left(x^k + w_{A1}^{ik}\right) \\
q_{A2}^{ik} &= \frac{w_{A2}^{ik}}{\delta_{A2}^{ik}} = \alpha_A^{ik}\beta_A^{ik}\eta_{A2}^{ik}\left(x^k + w_{A1}^{ik}\right) \\
q_{B1}^{ik} &= \frac{w_{B1}^{ik}}{\delta_{B1}^{ik}} = \frac{-\eta_{B1}^{ik}x^k}{1+\eta_{B1}^{ik}\delta_{B1}^{ik}} = -\eta_{B1}^{ik}\left(u^k + w_{B1}^{ik}\right) \\
q_{B2}^{ik} &= \frac{w_{B2}^{ik}}{\delta_{B2}^{ik}} = \alpha_B^{ik}\beta_B^{ik}\eta_{B2}^{ik}\left(u^k + w_{B1}^{ik}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Für die Ausgänge, die zu den reziproken Unsicherheiten im Nenner gehören, wie sie durch δ_{A1}^{ik} und δ_{B1}^{ik} vorliegen, behilft man sich einer mathematischen Umformung (hier am Beispiel von q_{A1}^{ik}):

$$
\begin{aligned}
q_{A1}^{ik} = \frac{w_{A1}^{ik}}{\delta_{A1}^{ik}} = \frac{-\eta_{A1}^{ik}x^k}{1+\eta_{A1}^{ik}\delta_{A1}^{ik}} \quad &\Rightarrow q_{A1}^{ik} + \eta_{A1}^{ik}\underbrace{\delta_{A1}^{ik}q_{A1}^{ik}}_{w_{A1}^{ik}} = -\eta_{A1}^{ik}x^k \\
&\Rightarrow q_{A1}^{ik} = -\eta_{A1}^{ik}x^k - \eta_{A1}^{ik}w_{A1}^{ik}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Werden die neuen Ein- und Ausgänge gemäß der Systematik $\boldsymbol{w}_A^1 = [w_{A1}^{11},...,w_{A1}^{1n},...,w_{A1}^{n1},...,w_{A1}^{nn}]^{\mathrm{T}}$ zu Vektoren zusammengefasst, so ergibt sich nun ein neues, von Unsicherheitsvariablen befreites Zustandsraumsystem $\boldsymbol{P}_{RB}^{*}$ des Starrkörpers und eine zugehörige Unsicherheitsmatrix $\boldsymbol{\Delta}_{RB}^{*}$ in Diagonalform mit den einzelnen Unsicherheitsvariablen δ^{ik} auf der Diagonale.

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{\mathbf{RB}}^{*} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{w}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}} \end{bmatrix} = \mathbf{\Delta}_{\mathbf{RB}}^{*} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{2}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{1}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{2}} \end{bmatrix} \tag{12}
$$

Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{P}_{RB}^{*}$ sind gemäß der Gln. (9), (10) und (12) von den Parametern $\bar{a}^{ik}$, $\bar{b}^{ik}$, $\alpha_{A/B}^{ik}$, $\beta_{A/B}^{ik}$, $\eta_{A1/2}^{ik}$ und $\eta_{B1/2}^{ik}$ abhängig und müssen dementsprechend für die einzelnen Matrixelemente definiert werden. Für die einzelnen η^{ik} und δ^{ik} können jetzt die zugehörigen parametrischen Unsicherheiten eingesetzt werden. Ist einem δ^{ik} keine parametrische Unsicherheit zugeordnet, so wird es zusammen mit den entsprechenden Zeilen und Spalten von $\boldsymbol{P}_{RB}^{*}$ und $\boldsymbol{\Delta}_{RB}^{*}$ gestrichen. Abschließend müssen $\boldsymbol{\Delta}_{RB}^{*}$ und dementsprechend $\boldsymbol{P}_{RB}^{*}$ noch so umsortiert werden, dass in der resultierenden Unsicherheitsmatrix $\boldsymbol{\Delta}_{RB}$ identische parametrische Unsicherheiten hintereinander auf der Diagonale folgen. Diese Strukturierung ist wichtig für die spätere μ-Analyse, da dort identische Unsicherheiten blockweise betrachtet werden. Es ergibt sich die gesuchte LFT-Form mit dem neuen Starrkörpersystem $\boldsymbol{P}_{RB}(s)$, welches als Übertragungsfunktionssystem dargestellt wird.

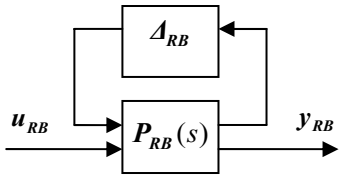

BILD 3. Starrkörper-LFT

3.3.2. LFT-Form des Aktuators

In Analogie zu BILD 3 kann auch für das mit der Eingangsunsicherheit beaufschlagte Aktuatorsystem eine LFT-Form mit Δ_{Act} durch Einführen je eines neuen

Ein- und Ausgangs hergestellt werden. Es ergibt sich eine neue Übertragungsfunktion $\boldsymbol{P}_{Act}$.

$$(13)\quad \boldsymbol{P}_{Act} = \begin{bmatrix} 0 & g(s) \\ G_{Act} & G_{Act} \end{bmatrix}$$

3.3.3. LFT-Form des geschlossenen Kreises

Ausgangspunkt ist der Regelkreis mit den mit Unsicherheiten versehenen Subsystemen in LFT-Form.

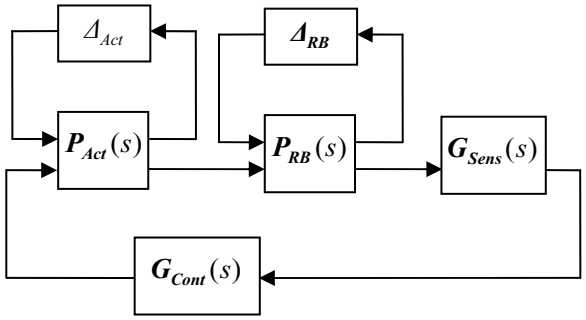

BILD 4. Regelkreis mit strukturierten Unsicherheitsmatrizen

In Anlehnung an die Herleitung in [6] lässt sich eine Rechenoperation $\tilde{*}$ definieren, welche, wie in BILD 5 und Gl. (14) gezeigt, zwei in Serie geschaltete LFT-Systeme, $\{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{Q}}\}$ folgend auf $\{\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{P}}\}$, "multiplikativ" zu einem einzigen System $\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{R}}\}$ verknüpft.

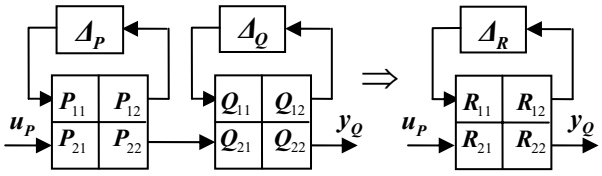

BILD 5. Serielle LFT-Schaltung

$$\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{R}}\} = \{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{Q}}\} \tilde{*} \{\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{P}}\} \quad \text{mit:}$$

$$(14)\quad \boldsymbol{R} = \left[\begin{array}{cc:c} \boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_{12} \\ \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{P}_{22} \\ \hdashline \boldsymbol{Q}_{22}\boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22}\boldsymbol{P}_{22} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{P}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix}$$

Die entsprechende Operation für den Fall, dass eine der beiden Δ-Matrizen nicht existent ist, wird dabei über $\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{R}}\} = \{\boldsymbol{Q},[]\} \tilde{*} \{\boldsymbol{P},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{P}}\}$ symbolisiert.

Des Weiteren lässt sich ausgehend von z.B. [7] und [8] für die Schließung von Regelkreisen folgende sog. Untere-LFT-Operation definieren („Lower-LFT“):

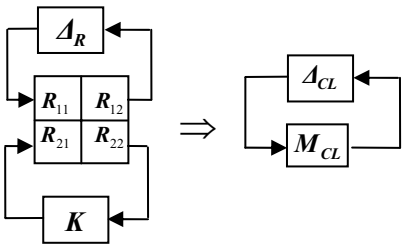

BILD 6. Untere-LFT-Operation

$$\{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CL}},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{CL}}\} = \mathrm{F}_{\mathrm{l}}(\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{R}}\},\boldsymbol{K}) \quad \text{mit:}$$

$$(15)\quad \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CL}} = \boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}_{22}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{R}_{21} + \boldsymbol{R}_{11}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{CL}} = \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{R}}$$

Um nun mit Hilfe der in Gl. (14) und (15) definierten Rechenoperationen das in BILD 4 gegebene Schaltbild auf eine LFT-Form $\{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CL}},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{CL}}\}$ des geschlossenen Kreises wie in BILD 6 zu bringen, muss folgende Umformung durchgeführt werden:

$$(16)\quad \{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CL}},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{CL}}\} = \mathrm{F}_{\mathrm{l}}\left(\left\{\left\{\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{Sens}},[]\right\} \tilde{*} \{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{RB}},\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{RB}}\}\right\} \tilde{*} \{\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Act}},\Delta_{Act}\}\right\},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{Cont}}\right)$$

Die Unsicherheitsmatrix des Sensorsystems wird hier mit „[]“ als leer angenommen. Im Allgemeinen ist $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{CL}}$ eine blockdiagonale Matrix, in diesem Fall ist es sogar eine Diagonalmatrix mit Δ_{Act} und $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{RB}}$ auf der Diagonale.

4. LFT-UNSICHERHEITSMODELLIERUNG MIT TRIMMPUNKTUNSICHERHEIT

Bei der in Kapitel 3 aufgezeigten Modellierung sind die Parameter $\alpha_{A/B}^{ik}$, $\beta_{A/B}^{ik}$ und $\gamma_{A/B}^{ik}$ jeweils vom Trimmpunkt abhängig, d.h., von dem durch den Referenz-Anstellwinkel α_0 bestimmten Flugzustand. Für verschiedene Trimmpunkte müssen demnach auch eigene Modelle berechnet werden. Nun soll aber diese Trimmpunktabhängigkeit mit in die Unsicherheitsmodellierung einfließen, so dass ein einziges Modell einen gesamten Trimmbereich im Sinne von $\alpha_{0\min} \le \alpha_0 \le \alpha_{0\max}$ abdeckt. Dies wird erreicht, indem die Wahl des Trimmpunkts durch eine eigene Unsicherheitsvariable δ_{TP} ins Modell einbezogen und die trimmpunktabhängigen Parameter als Funktionen dieser Variable dargestellt werden (vergleiche hierzu auch [9] und [10]).

4.1. Approximation der Trimmpunktabhängigkeit durch rationale Funktionen

Der hier relevante Trimmbereich von $\alpha_0 = -5°$ bis $\alpha_0 = 20°$ kann über die folgende Umformung auf δ_{TP} abgebildet werden:

$$(17)\quad \alpha_0 \in [-5°;20°] \rightarrow \delta_{TP} \in [-1;1]:\ \delta_{TP}(\alpha_0) = \frac{\alpha_0 - 7.5°}{12.5°}$$

Die Abhängigkeit der trimmpunkabhängigen Parameter p von α_0 lässt sich somit durch $p(\alpha_0) \rightarrow p(\delta_{TP})$ auf eine Abhängigkeit von δ_{TP} abbilden und durch rationale Funktionen folgendermaßen approximieren:

$$(18)\quad \hat{p}(\delta_{TP}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \delta_{TP}}{1 + \lambda_3 \delta_{TP}} \approx p(\delta_{TP})$$

$\hat{p}(\delta_{TP})$ stellt hierbei die Approximation von $p(\delta_{TP})$ dar. Die Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3 der rationalen Funktionen lassen sich ermitteln, indem man ein Regressionsverfahren auf diskrete Trimmpunktwerte $p^i(\delta_{TP}^i)$ entlang des gesamten Trimmbereichs anwendet, welches für T Trimmpunktwerte den relativen quadratischen Fehler

$$(19)\quad \varepsilon = \sum_{i=1}^{T} \left(\frac{p^i - \hat{p}^i}{p^i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{T} \left(1 - \frac{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 \delta_{TP}^i}{1 + \lambda_3 \delta_{TP}^i}}{p^i} \right)^2$$

zwischen den tatsächlichen und den approximierten Werten minimiert. Die gesuchten λ_i lassen sich dann, wie in [10] gezeigt, durch Rückführung auf ein lineares Ausgleichsproblem über folgende Matrizengleichung berechnen:

$$(20)\quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{A}_{\delta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{\delta} \right)^{-1} \boldsymbol{A}_{\delta}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{Tx1}, \quad \boldsymbol{A}_{\delta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p^1} & \frac{\delta_{TP}^1}{p^1} & -\delta_{TP}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{p^T} & \frac{\delta_{TP}^T}{p^T} & -\delta_{TP}^T \end{bmatrix}$$

4.2. Starrkörper-LFT mit Trimmpunktunsicherheit

Ein Blick auf die Gln. (9) und (10) zeigt, dass im mit Unsicherheiten beaufschlagten Starrkörpersystem nur die Ausdrücke $\overline{a}^{ik}$, $\overline{b}^{ik}$, $\alpha_A^{ik}\beta_A^{ik}$ und $\alpha_B^{ik}\beta_B^{ik}$ vom Trimmpunkt abhängig sind, da die $\eta_{A1/2}^{ik}$ und $\eta_{B1/2}^{ik}$ konstant sind und alle anderen Variablen Signale darstellen. Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, lassen sich diese Abhängigkeiten durch rationale Funktionen approximieren, womit sich die folgenden Zusammenhänge ergeben:

$$(21)\quad \begin{aligned} \overline{a}^{ik} &= \frac{\lambda_{A1}^{ik} + \lambda_{A2}^{ik}\delta_{TP}}{1 + \lambda_{A3}^{ik}\delta_{TP}} & \alpha_A^{ik}\beta_A^{ik} &= \frac{\tilde{\lambda}_{A1}^{ik} + \tilde{\lambda}_{A2}^{ik}\delta_{TP}}{1 + \tilde{\lambda}_{A3}^{ik}\delta_{TP}} \\ \overline{b}^{ik} &= \frac{\lambda_{B1}^{ik} + \lambda_{B2}^{ik}\delta_{TP}}{1 + \lambda_{B3}^{ik}\delta_{TP}} & \alpha_B^{ik}\beta_B^{ik} &= \frac{\tilde{\lambda}_{B1}^{ik} + \tilde{\lambda}_{B2}^{ik}\delta_{TP}}{1 + \tilde{\lambda}_{B3}^{ik}\delta_{TP}} \end{aligned}$$

Durch leichte Abwandlung der Gleichungen (9) und (10) und Einfügen weiterer virtueller Ein- und Ausgänge lassen sich auch hier wieder die Unsicherheitsvariablen aus den Zustandsraumgleichungen entfernen.

$$(22)\quad \begin{aligned} q_{A1}^{ik} &= \frac{w_{A1}^{ik}}{\delta_{A1}^{ik}} = -\eta_{A1}^{ik}\left(x^k + w_{A1}^{ik}\right) & q_{B1}^{ik} &= \frac{w_{B1}^{ik}}{\delta_{B1}^{ik}} = -\eta_{B1}^{ik}\left(u^k + w_{B1}^{ik}\right) \\ q_{A2}^{ik} &= \frac{w_{A2}^{ik}}{\delta_{A2}^{ik}} = \eta_{A2}^{ik}\left(x^k + w_{A1}^{ik}\right) & q_{B2}^{ik} &= \frac{w_{B2}^{ik}}{\delta_{B2}^{ik}} = \eta_{B2}^{ik}\left(u^k + w_{B1}^{ik}\right) \\ q_{A3}^{ik} &= \frac{w_{A3}^{ik}}{\delta_{TP}} = x^k - \lambda_{A3}^{ik} w_{A3}^{ik} & q_{B3}^{ik} &= \frac{w_{B3}^{ik}}{\delta_{TP}} = u^k - \lambda_{B3}^{ik} w_{B3}^{ik} \\ q_{A4}^{ik} &= \frac{w_{A4}^{ik}}{\delta_{TP}} = w_{A1}^{ik} - \lambda_{A3}^{ik} w_{A4}^{ik} & q_{B4}^{ik} &= \frac{w_{B4}^{ik}}{\delta_{TP}} = w_{B1}^{ik} - \lambda_{B3}^{ik} w_{B4}^{ik} \\ q_{A5}^{ik} &= \frac{w_{A5}^{ik}}{\delta_{TP}} = w_{A2}^{ik} - \tilde{\lambda}_{A3}^{ik} w_{A5}^{ik} & q_{B5}^{ik} &= \frac{w_{B5}^{ik}}{\delta_{TP}} = w_{B2}^{ik} - \tilde{\lambda}_{B3}^{ik} w_{B5}^{ik} \end{aligned}$$

Ein großer Vorteil bei der Verwendung rationaler Funktionen ist, dass durch sie eine genauere Approximation möglich ist als z.B. durch Polynome 1. Ordnung, aber dennoch nur ein zusätzlicher virtueller Ein- und Ausgang pro approximiertem Parameter in den Zustandsgleichungen hinzukommt. Bei Polynomen 2. Ordnung hingegen wären es je zwei neue Ein- und Ausgänge, was die Dimension des resultierenden Systems drastisch erhöhen würde.
Neben den neuen Ein- und Ausgängen ergibt sich damit auch eine neue Gleichung für $\dot{\boldsymbol{x}}$, in der die Parameter $\lambda_{A/B4}^{ik}$ und $\tilde{\lambda}_{A/B4}^{ik}$ gemäß $\lambda_{A4}^{ik} = \lambda_{A2}^{ik} - \lambda_{A1}^{ik}\lambda_{A3}^{ik}$ berechnet werden:

$$(23)\quad \begin{aligned} \dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n} \Big(& \lambda_{A1}^{ik} x^k + \lambda_{A1}^{ik} w_{A1}^{ik} + \tilde{\lambda}_{A1}^{ik} w_{A2}^{ik} + \\ & \lambda_{A4}^{ik} w_{A3}^{ik} + \lambda_{A4}^{ik} w_{A4}^{ik} + \tilde{\lambda}_{A4}^{ik} w_{A5}^{ik} \Big) + \\ \sum_{k=1}^{m} \Big(& \lambda_{B1}^{ik} u^k + \lambda_{B1}^{ik} w_{B1}^{ik} + \tilde{\lambda}_{B1}^{ik} w_{B2}^{ik} + \\ & \lambda_{B4}^{ik} w_{B3}^{ik} + \lambda_{B4}^{ik} w_{B4}^{ik} + \tilde{\lambda}_{B4}^{ik} w_{B5}^{ik} \Big) \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man letztlich analog zu Gl. (12):

$$(24)\quad \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{q_A} \\ \boldsymbol{q_B} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{RB}}^{*} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w_A} \\ \boldsymbol{w_B} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{w_A} \\ \boldsymbol{w_B} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{RB}}^{*} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_A} \\ \boldsymbol{q_B} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q_A} = \left[\boldsymbol{q_A^1; q_A^2; q_A^3; q_A^4; q_A^5} \right]$$
$$\boldsymbol{q_B} = \left[\boldsymbol{q_B^1; q_B^2; q_B^3; q_B^4; q_B^5} \right]$$
$$\boldsymbol{w_A} = \left[\boldsymbol{w_A^1; w_A^2; w_A^3; w_A^4; w_A^5} \right]$$
$$\boldsymbol{w_B} = \left[\boldsymbol{w_B^1; w_B^2; w_B^3; w_B^4; w_B^5} \right]$$

Nach Streichen der zu den nicht verwendeten Unsicherheiten gehörigen Spalten und Zeilen von $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{RB}}^{*}$ und $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{RB}}^{*}$ sowie Umsortieren der beiden Matrizen in der Art, dass auf der Diagonale von $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{RB}}^{*}$ identische Unsicherheiten aufeinander folgen, ergibt sich wieder das in BILD 3 dargestellte Schaltbild der Starrkörper-LFT.

4.3. Trimmpunktabhängigkeit der restlichen Subsysteme

Von den restlichen Subsystemen des Regelkreises sind nur die Reglerparameter vom Trimmpunkt abhängig. Für diese sind zunächst auch rationale Funktionen verwendet worden, jedoch zeigte sich für den speziellen Anwendungsfall, dass diese Approximation sehr schlechte Ergebnisse liefert, vgl. BILD 7.

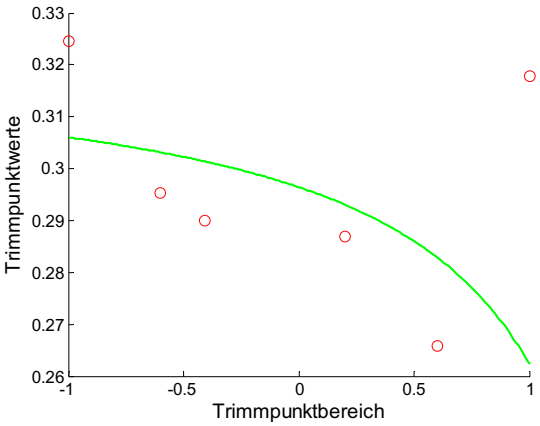

BILD 7. Reglerapproximation mit rationalen Funktionen

Wie BILD 7 verdeutlicht, ist insbesondere aufgrund der ungünstigen Lage des letzten Trimmpunkts, welcher zu $\alpha_0 = 20°$ gehört, eine befriedigende Approximation nicht möglich. Auch in der μ-Analyse spiegelt sich dies wieder, weil das geregelte System dann bereits ohne Parameterunsicherheiten nahe an die Stabilitätsgrenze gerät, was bei Verwendung der korrekten Reglerparameter nicht der Fall ist. Wird der letzte Trimmpunkt weggelassen, so erhält man wieder eine sinnvolle Approximation und die erwarteten Ergebnisse.
Deshalb ist nach alternativen Approximationen mittels Polynomen gesucht worden, wobei erstaunlicherweise bereits eine einfache Mittelwertbildung der Reglerparameter zu gleichermaßen erwarteten wie auch hinreichend guten Ergebnissen geführt hat. Da dies zudem den Vorteil hat, dass keine weiteren virtuellen Ein- und Ausgänge benötigt werden, wird hier eine Modellierung der Reglerparameter durch Mittelwertbildung über die Trimmpunkte verwendet. Es kann davon ausgegangen werden, dass bei einer exakteren Approximation der Trimmpunktabhängigkeit der Reglerparameter sogar noch etwas bessere Ergebnisse möglich wären.

5. μ-ANALYSE DES REGELKREISES

5.1. Strukturierter Singulärwert

Liegt die im rechten Teil von BILD 6 dargestellte $\boldsymbol{M_{CL}}$ - $\boldsymbol{\Delta_{CL}}$ -Struktur vor, so lässt sich der strukturierte Singulärwert μ z.B. gemäß [4] nach folgender Formel berechnen:

$$(25)\quad \frac{1}{\mu(\boldsymbol{M_{CL}}(j\omega))} = \inf_{\boldsymbol{\Delta_M}} \{\bar{\sigma}(\boldsymbol{\Delta_{CL}}) : \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Delta_{CL}}\boldsymbol{M_{CL}}(j\omega)) = 0\}$$
$$\mu(\boldsymbol{M_{CL}}(j\omega)) = 0, \text{ falls } \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Delta_{CL}}\boldsymbol{M_{CL}}(j\omega)) \neq 0$$

Der strukturierte Singulärwert μ stellt damit den Kehrwert der im Sinne der H_∞-Norm kleinsten Perturbation $\boldsymbol{\Delta_M}$ dar, welche das System an die Stabilitätsgrenze bringt. Diese ist laut dem Mehrgrößen-Nyquist-Kriterium (z.B. [8]) dann erreicht, wenn die Determinante in Gl. (25) gleich Null wird. Robuste Stabilität gegen die modellierten Unsicherheiten kann für das System aus BILD 6 genau dann gewährleistet werden, wenn μ für alle Frequenzen kleiner als 1 ist. Denn dann ist die kleinste destabilisierende Unsicherheit $(\| \boldsymbol{\Delta_M} \|_\infty)_{destab}$ sicher größer als der im Rahmen der Unsicherheitsmodellierung spezifizierte größtmögliche Fehler $\| \boldsymbol{\Delta_M} \|_\infty = 1$:

$$(26)\quad \sup_\omega \mu(\boldsymbol{M_{CL}}(j\omega)) < 1 \Leftrightarrow \text{robuste Stabilität}$$

Der entscheidende Unterschied zur Berechnung des unstrukturierten Singulärwerts, wie er beispielsweise bei der H_∞-Analyse verwendet wird, besteht darin, dass es sich hier bei $\boldsymbol{\Delta_M}$ stets um eine strukturierte Unsicherheitsmatrix in blockdiagonaler Form handelt, wodurch die Perturbationsfreiheitsgrade erheblich eingeschränkt sind und die Analyse weitaus weniger konservativ wird. Im Gegensatz dazu wird bei der Berechnung des unstrukturierten „klassischen“ Singulärwerts von einer völlig unstrukturierten, komplexen Unsicherheitsmatrix ohne Nullelemente ausgegangen, die eine viel größere Anzahl an Perturbationsfreiheitsgraden bietet. Der Robustheitsanalyse mit solch einer unstrukturierten Unsicherheitsmatrix liegt das sog. „Small Gain Theorem“ zu Grunde, weshalb der strukturierte Robustheitsnachweis mit μ oft als auch „generalisiertes Small Gain Theorem“ und μ selbst als generalisierter Singulärwert bezeichnet werden, vgl. hierzu z.B. [7], [8] oder [11].

5.2. Durchführung der μ-Analyse

Das Problem der μ-Berechnung lässt sich wie in [5] und [7] beschrieben in der Praxis i.a. nur iterativ numerisch durch Berechnung einer oberen und unteren Grenze des μ-Werts lösen. Um robuste Stabilität zu garantieren, muss die obere Grenze, meist als *Upper Bound* bezeichnet, also über alle Frequenzen definitiv kleiner als 1 sein.
Hier ist für die numerische Berechnung der Grenzen wahlweise die alte "μ-Analysis and Synthesis Toolbox" oder die neue "Robust Control Toolbox" von Matlab® verwendet worden. Die μ-Diagramme werden über den, wie es sich herausgestellt hat, relevanten Frequenzbereich von 1 bis 100 rad/sec erstellt. Das in

BILD 2 eingeführte Frequenzgewicht $g(s)$ der dynamischen Signalunsicherheit wird derart gewählt, dass für kleine Frequenzen 20 %-ige und für hohe Frequenzen 150 %-ige Unsicherheiten im Aktuatoreingang entsprechend der folgenden Beziehung auftreten:

$$g(s) = 1.5 \cdot \frac{s+10}{s+75} \quad (27)$$

Das Bode-Diagramm des Frequenzgewichts zeigt BILD 8.

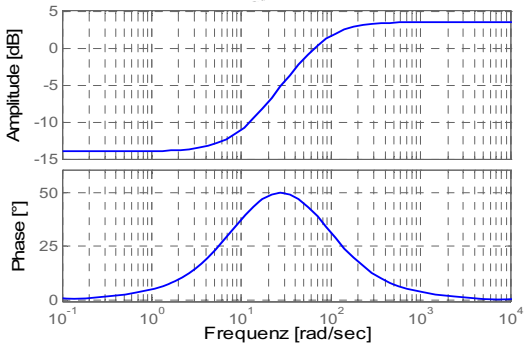

BILD 8. Gewicht der dynamischen Unsicherheit

Weiterhin wird die Analyse so gestaltet, dass für die sieben parametrischen Unsicherheiten jeweils individuell die maximalen prozentualen Abweichungen vom nominellen Wert vorgegeben werden können.

6. ERGEBNISAUSWERTUNG

6.1. Ergebnisse ohne Trimmpunktunsicherheit

Für die Unsicherheits-Modellierung ohne Einbeziehung der Parameterabhängigkeit vom Trimmpunkt werden 6 repräsentative Stecken-Regler-Modelle über den Anstellwinkelbereich von −5° bis 20° analysiert. Hierbei zeigt sich, dass I_{yy} und $C_{m\eta}$ die dominierenden Parameter sind, d.h., Modellierungsfehler dieser Parameter wirken sich besonders stark auf den μ-Wert aus. Ein weiteres wichtigstes Ergebnis ist, dass alle sieben Parameter gleichzeitig mit bis zu 35 % Unsicherheit beaufschlagt werden können, bevor das System seine robuste Stabilität verliert. Dabei ist es natürlich möglich, einzelne Parameter mit einer größeren Unsicherheit zu versehen, wenn gleichzeitig die Unsicherheit anderer als kleiner angenommen wird.
In BILD 9 und BILD 10 werden die starken Einflüsse von I_{yy} und $C_{m\eta}$ verdeutlicht, welche hier jeweils eine Unsicherheit von 35 % besitzen. Alle anderen parametrischen Unsicherheiten sind dabei zu Null gesetzt, dennoch ist jeweils ein starker „Peak“ im Bereich zwischen 10 rad/sec und 20 rad/sec zu erkennen. Im Vergleich dazu zeigt BILD 11 das Ergebnis ganz ohne parametrische Unsicherheit, also nur mit der komplexen dynamischen Aktuatorunsicherheit.

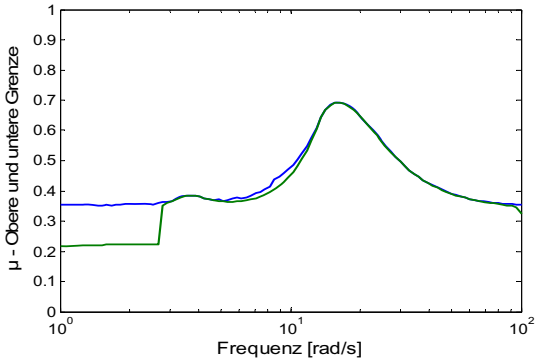

BILD 9. μ-Analyse – Einfluss von I_{yy}

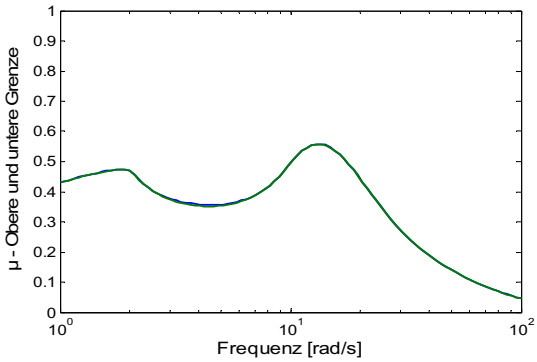

BILD 10. μ-Analyse – Einfluss von $C_{m\eta}$

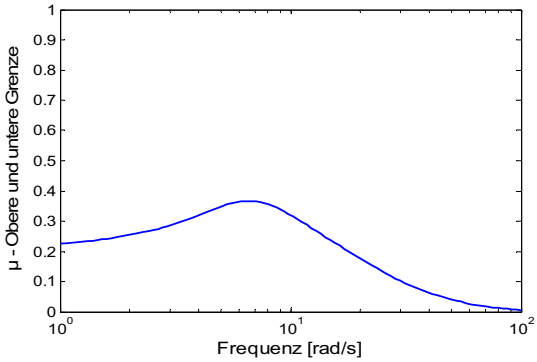

BILD 11. μ-Analyse – Ohne parametrische Unsicherheit

In BILD 12 und BILD 13 sind die Ergebnisse für 35 %-ige Unsicherheiten aller sieben Parameter bei einem Anstellwinkel von −5° bzw. 20° dargestellt. Da der μ-Wert für alle Frequenzen kleiner als 1 ist, kann gegen diese modellierte Unsicherheit robuste Stabilität garantiert werden. Die Ergebnisse für die anderen vier Trimmpunkte sehen ähnlich aus, wobei der Maximalwert („Peak“) bei ca. 16 rad/sec jeweils knapp unter dem aus BILD 12 liegt. Wie zu sehen ist, existiert noch eine zweite, kleinere Spitze bei ca. 3 rad/sec, die jedoch für keinen Trimmpunkt die Größe des globalen Maximums erreicht.
Genaue Untersuchungen der Resultate haben gezeigt,

dass neben I_{yy} und $C_{m\eta}$ auch die multiplikative komplexe Eingangsunsicherheit einen großen Einfluss auf den μ-Verlauf hat, was schon in BILD 11 zu erkennen ist. Dies ist leicht verständlich, da ja gemäß BILD 8 die Eingangsunsicherheit den gesamten Aktuatoreingang mit einer möglichen betragsmäßigen Abweichung von 20 % für kleine Frequenzen bis zu 150 % für hohe Frequenzen und zusätzlich mit einer frequenzabhängigen Phasenabweichung beaufschlagt, was im Sinne des Nyquistkriteriums eine große Auswirkung auf die Stabilität/Robustheit haben muss. Allerdings kann festgestellt werden, dass oberhalb von 30 rad/sec auch die Eingangsunsicherheit, unabhängig von ihrer Größe, kaum mehr Einfluss auf die Robustheit des Systems hat (infolge des Tiefpasscharakters der Strecke).
Für die Berechnung des μ-Werts sind 100 logarithmisch verteilte Frequenzen zwischen 1 und 100 rad/sec spezifiziert worden, wobei auch eine Erhöhung der Anzahl der Berechnungspunkte oder die Ausweitung des Frequenzbereichs zu keinen anderen Ergebnissen führte. Wie man sieht, ergibt sich in manchen Bereichen eine relativ schlechte Konvergenz von oberer und unterer μ-Grenze. Im kritischen Frequenzbereich, in dem das dominierende Maximum liegt, ist die Konvergenz jedoch jeweils recht gut, was relativ genaue Aussagen über die Robustheit zulässt.

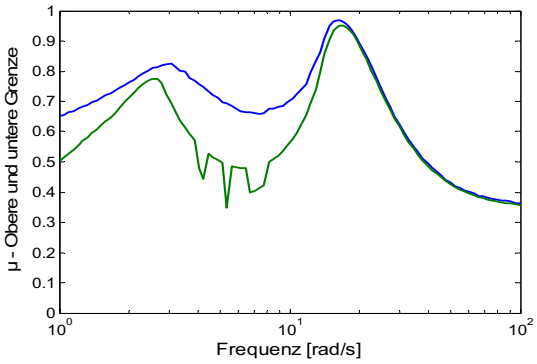

BILD 12. μ-Analyse für $\alpha_0 = -5°$, 35% parametrische Unsicherheit

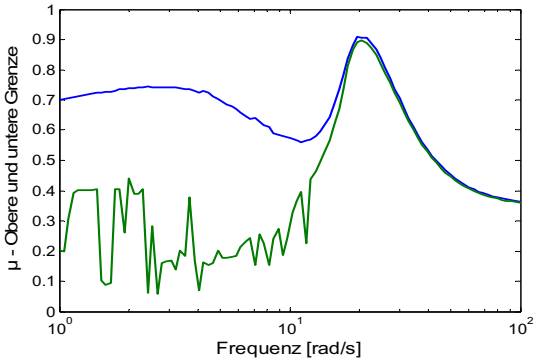

BILD 13. μ-Analyse für $\alpha_0 = 20°$, 35 % parametrische Unsicherheit

6.2. Ergebnisse mit Trimmpunktunsicherheit

Die μ-Analyse für das Unsicherheitsmodell mit Einbeziehung der Parameterabhängigkeit vom Trimmpunkt kann die Ergebnisse der Analyse ohne Trimmpunktunsicherheit weitestgehend bestätigen. Auch hier kann wieder bis zu einer Parameterunsicherheit von 35 % robuste Stabilität gewährleistet werden. Dies ist in BILD 14 illustriert, in dem zu erkennen ist, dass der μ-Wert für alle Frequenzen stets kleiner als 1 ist. Es ergeben sich auch wieder die zwei Maxima im gleichen Frequenzbereich und mit ähnlichen Beträgen wie zuvor. Des Weiteren kann auch hier wiederum festgestellt werden, dass I_{yy} und $C_{m\eta}$ die dominierenden Parameter sind.
Im Gegensatz zur vorigen Analyse sind die „Spitzen“ hier allerdings nicht mehr so anschaulich zu deuten. Denn bei der vorigen Analyse bedeutete ein Maximalwert von $\mu_{\max}$ nichts anderes, als dass alle modellierten Unsicherheiten noch um den Faktor $\frac{1}{\mu_{\max}}$ erhöht werden dürfen, bevor die ungünstigste Perturbation von $\boldsymbol{\Delta}_{CL}$ das System an die Stabilitätsgrenze bringt. Rein mathematisch betrachtet bleibt diese Aussage zwar erhalten, jedoch verliert sie physikalisch ihren Sinn, weil die Trimmpunktunsicherheit ja nur für den Bereich zwischen -1 und 1 definiert ist und darüber hinausgehende Werte zu physikalisch unsinnigen Trimmpunkten führen würden. Dies ist auch der Grund dafür, dass in BILD 14 die obere μ-Grenze stets Werte von mehr als 0.7 annimmt, da die Trimmpunktunsicherheit jenseits des Bereichs von -1 bis 1 schnell zur Instabilität führt, was sich auch im "nominellen" Modell ohne jede andere Unsicherheit nicht ändern würde.

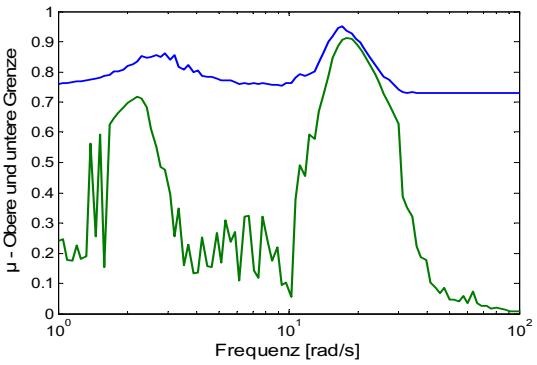

BILD 14. μ-Analyse mit Trimmpunktabhängigkeit und 35 % parametrischer Unsicherheit

7. ZUSAMMENFASSUNG

Für den Basisregler der Längsbewegung eines modernen Jet-Trainermodells ist eine umfassende μ-Analyse durchgeführt worden, um den für eine Zertifizierung notwendigen Robustheitsnachweis des Regelungssystems in einer fortschrittlichen und effizienten Art und Weise zu erbringen. Dazu sind sieben physikalische Parameter, die als besonders maßgeblich einzustufen

sind, als unsicher modelliert worden, wobei für jeden Parameter individuell ein maximaler prozentualer Schwankungsbereich vorgegeben werden kann. Zusätzlich ist eine komplexe Signalunsicherheit in den Aktuator-Eingangskanal eingebracht worden, welche jegliche sonstige (nicht berücksichtigte) Unsicherheiten, insbesondere auch die dynamischen des Aktuators, repräsentieren soll.

Durch Einführung neuer virtueller Ein- und Ausgänge ist es möglich, die unsicheren Subsysteme in LFT-Darstellung, jeweils bestehend aus einem bekannten System von Übertragungsfunktionen sowie einer Unsicherheitsmatrix, zu überführen. Nach einer geeigneten Verknüpfung der einzelnen LFT-Systeme sowie der Einbindung des Reglers mittels einer „Lower-LFT-Repräsentation“ resultiert letztendlich ein einziges finales LFT-System des geschlossenen Regelkreises, anhand dessen in den verschiedenen Trimmpunkten jeweils eine μ-Analyse mittels numerischer Berechnung der oberen und unteren μ-Schranken durchgeführt werden kann.

In einem zweiten Schritt wird zusätzlich eine virtuelle Trimmpunktunsicherheit eingefügt, mit deren Hilfe die Trimmpunktabhängigkeit der flugdynamischen Parameter in das Unsicherheitsmodell mit eingebunden wird. Diese Abhängigkeit kann für die Starrkörperparameter durch rationale Funktionen und für die Reglerparameter, nachdem die rationalen Funktionen hier zu Approximationsproblemen geführt hatten, durch Mittelwertbildung entlang des Trimmbereichs nachgebildet werden.

Beide Analysemethoden zeigen, dass für die sieben physikalischen Parameter jeweils bis zu 35 % Unsicherheit angenommen werden kann, bevor das System seine robuste Stabilität verliert, wobei die Unsicherheiten natürlich auch anders verteilt werden können und die einzelnen Parameter unterschiedlich starken Einfluss haben. Insbesondere durch die Übereinstimmung der Analyse ohne Trimmpunktunsicherheit, welche den Vorteil hat, dass in jedem Trimmpunkt nur exakte Modellparameterwerte verwendet werden, mit der Analyse mit Trimmpunktunsicherheit, welche den Vorteil hat, dass sie mit einer einzigen Berechnung den gesamten Trimmbereich abdeckt, wird der hier vorgestellten Vorgehensweise eine große Plausibilität ausgewiesen und das Konzept der „Trimmpunktunsicherheit“ als effiziente Methode für künftige Robustheitsnachweise von Flugreglern validiert.

Ein Punkt, der dabei und auch für weiterführende Anwendungen stets beachtet werden sollte, ist, dass die μ-Analyse stets nur so gut wie das ihr zu Grunde gelegte Unsicherheitsmodell sein kann. Denn da mittels μ stets eine Worst-Case-Betrachtung durchgeführt wird, ist genau zu überlegen, mit welcher Unsicherheit die einzelnen Parameter sinnvoll behaftet werden sollen. Im Vergleich mit konventionellen Robustheitsnachweisen jedoch liefert die μ-Analyse durchweg weitaus weniger konservative und physikalisch viel anschaulichere Ergebnisse.

8. DANKSAGUNG

Die Autoren danken EADS-MAS für die Ermöglichung und Unterstützung der hier vorgestellten Arbeiten im Rahmen des FF&E-Projekts „Fortschrittliche Synthese- und Analysewerkzeuge für Flugreglerentwicklungen“.

9. LITERATUR

[1] Brockhaus, R.: Flugregelung. Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1994.

[2] Metzner, Petry: Herleitung und Linearisierung der allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Flugzeugs. Messerschmitt-Bölkow-Blohm GmbH, München 1990

[3] Skogestad, S., Postlethwaite, I.: Multivariable Feedback Control. John Wiley & Sons. Chichester 1996.

[4] Balas, G., Doyle, J., Glover, K., Packard, A., Smith, R.: μ-Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide. Musyn Inc. and The MathWorks, Inc. 1998.

[5] Balas, G.: Application of Structured Singular Value Analysis Techniques to Aerospace Vehicles. Musyn Inc., Minneapolis 2005.

[6] Herrnberger, M.: Moderne Verfahren zur Robustheits- und Stabilitätsanalyse eines Flugregelungssystems. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, TU München 2004.

[7] Zhou, K., Doyle, J., Glover, K.: Robust and Optimal Control. Prentice Hall, Inc., New Jersey 1996

[8] Dailey, R. L.: Lecture Notes for the Workshop on H_∞ and μ Methods for Robust Control. American Control Conference, San Diego 1990

[9] Heller, M.: Untersuchungen zur Steuerung und Robusten Regelung der Seitenbewegung von Hyperschallflugzeugen. Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, TU München, Herbert Utz Verlag Wissenschaft 1999.

[10] Löfberg, J.: μ-Synthesis Control of Lateral Dynamics on a Hypersonic Test Vehicle. Examensarbeit, Linköping University 1998.

[11] Banda, S., Bowlus, J.: Multivariable Control Design Guidelines. Honeywell Technology Center, Minneapolis 1996