

# Mitteilung

Von:

Prof. Dr. Dieter Scholz, MSME  
Aircraft Design and Systems Group (AERO)

Aero\_M\_Kondensstreifen\_23-10-20.pdf

Department F&F, HAW Hamburg  
Berliner Tor 9, 20099 Hamburg

**Datum:** 2025-11-04

Tel.: 040 - 18 11 98 81  
E-Mail: [info@ProfScholz.de](mailto:info@ProfScholz.de)

---

# Kondensstreifen

## Inhaltsverzeichnis

*Work in Progress*

### Einleitung

### Schmidt-Appleman – Diagramm und Schmidt-Appleman – Kriterium

### Analytische, numerische, iterative und approximativ-analytische Lösung der Schmidt-Appleman-Temperatur, $t_{SAC}$

- 1 Analytische Lösung
- 2 Numerische Lösung
- 3 Iterative Lösung
- 4 Approximativ-analytische Lösung

### Parameter der Luftfeuchtigkeit und Umrechnungen

- 1 Spezifischer Wassergehalt der Luft
- 2 Wasserdampf-Mischungsverhältnis
- 3 Relative Feuchte
- 4 Beziehung zwischen Mischungsverhältnis,  $w$  und Dampfdruck,  $e$   
Herleitung: Mischungsverhältnis aus Dampfdruck
  - a) Ausgangspunkt: Ideale Gasgleichung (ideal gas law)
  - b) Definition des Mischungsverhältnisses  $w$  (mixing ratio / humidity ratio)
  - c) Verbindung zu den molaren Massen (molar masses)
- 5 Beziehung zwischen spezifischen Wassergehalt,  $q$  auf relative Feuchte,  $\phi$
- 6 Beziehung zwischen Mischungsverhältnis,  $w$  auf relative Feuchte,  $\phi$
- 7 Beziehung zwischen spezifischen Wassergehalt,  $q$  und Dampfdruck,  $e$
- 8 Überblick über die Umrechnungen

### **Herleitung der Steigung, G der Mischgeraden**

- 1 Ausgangspunkt: Mischgerade in T-w-Diagramm
- 2 Die gängige Form für die Steigung der Mischgerade im Dampf-druck-(e) - T-Diagramm
  - a) Ausgangsgleichung
  - b) Umstellen nach e (Schritt-für-Schritt)
  - c) Ableitung  $de/dw$
  - d) Kehrwert  $dw/de$
  - e) Nützliche Grenzfälle / Näherungen
  - f) Ausgangsgleichungen
  - g) Ableitung  $de/dw$  (exakt)
  - h) Kettenregel:  $de/dT$  (exakt)
  - i) Jetzt muss noch  $w_{\text{inf}}$  berechnet werden!
    - (1) Relative Feuchte
    - (2) Mischungsverhältnis (aus separater Herleitung)
    - (3) Kombinierte Formel
  - j) Näherung für feuchtearme (typische troposphärische/hohe Flughöhen) Luft

### **Warum ist die Mischgerade (mit Steigung, G) eine Gerade?**

- 1 Was physikalisch passiert
- 2 Warum daraus eine "Gerade" entsteht
- 3 Die physikalische Bedeutung der Annahme
- 4 Was passiert bei Kondensation?
- 5 In T-e (Dampfdruck)-Darstellung
- 6 Fazit

### **Warum wird die T-e-Darstellung gewählt, wenn die eine weitere Näherung enthält?**

- 1 Was wir physikalisch prüfen wollen
- 2 Warum man trotzdem von w ausgeht
- 3 Warum man dann doch e verwendet
- 4 Ja, das ist eine zusätzliche Näherung - aber eine kontrollierte
- 5 Praktischer Grund in der Forschung und Modellierung

### **Wir benötigen nicht nur die Steigung der Mischgeraden, sondern auch deren Lage im e-T-Diagramm.**

#### **Dazu schreiben wir $G \cdot T + G_0 = RH \cdot e_w(T)$ . Wie können wir $G_0$ bestimmen?**

- 1 Ausgangspunkt: Geradengleichung im T-e-Diagramm
- 2 Vergleich mit der Form der Geraden
- 3 Auflösen nach  $G_0$
- 4 Physikalische Interpretation

**Die Mischgerade ist nur eine Gerade bis zum Kondensationspunkt und folgt dann der Sättigungslinie. Die Geradenannahme ist also nur bis zur Sättigung gültig. Wie passt das zum Geradenverlauf bis zu Umgebungsbedingungen?**

- 1 Mischgerade vor der Kondensation
- 2 Kondensationspunkt
- 3 Auflösung des "Widerspruchs"
- 4 Fazit

**Nach vollständiger Mischung sind die Umgebungsbedingungen  $T_{\text{inf}}$  und  $e_{\text{inf}} = RH \cdot e_w(T)$ . Damit liegt der Endpunkt nicht auf der Sättigungskurve (wenn  $RH < 100\%$ ). Wie geht es weiter nachdem der Sättigungs-kurve gefolgt wurde?**

- 1 Ausgangssituation
- 2 Vollständige Mischung am Endpunkt
- 3 Wann endet der Verlauf entlang der Sättigungskurve?
- 4 Zusammenfassung

**Flight Planning: Avoiding of Warming Contrails - Fostering Cooling Contrails**

**The Rich-Quench-Lean (RQL) Combustor – Causing More Contrails than Average**

**Implementation Strategy for Contrail Management**

- 1 Getting Started with the Four Outcomes in Science
- 2 Four Outcomes Applied to Contrail Management
- 3 Optimized Introduction of Contrail Management

# Einleitung

Die Auswirkungen des Flugverkehrs auf das Klima beschränken sich nicht nur auf die Emission von Verbrennungsprodukten wie Ruß, H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub> und NO<sub>x</sub>. Durch die Triebwerke wird in entsprechend kalten und feuchten Regionen der Atmosphäre Wolkenbildung eingeleitet.

Kondensstreifen sind linienförmige, von Flugzeugen verursachte Zirruswolken. Der Energiehaushalt der Erdatmosphäre wird stark von Wolken beeinflusst. Wolken reflektieren einerseits einen Teil der einfallenden Sonnenstrahlung, sodass sie auf die Erdoberfläche kühlend wirken. Andererseits vermindern Wolken die Abstrahlung von Wärme vom Erdboden in den Weltraum; dadurch wirken sie erwärmend.

Nur unter bestimmten atmosphärischen Voraussetzungen werden die Wasserdampfemissionen eines Flugtriebwerkes als Kondensstreifen sichtbar. Kondensstreifen bilden sich, wenn die Atmosphäre genügend kalt ist. Die genaue Grenztemperatur, unterhalb der sich Kondensstreifen bilden, hängt von der Flughöhe, der Umgebungsfeuchte, dem Treibstoff und dem Wirkungsgrad des Flugzeugs ab. Sie liegt zwischen -35 und -55°C. In trockener Luft lösen sich die Kondensstreifen rasch wieder auf. In sehr feuchter Luft können Kondensstreifen dagegen lange, einige Minuten bis Stunden, leben und sich am Himmel ausbreiten. Die Atmosphäre ist häufig so kalt und feucht, dass sich solch langlebige Kondensstreifen bilden, aber noch nicht feucht genug, um Zirren auf natürlichem Wege zu bilden. In solchen Fällen verursachen Flugzeuge Zirren, die sich auf natürlichem Wege nicht gebildet hätten. Mit zunehmendem Alter verlieren die Kondensstreifen ihre anfängliche linienförmige Struktur und man sieht den daraus entstandenen Zirren nicht mehr an, dass sie von Flugzeugen verursacht wurden. Zudem verändern die vom Luftverkehr emittierten Rußpartikel die Wolkenbildung. Zirrusänderungen infolge von Ruß aus Flugzeugtriebwerken wurden im Bereich dicht beflogener Luftstraßen bereits gemessen. Es ist zu erwarten, dass Ruß aus Luftverkehr Zirruswolken auch großräumig und auch noch nach Tagen verändern kann.

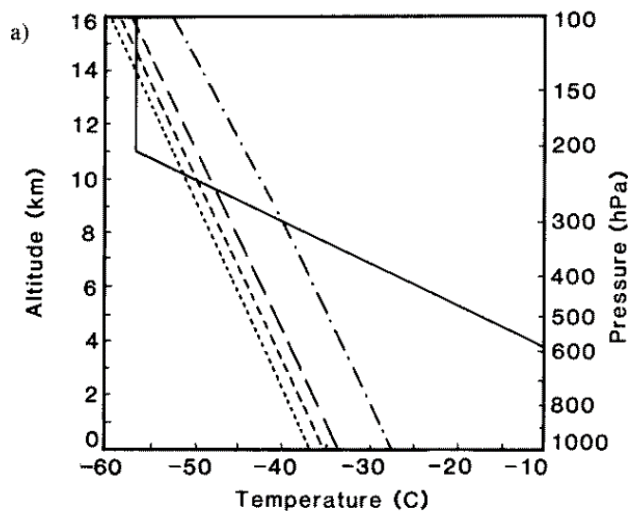
Soweit die Einleitung zum Thema von Prof. Dr. Robert Sausen, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Institut für Physik der Atmosphäre (<https://perma.cc/YJR4-WVJ2>).

## Schmidt-Appleman – Diagramm und Schmidt-Appleman – Kriterium

### Einleitung

Ob sich Kondensstreifen bilden oder nicht kann aus dem **Schmidt-Appleman-Diagramm** (SAD) abgelesen werden (Bild 1). Aufgetragen sind Höhe (Ordinate links) und Druck (Ordinate rechts). Die Physik der Atmosphäre richtet sich nach dem Druck. Die Höhe steht dem Druck also nur als Höhe nach der Internationalen Standardatmosphäre (ISA) – bezogen auf mittlere Breiten – gegenüber zum leichteren Ablesen. Auf der Abszisse ist die Temperatur aufgetragen. Im Diagramm befinden sich diagonale Linien für die relative Feuchte. Liegen Bedingungen aus Druck

und Temperatur vor links von einer Feuchtelinie, dann wird sich ein Kondensstreifen bilden. Bedingungen rechts von einer Feuchtelinie führen nicht zu einem Kondensstreifen. Nach der ISA wird der Druck aus dem Temperaturverlauf berechnet. Die Wertepaare sind als durchgezogene Linie im SAD eingezeichnet.



**Bild 1:** Schmidt-Appleman Diagram (SAD) mit Linien der relativen Luftfeuchtigkeit von 0 % (punktiert), über 30 %, 60 % bis 100 % (strichpunktiert). Ein Zustand (Druck, Temperatur) recht von einer Feuchtelinie führt nicht zum Kondensstreifen; links von der Linie gibt es einen Kondensstreifen. Die ISA Bedingungen zeigt die durchgezogene Linien. Das Diagramm wurde für die Verbrennung von Kerosin erstellt und einen Triebwerkswirkungsgrad von 0,3 (<https://elib.dlr.de/32128>).

Dem SAD (Bild 1) können einige **allgemeingültige Aussagen** entnommen werden. Unter ISA-Bedingungen kann es unter ca. 8,5 km Höhe keine Kondensstreifen geben. Bedenkt man, dass die relative Luftfeuchtigkeit in der Stratosphäre gering ist (sicher unter 30 %), dann kann es über 14,5 km auch keine Kondensstreifen geben. Kondensstreifen sind damit auf Flughöhen zwischen 8,5 km und 14,5 km beschränkt. Dies schießt aber die Flughöhe um 11 km (Tropopause) ein, in der viel geflogen wird.

### Das Schmidt-Appleman-Kriterium

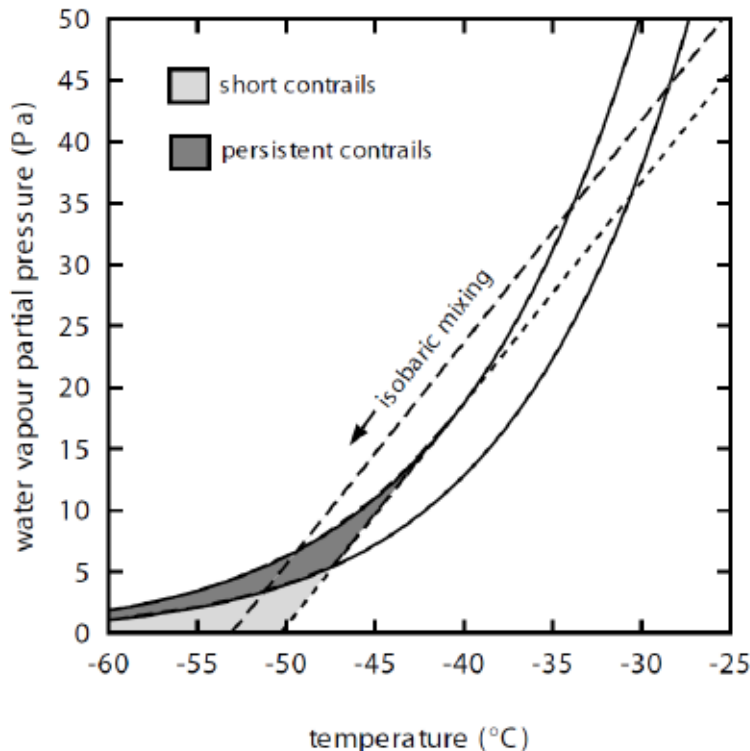
Das SAD wird durch Anwendung des **Schmidt-Appleman-Kriteriums** (Bild 2) erstellt. Das Schmidt-Appleman Kriterium wird viel zitiert, ist aber nicht so leicht verständlich. Aufgetragen ist in dem Diagramm der Partialdruck,  $p_D$  des Wasserdampfes (water vapor partial pressure). Gearbeitet wird eigentlich mit der relativen Feuchtigkeit,  $\varphi$ . Mit  $p_D$  ist das Diagramm aber vom Druck unabhängig und hat so Vorteile in der täglichen Arbeit. Es gilt allgemein

$$\varphi = \frac{p_D}{p_S(t)} = \frac{p_D}{E_w(t)} .$$

$\varphi$  ist die relative Feuchtigkeit.  $E_w(t)$  ist der Sättigungsdampfdruck ("über Wasser"), also über einer Wasseroberfläche gemessen. Später wird noch benötigt,  $E_i(t)$  der Sättigungsdampfdruck ("über Eis") gemessen.

Wenn das Abgas das Strahltriebwerk verlässt, dann beginnt ein **Mischungsprozess** des heißen Abgases mit der kalten Umgebungsluft. Die Abkühlung verläuft (so die Erklärung) linear. Dazu wird ein idealisierter Prozess angenommen. Es wird angenommen, dass die Abgase in der Atmosphäre zur Ruhe kommen und dann ihre kinetische Energie vollständig abgegeben haben. In Bild 2 bewegt man sich mit dem sich abkühlenden Abgas von weit oben (außerhalb des Diagramms) bis nach unten links im Diagramm (in Pfeilrichtung entlang der gestrichelten Linie),

bis das Abgas sich vollständig mit der Luft in der Atmosphäre vermischt hat. Der Phasenverlauf (Druck und Temperatur) des Gemisches aus Abgasen und Umgebungsluft ist diese eine Gerade. Verschiedene Abkühlungen sind denkbar. Verläuft die Abkühlung über eine Gerade, die den Sättigungsdampfdruck "über Wasser" nur in einem Punkt berührt, so gibt das die wärmste Temperatur an, bei der die Bildung eines Kondensstreifens gerade noch möglich ist.



**Bild 2:** Das Schmidt-Appleman Kriterium ergibt, ob es zu einer Kondensstreifenbildung kommt oder nicht – nach dem hier gezeigten Diagramm (<https://doi.org/10.2174/1874282300802010001>).

**Kondensstreifen** sind dann **langlebig (persistent)**, und können sich zu Kondensstreifenzirren ausbreiten, wenn der Endzustand der Abgase in einem mit Eis übersättigten Gebiet (Ice-Supersaturated Region, ISSR) endet. In Bild 2 ist der Zustand der langlebigen Kondensstreifen in dunkelgrau gekennzeichnet. Andernfalls ist der Kondensstreifen kurz und hat nur eine Lebensdauer von wenigen Minuten. Dies ist im Diagramm in hellgrau dargestellt. Der Übergang von kurz- zu langlebig ist in Wirklichkeit sicher kontinuierlich.

Die Steigung,  $G$  der Geraden ist aus der Literatur bekannt und wird weiter hinten im Bericht hergeleitet.

$$G = \frac{EI_{H_2O} p c_p}{\epsilon Q (1 - \eta)}$$

mit üblichen Parametern für Kerosin

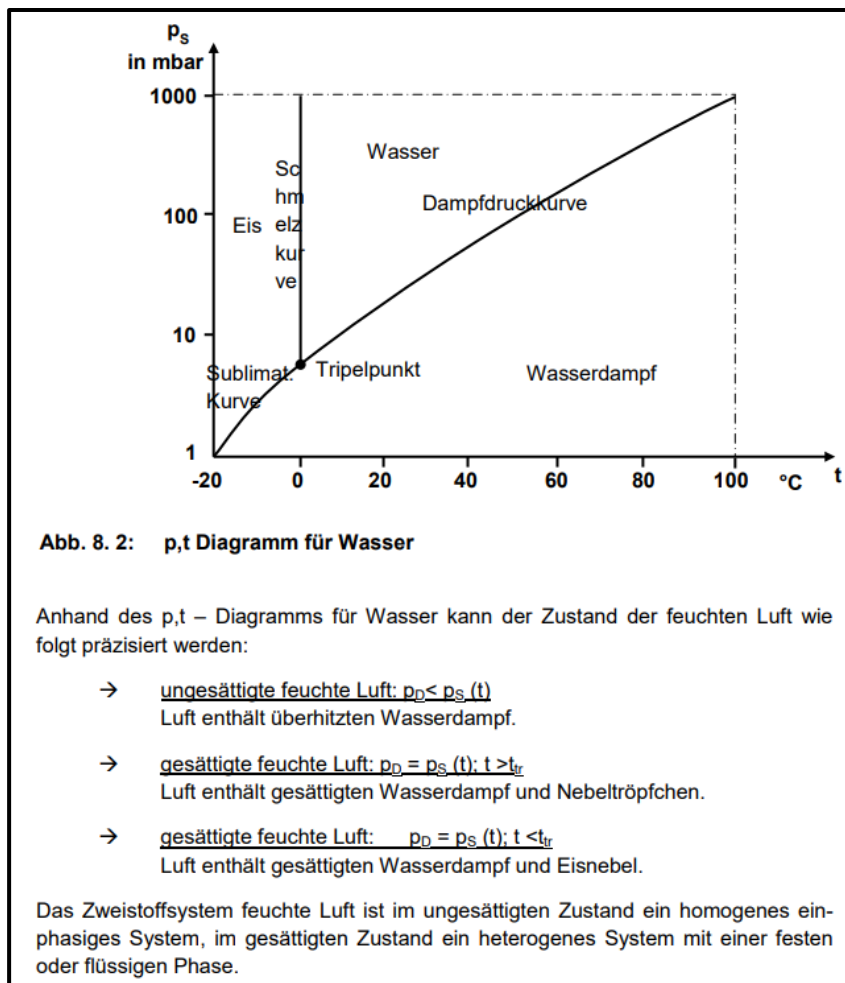
|             |               |
|-------------|---------------|
| $EI_{H_2O}$ | 1,25          |
| $c_p$       | 1004 J/(kgK)  |
| $\epsilon$  | 0,622         |
| $Q$         | 4,30E+07 J/kg |
| $\eta$      | 0,35          |

Dies sind die **Eingangsparameter** in die Gleichung für  $G$ . Werte sind oben angegeben.

- $EI_{H_2O}$  ist der Emissionsfaktor (emission index) und sagt wieviel kg Wasser je kg Kerosin frei wird.
- Der Druck,  $p$  ist von der Höhe abhängig.
- $c_p$  ist die spezifische Wärmekapazität.
- $Q$  ist die Energiemenge in einem kg Kraftstoff.
- $\epsilon$  oder  $\frac{M_{H_2O}}{M_{dry air}}$  ist das Verhältnis der Molmassen von Wasser und trockener Luft.
- $\eta$  oder  $\frac{P_{out}}{P_{in}}$  ist der Wirkungsgrad von den Triebwerken (0,3 bis 0,4).

Wenn wir den Punkt kennen, wo wir enden im Diagramm auf der Geraden, dann wissen wir auch, welchen Weg die Abkühlung genommen hat. Die Abkühlung muss auf einer Geraden stattgefunden haben auf oder links von der Tangente. Wenn die Atmosphärenbedingungen (Endstadium der Abkühlung) so sind wie im dunkelgrauen Bereich (recht feucht und kalt), dann haben wir langlebige Kondensstreifen (Persistent Contrails). Wenn der Partialdruck des Wasserdampfes (water vapor partial pressure) geringer ist (weniger feucht), dann lösen sich die Kondensstreifen in der trockenen Luft auf. Wenn es wärmer ist (rechts von der Tangente), dann ist es zu keinem Zeitpunkt während der Abkühlung zur Kondensation des Wassers im Abgas gekommen und damit nicht zu einem Kondensstreifen.

Allgemeiner und auch für höhere Temperaturen sind die **Phasenübergänge des Wassers** in Bild 3 gezeigt. Diese Ergänzung nur um das Verständnis zu erhöhen.



**Bild 3:** Das p,t Diagramm für Wasser und feuchte Luft (<https://perma.cc/G5HC-DGW8>).

Bild 4 zeigt die Magnus-Formel(n) für die beiden Kurven im Schmidt-Appleman-Kriterium. Die Korrekturfaktoren (Bild 5) für feuchte Luft sind nahe eins. Ich habe die Korrekturfaktoren im ersten Schritt weggelassen.

## Berechnung des Sättigungsdampfdrucks von Wasser über die Magnus-Formel [ Bearbeiten | Quelltext bearbeiten ]

Der Sättigungsdampfdruck für **Wasserdampf** in reiner Phase (Abwesenheit von Luft) kann mit Hilfe der von der **WMO** empfohlenen **Magnus-Formel** berechnet werden.<sup>[8][7]</sup> Diese Formel hat den Vorteil, dass sie nur drei Parameter benötigt und umkehrbar ist. Es gibt aber genauere Formeln.

- Über ebenen Wasseroberflächen

$$E_w(t) = 6,112 \text{ hPa} \cdot \exp\left(\frac{17,62 \cdot t}{243,12 \text{ °C} + t}\right) \quad \text{für} \quad -45 \text{ °C} \leq t \leq 60 \text{ °C}$$

- Über ebenen Eisoberflächen

$$E_i(t) = 6,112 \text{ hPa} \cdot \exp\left(\frac{22,46 \cdot t}{272,62 \text{ °C} + t}\right) \quad \text{für} \quad -65 \text{ °C} \leq t \leq 0 \text{ °C}$$

**Bild 4:** Die Magnus-Formel (<https://de.wikipedia.org/wiki/Sättigungsdampfdruck>).

## Korrekturfaktoren für feuchte Luft [ Bearbeiten | Quelltext bearbeiten ]

Die Korrekturfaktoren (engl.: *enhancement factor*) sind nötig, da der Wasserdampf nicht in reiner Form vorliegt, sondern innerhalb der feuchten Luft. Sie gelten lediglich bei einem Luftdruck von 1013,25 hPa (Normaldruck). Bei höheren Drücken sind sie größer und dementsprechend bei niedrigeren Drücken kleiner.

1. über Wasser im Temperaturintervall von  $-50 \text{ °C}$  bis  $90 \text{ °C}$ :  $f_w = 1,00519 \pm 0,00108$
2. über Eis im Temperaturintervall von  $-90 \text{ °C}$  bis  $0 \text{ °C}$ :  $f_i = 1,00686 \pm 0,00235$

Da die Korrekturfaktoren temperaturabhängig sind und in den obigen Werten recht große Temperaturintervalle umfassen, stellen sie nur recht grobe Näherungen an die tatsächliche Abweichung dar. Die negativen Temperaturen über Wasser beziehen sich auf unterkühltes Wasser. Um die resultierenden Werte für den Sättigungsdampfdruck zu erhalten, gilt:

1.  $E'_w = f_w \cdot E_w$  ( $E_w$  – Tabellenwert)
2.  $E'_i = f_i \cdot E_i$  ( $E_i$  – Tabellenwert)

**Bild 5:** Korrekturfaktoren zur Magnus-Formel für feuchte Luft

(<https://de.wikipedia.org/wiki/Sättigungsdampfdruck>).

**Bestimmung der Geraden im Schmidt-Appleman-Kriterium.** Von der Geraden in Bild 2

$$f(t) = G t + G_0$$

kennen wir nur die Steigung,  $G$ .  $f(t)$  ist aber die Tangente an  $E_w(t)$ . Am Berührungspunkt muss die Steigung von  $E_w(t)$  und von  $f(t)$  gleich sein. Es wird  $E_w(t)$  nach  $t$  abgeleitet und  $G$  gleichgesetzt.

$$E_w(t)' = dE_w(t)/dt = G.$$

Daraus ergibt sich die Temperatur  $t_{SAC}$  im Berührungspunkt. Die Temperatur  $t_{SAC}$  ist die höchste Temperatur, bei der noch ein Kondensstreifen entstehen kann. Die Berechnung der Ableitung enthält Bild 6.

Weiterhin sind die Funktionswerte beider Funktionen im Berührungspunkt gleich. Wir erhalten  $G_0$  aus

$$G_0 = E_w(t) - G \cdot t$$

Die Herleitung im Detail in Bild 6.

Berechnung der Tangente an die Kurve  $E_w(t)$

$$E_w(t) = a \cdot e^{\frac{bt}{c+t}}$$

$$\frac{dE_w(t)}{dt} = a \cdot e^{\frac{bt}{c+t}} \cdot \frac{b(c+t) - bt}{(c+t)^2}$$

$$= a \cdot e^{\frac{bt}{c+t}} \cdot \frac{bc + bt - bt}{(c+t)^2}$$

$$\frac{dE_w(t)}{dt} = \frac{abc \cdot e^{\frac{bt}{c+t}}}{(c+t)^2}$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ 0 \\ \downarrow \\ = \end{matrix} G$$

$$f(t) = G \cdot t + G_0$$

Lösen der Gleichung

$$\frac{abc \cdot e^{\frac{bt}{c+t}}}{(c+t)^2} - G = 0$$

$t$  ist die Temperatur, in der sich die Kurve  $E_w(t)$  und die Gerade  $f(t)$  berühren. Dies ist die Temperatur  $T_{SAC}$ : SAC threshold temperature  
 SAC: Schmidt-Appleman Criterion.

Bild 6: Berechnung der Ableitung von  $E_w(t)$ .

Die **Nullstelle** der in Bild 6 gezeigten Gleichung wird in **Excel mit dem Solver** gefunden.

Einen Screenshot zeigt der Excel-Tabelle zeigt Bild 7.

Einen Screenshot der Excel-Tabelle zeigt Bild 7. **Download der Excel-Tabelle** über <https://purl.org/aero/SAC>.

Bild 8 zeigt das berechnete Diagramm zum Schmidt-Appleman-Kriterium.

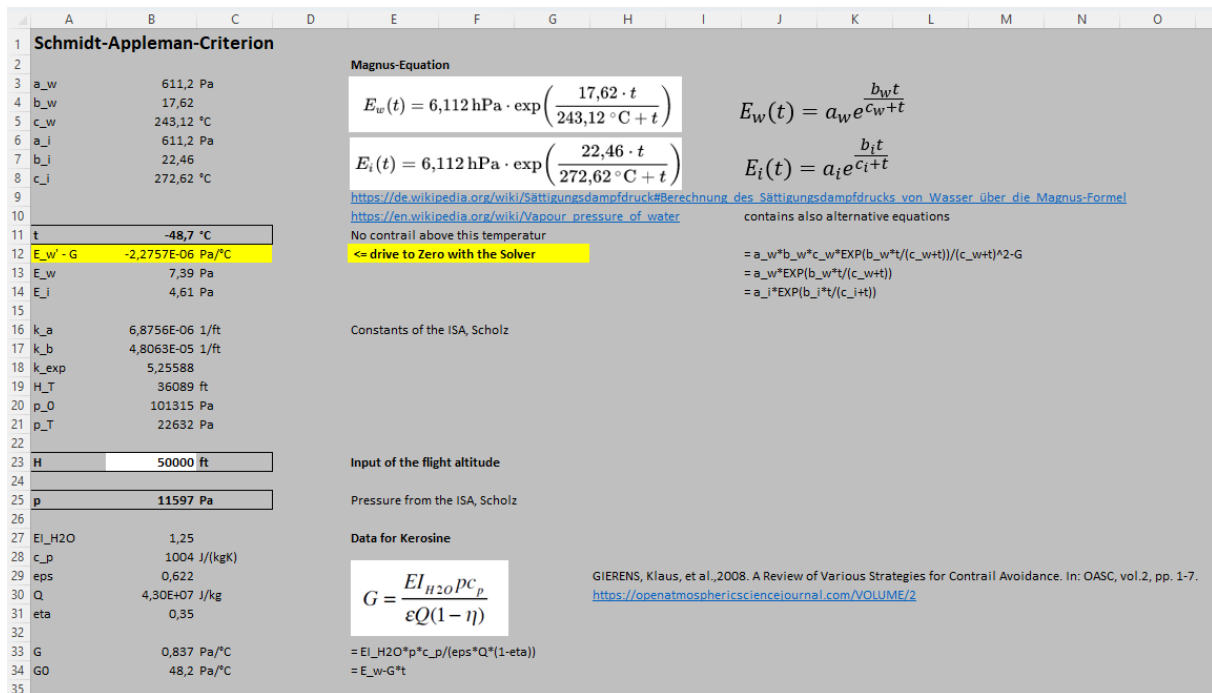
Kondensstreifen in Luft mit einer relativen Feuchte,  $\varphi$

$$\frac{E_i(t)}{E_w(t)} \leq \varphi \leq 1$$

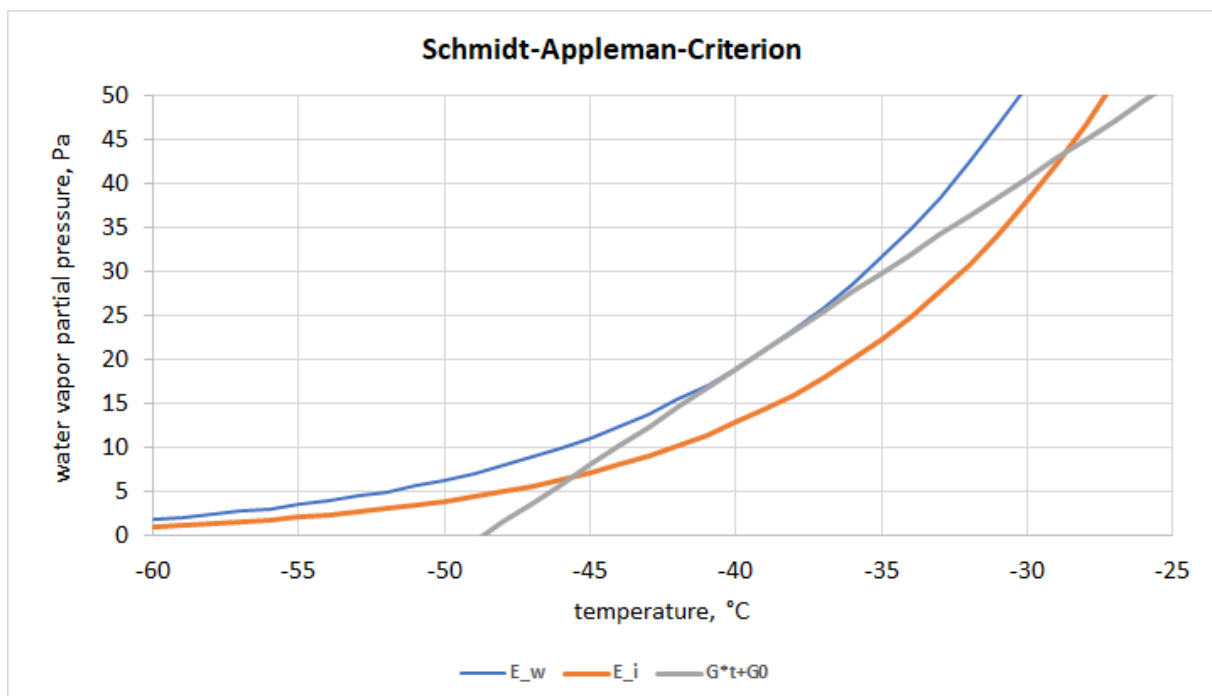
gelten als persistent. Aus der Grenzkurve (Bild 9)

$$\varphi = \frac{E_i(t)}{E_w(t)}$$

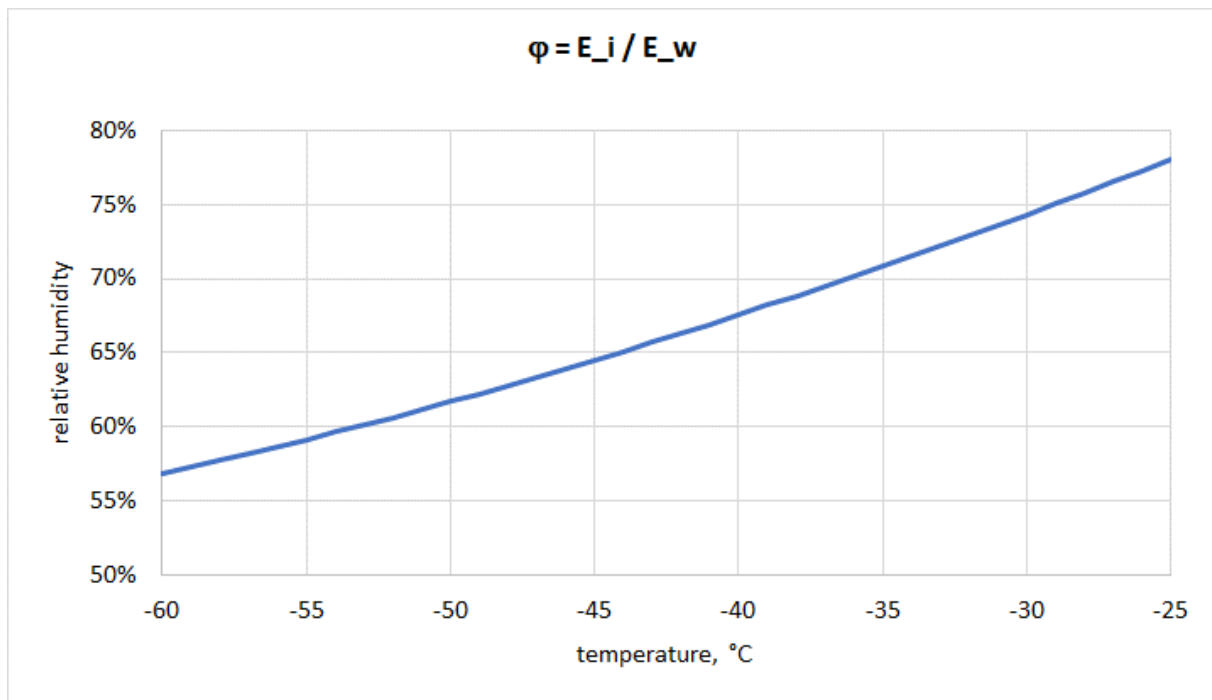
wird die mindestens erforderliche relative Feuchtigkeit ersichtlich.



**Bild 7:** Screenshot des Excel-Tools zur Berechnung der Kondensstreifen nach Schmidt-Appleman.



**Bild 8:** Berechnung zum Schmidt-Appleman-Kriterium hier für eine Flughöhe,  $H = 30000 \text{ ft}$ ,  $p = 30087 \text{ Pa}$ .



**Bild 9:** Grenzkurve für die mindestens erforderliche relative Feuchtigkeit für persistente Kondensstreifen.

## Constructing the Schmitd-Appleman-Diagram

Constructing the SAD

An aircraft flies at altitude,  $H$   
and air temperature,  $t$ .

At what relative humidity does it  
get contrails?

$$G \cdot t + G_0 = P \cdot E_w(t)$$

$$P = \frac{G \cdot t + G_0}{E_w(t)}$$

exact approach  
with Solver

to be limited: If:

$$Gt + G_0 < 0 \Rightarrow P < 0\% \downarrow$$

$$t > t_{SAC} \Rightarrow P > 100\% \downarrow$$

$$t_{SAC, 100} = t_{SAC} \quad \text{from tangent and Solver}$$

$$Gt + G_0 = 0 \quad 0\% \text{ relative humidity}$$

$$t_{SAC, 0} = t = -\frac{G_0}{G}$$

$$\text{Def.: } \Delta t_{tot} = t_{SAC, 100} - t_{SAC, 0}$$

} all functions  
of altitude

Experience shows:

$$H_{SAC} = a_H \cdot t_{SAC} + b_H$$

Regression from SAD

$$(a) \quad \Delta t_{tot} = a_{tot} \cdot H + b_{tot}$$

———— " ————

Moving down to lower temperatures from  $H_{SAC}$   
requires only less rel. humidity,  $P$  for contrails

$$(1) \quad \Delta P = a_t(H) \cdot \Delta t^{b_t}$$

Regression from SAD

For  $\Delta P = 1$  (going to  $P = 0\%$ ):

$$(2) \quad a_t(H) = \frac{1}{\Delta t_{tot}^{b_t}}$$

$\Delta t_{tot}$  from (a) or (b).

(a): simpler, sufficient.

$$(3) \quad \Delta t = t_{SAC} - t$$

From  $H_{SAC} = a_H \cdot t_{SAC} + b_H$  follows:

$$(4) \quad t_{SAC} = \frac{H_{SAC} - b_H}{a_H}$$

Combining (1) with (2), (3), (4):

$$(5) \quad \Delta p = \frac{1}{\Delta t_{tot}^{b_t}} \left[ \frac{H_{SAC} - b_H}{a_H} - t \right]^{b_t} \quad \begin{array}{l} \text{approximation} \\ \pm 4\% \text{ points} \\ \text{deviation in} \\ \text{rel. humidity} \end{array}$$

$$p = 1 - \Delta p$$

ICAO temperature is written in this form:

$$t = t_0 - L \cdot H$$

The saturation temperature is likewise from SAC:

$$t_{SAC} = t_{SAC,100} = t_{SAC,0,100} - L_{SAC,100} \cdot H$$

Similar also regression from SAC:

$$t_{SAC,0} = t_{SAC,0,0} - L_{SAC,0} \cdot H$$

Based on the definition of  $\Delta t_{tot}$  another eq.:

$$(b) \quad \Delta t_{tot} = t_{SAC,0,100} - t_{SAC,0,0} - (L_{SAC,100} - L_{SAC,0}) \cdot H_{SAC}$$

### Constructing a SAD with Iso-Lines of rel. humidity, $P$

From (1)  $\Delta P = a_t(H) \cdot \Delta t^{b_t}$ ;  $\Delta P = 1 - P$

$$\Delta t = \left[ \frac{\Delta P}{a_t(H)} \right]^{1/b_t}$$

### Intersections of the temperature $t = f(H)$ with the Lines $t_{SAC,100} = f(H)$ and $t_{SAC,0} = f(H)$

- a) Intersections in the troposphere  
(Now generalised for the 0% or 100% Lines)

$$t_{SAC} = t_{SAC,0} - L_{SAC} \cdot H = t_0 - L \cdot H$$

$$LH - L_{SAC}H = t_0 - t_{SAC,0}$$

$$H = \frac{t_0 - t_{SAC,0}}{L - L_{SAC}}$$

- b) Intersections in the stratosphere

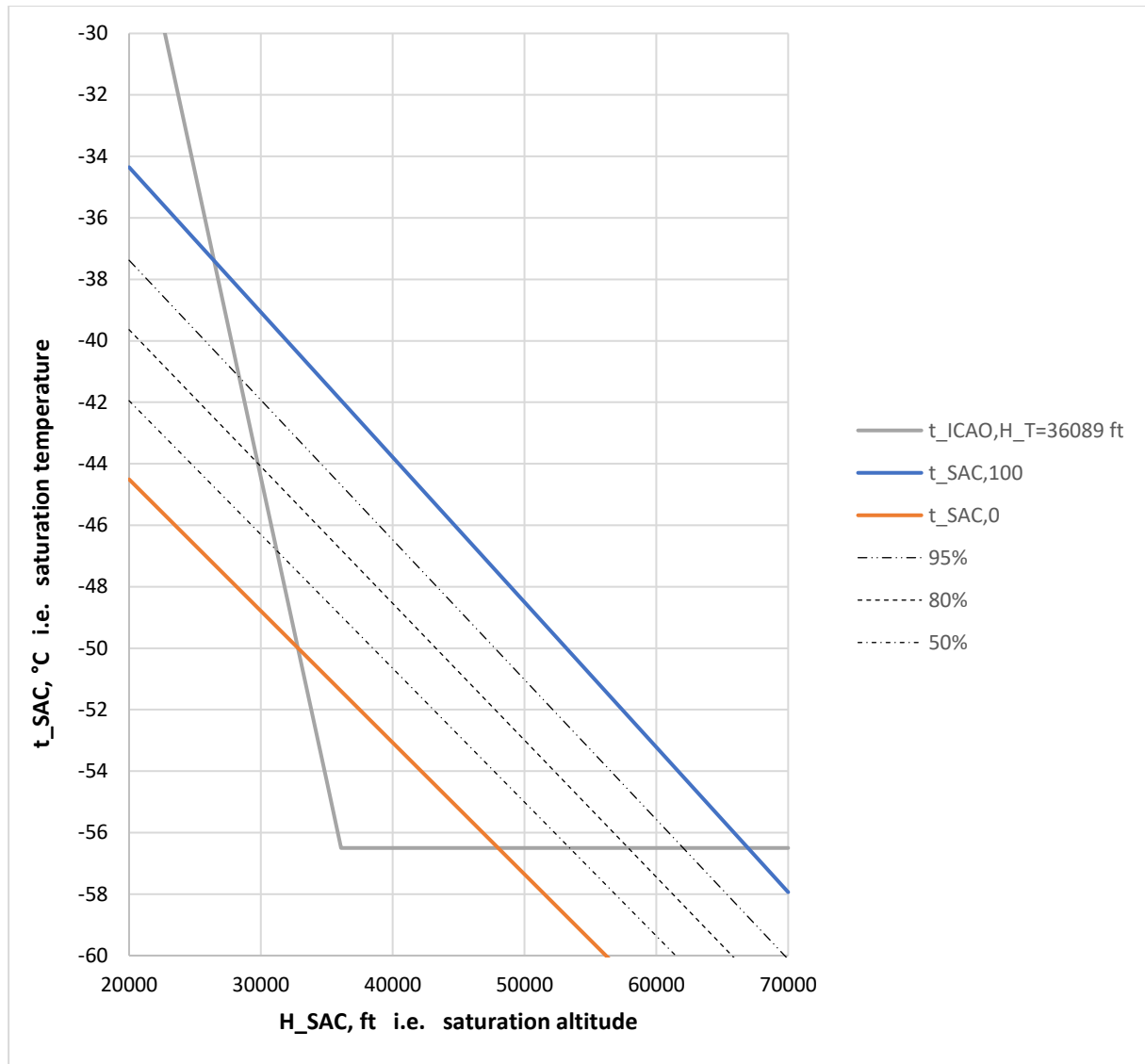
$$t_T = t_{SAC,0} - L_{SAC} \cdot H$$

$$H = \frac{t_{SAC,0} - t_T}{L_{SAC}}$$

These equations are only the summary.

Find further details in the Excel file: <https://purl.org/aero/SAC>

Perform your own calculations with the Excel file!



**Bild 10:** Schmidt-Appleman-Diagram from own calculation (<https://purl.org/aero/SAC>)

# Analytische, numerische, iterative und approximativ-analytische Lösung der Schmidt-Appleman-Temperatur, $t_{sAC}$

Die Gleichung (Bild 6) zur Berechnung der Tangente der Mischgeraden und die Sättigungskurve kann auf (mindestens) drei unterschiedliche Arten gelöst werden:

- 1.) Die analytische Lösung ist möglich mit der Lambert-W-Funktion.
- 2.) Die Gleichung kann mit jedem numerische Lösungsverfahren zur Berechnung von Nullstellen gelöst werden.
- 3.) Die Gleichung kann iterativ und somit auch beliebig genau gelöst werden.
- 4.) Die Gleichung kann mit einer Näherungsgleichung gelöst werden, die als Trendlinie der Werte im üblichen Anwendungsbereich ermittelt wurde.

## 1 Analytische Lösung

Eine Lösung ist möglich mit der Lambert-W-Funktion (Lambertsche W-Funktion). Siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsche\\_W-Funktion](https://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsche_W-Funktion). Die Funktion ist in mathematischer Software enthalten, nicht aber in Excel. Eine einfache VBA-Funktion kann bezogen und in Excel implementiert werden. Diese Funktion arbeitet iterativ. Die Lösung ist also nur scheinbar exakt und analytisch. Der Aufwand ist deutlich höher als mit der Näherungsgleichung.

### Herleitung mit ChatGPT

#### 1. Start with the equation

$$\frac{abc e^{\frac{bt}{c+t}}}{(c+t)^2} = G.$$

Define

$$x := c + t \Rightarrow t = x - c,$$

so the exponent becomes

$$\frac{bt}{c+t} = \frac{b(x-c)}{x} = b \left[ \frac{x-c}{x} \right] = b \left[ 1 - \frac{c}{x} \right] = b - \frac{bc}{x}.$$

Thus

$$e^{\frac{bt}{c+t}} = e^b e^{-\frac{bc}{x}}.$$

Plugging into the original equation:

$$\frac{abc e^b e^{-\frac{bc}{x}}}{x^2} = G.$$

Rearrange:

$$e^{-\frac{bc}{x}} = \frac{x^2 G}{abc e^b}.$$

## 2. Make the substitution to get a Lambert-W friendly form

Let

$$y := -\frac{bc}{x} \Rightarrow x = -\frac{bc}{y}.$$

Compute the pieces:

- $e^{-\frac{bc}{x}} = e^y,$
- $x^2 = \frac{b^2 c^2}{y^2}.$

Substitute into the rearranged equation:

$$e^y = \frac{(b^2 c^2 / y^2) G}{abc e^b} = \frac{bc G}{ae^b} \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Multiply both sides by  $y^2$ :

$$y^2 e^y = \frac{bc G}{ae^b}.$$

Define the right-hand side as a constant

$$K := \frac{bc G}{ae^b}.$$

So we have the compact equation

$$y^2 e^y = K.$$

## 3. Convert to a standard Lambert-W form

Notice

$$y^2 e^y = (ye^{y/2})^2.$$

So take square roots (remember the  $\pm$ ):

$$ye^{y/2} = \pm \sqrt{K}.$$

Let  $u := y/2$ . Then  $y = 2u$  and the equation becomes

$$(2u)e^u = \pm\sqrt{K} \Rightarrow ue^u = \pm\frac{\sqrt{K}}{2}.$$

Now apply the Lambert W inverse: if  $ue^u = z$  then  $u = W(z)$ . Thus

$$u = W\left(\pm\frac{\sqrt{K}}{2}\right).$$

Return to  $y = 2u$ :

$$y = 2 W\left(\pm\frac{\sqrt{K}}{2}\right).$$

#### 4. Return to $t$

Recall  $x = -\frac{bc}{y}$  and  $t = x - c$ . Therefore

$$x = -\frac{bc}{2 W\left(\pm\frac{\sqrt{K}}{2}\right)}, \quad t = x - c = -c - \frac{bc}{2 W\left(\pm\frac{\sqrt{K}}{2}\right)}.$$

Substitute back the definition  $K = \frac{bcG}{ae^b}$ . The final closed form is

$$t = -c - \frac{bc}{2 W\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bcG}{ae^b}}\right)}$$

#### 5. Remarks about the $\pm$ and the branches

- The  $\pm$  comes from taking the square root of  $y^2 e^y = K$ . Both signs must be considered.
- The **Lambert W function is multi-valued**. For real arguments  $z$  in the interval  $[-1/e, 0)$  there are **two real branches**:
  - the principal branch  $W_0(z)$  (gives values  $\geq -1$ ),
  - the lower branch  $W_{-1}(z)$  (gives values  $\leq -1$ ).
- For each choice of the  $\pm$  sign you must consider the appropriate branch(es) of  $W$  to obtain real solutions. In practice:
  - Evaluate the inside argument  $s := \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bcG}{ae^b}}$ .
  - If  $s$  is negative and  $s \in [-1/e, 0)$  then both  $W_0(s)$  and  $W_{-1}(s)$  are real and may yield different real  $t$ .
  - If  $s$  is positive, only  $W_0(s)$  is real.
- For your numeric parameters you found  $s$  is a small negative number; the physically reasonable root corresponded to using the **minus sign** and the  **$W_{-1}$  branch** (numerical value  $W_{-1}(s) \approx -7.008$ ), giving  $t \approx -43.936$ .

## 6. Quick numeric check with typical contrail parameters

With

$$a = 611.2, b = 17.62, c = 243.12, G = 1.354,$$

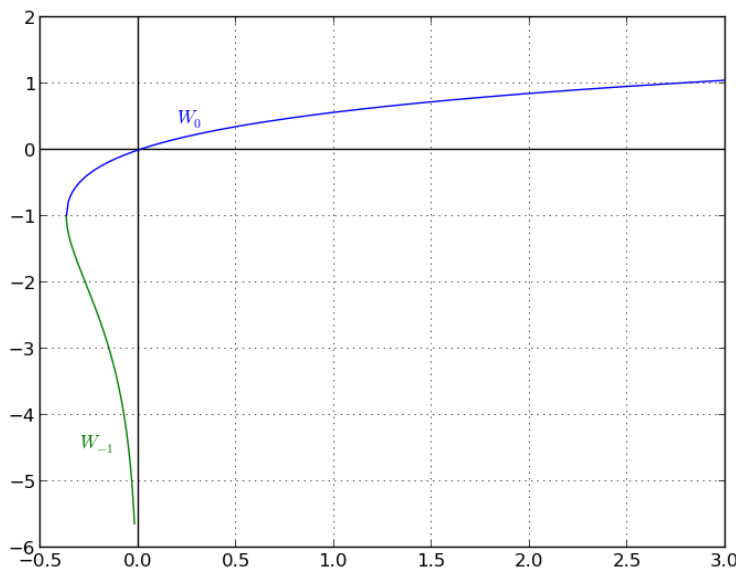
compute

$$K = \frac{bcG}{ae^b}, s = -\frac{1}{2}\sqrt{K}.$$

Then evaluate  $W_{-1}(s)$  and plug into the boxed formula. That yields the root  $t \approx -43.936$ .

Die praktische Lösung für die Zahlenwerte bei Kondensstreifen wird also erhalten mit dem negativen Vorzeichen in der Klammer und Lambert-W-Funktion:  $W_{-1}$  (Bild 10). Der Wert in der Klammer ist der Funktionswert für die Lambert-W-Funktion.

$$t = -c - \frac{bc}{2W_{-1}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bcG}{ae^b}}\right)}$$



**Bild 10:** Die zwei reellen Zweige der Lambert-W-Funktion:  $W_{-1}$  und  $W_0$ . Stephan Kulla, CC BY, [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram\\_of\\_the\\_real\\_branches\\_of\\_the\\_Lambert\\_W\\_function.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_the_real_branches_of_the_Lambert_W_function.png)

Die Excel Tabelle enthält eine Funktion  $y = W(x)$ . Diese Funktion  $W(x)$  hat den Namen `LambertW(x; branch)`

- x ist der Funktionswert.
- branch = -1 für den Funktionsteil  $W_{-1}$ .
- branch = 0 für den Funktionsteil  $W_0$ .

Dies ist die **LamberW-Funktion in VBA für Excel**:

---

```

Function LambertW(x As Double, Optional branch As Integer = 0) As Double
    Dim w As Double, wPrev As Double, tol As Double, i As Integer
    tol = 0.0000000000001
    ' Initial guess
    If branch = -1 Then
        w = Log(-x)
    Else
        w = x
    End If
    For i = 1 To 100
        wPrev = w
        w = w - (w * Exp(w) - x) / ((w + 1) * Exp(w) - (w + 2) * (w * Exp(w) - x) / (2 * w + 2))
        If Abs(w - wPrev) < tol Then Exit For
    Next i
    LambertW = w
End Function

```

---

Please see also the Excel-Tabelle: <https://purl.org/aero/SAC> .

## 2 Numerische Lösung

The **Excel solver** uses by default a gradient based method, which is suitable for this type of problem.

The GRG Nonlinear Solving Method for nonlinear optimization uses the Generalized Reduced Gradient (GRG2) code, which was developed by Leon Lasdon, University of Texas at Austin, and Alan Waren, Cleveland State University, and enhanced by Frontline Systems, Inc.

## 3 Iterative Lösung

Task is to solve for  $t$  in the equation

$$\frac{abc e^{\frac{bt}{c+t}}}{(c+t)^2} - G = 0$$

**Step 1: Rewrite the equation for clarity**

$$\frac{abc}{(c+t)^2} e^{\frac{bt}{c+t}} = G$$

or

$$e^{\frac{bt}{c+t}} = \frac{G(c+t)^2}{abc}$$

Taking natural logarithms on both sides

$$\frac{bt}{c+t} = \ln\left(\frac{G(c+t)^2}{abc}\right) .$$

This is **still implicit** in  $t$ .

**Step 2: Introduce a substitution (will be reverted later, see below)**

Let  $x = c + t$ . Then  $t = x - c$ , and

$$\frac{b(x-c)}{x} = \ln\left(\frac{Gx^2}{abc}\right)$$

$$b\left(1 - \frac{c}{x}\right) = \ln\left(\frac{Gx^2}{abc}\right)$$

$$b - \frac{bc}{x} = \ln\left(\frac{Gx^2}{abc}\right)$$

$$\frac{bc}{x} = b - \ln\left(\frac{Gx^2}{abc}\right)$$

$$x = \frac{bc}{b - \ln\left(\frac{Gx^2}{abc}\right)} .$$

This gives an **iterative formula** to solve for  $x$  (and then  $t = x - c$ ).

**Step 3: Re-introduce  $t$  to obtain the final iterative formula**

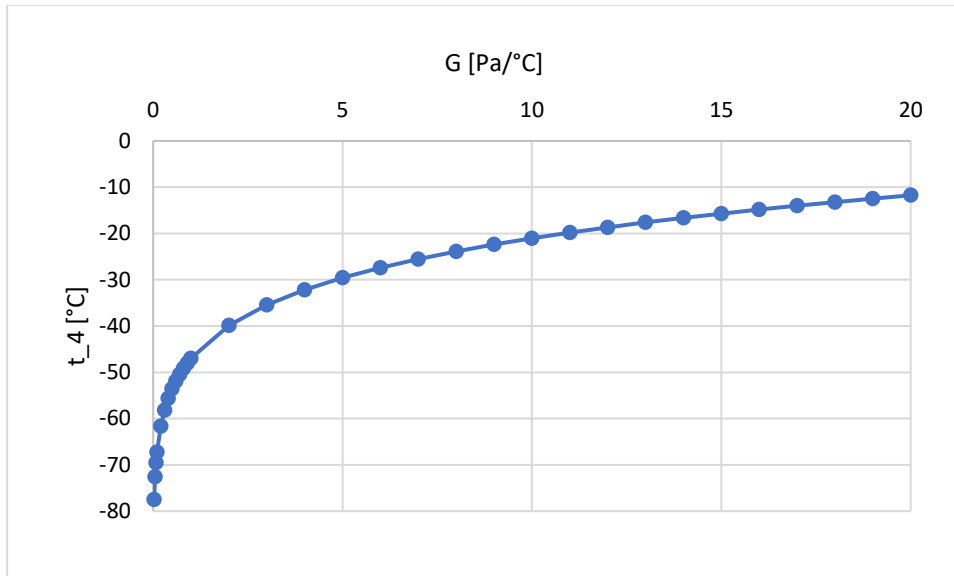
$$t = x - c$$

$$t_{n+1} = \frac{bc}{b - \ln\left(\frac{G(c+t_n)^2}{abc}\right)} - c$$

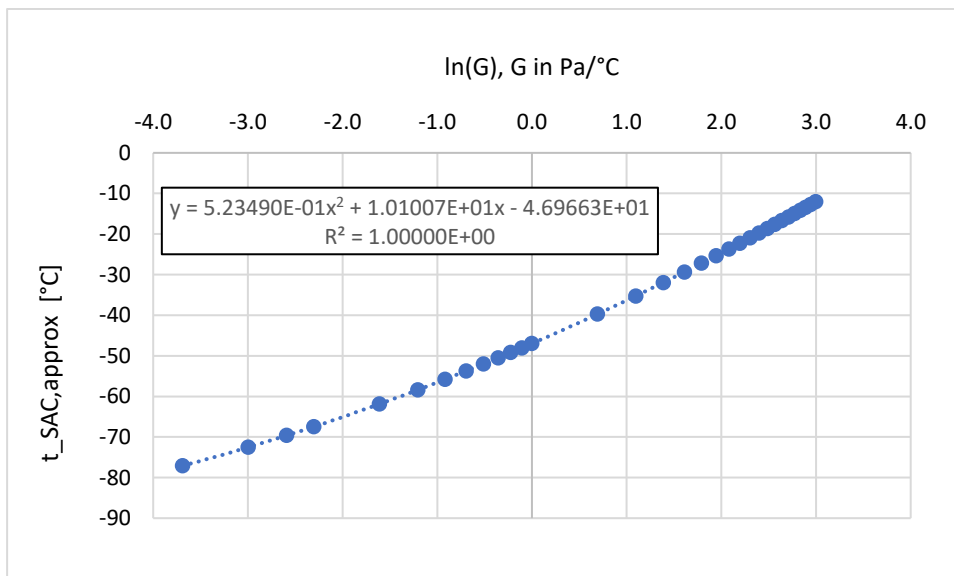
It turns out that a sufficient accuracy (+/- 0.5 °C) can be obtained with **only about four iterations**.

## 4 Approximative-analytische Lösung

The equation is solved iteratively with four iterations (Figure 11).



**Figure 11:** The Schmidt-Appleman Temperature solved iteratively with four iterations. It is a log-type function in  $G$ .



**Figure 12:** The Schmidt-Appleman Temperature plotted as a function of  $\ln(G)$  and its very good approximation with a trendline obtained as second order polynomial.

The approximate equation (from Figure 12) to solve for the Schmidt-Appleman Temperature:

$$t_{SAC} = 0.52349 \ln(G)^2 + 10.1007 \ln(G) - 46.9663$$

Please see the Excel-Tabelle for details of the generation of this approximate equation:

<https://purl.org/aero/SAC> .

# Parameter der Luftfeuchtigkeit und Umrechnungen

## 1 Spezifischer Wassergehalt der Luft

**Englisch:** *specific humidity*

**Definition:**

Der spezifische Wassergehalt  $q$  gibt an, **wie viel Masse an Wasserdampf** in einem feuchten Luftgemisch enthalten ist, **bezogen auf die Gesamtmasse der feuchten Luft** (also trockene Luft + Wasserdampf).

$$q = \frac{m_w}{m_t} = \frac{m_w}{m_w + m_d}$$

mit

- $m_w$ : Masse des Wasserdampfs
- $m_d$ : Masse der trockenen Luft
- $m_t$ : Gesamtmasse der feuchten Luft

**Einheit:** kg Wasserdampf / kg feuchte Luft

## 2 Wasserdampf-Mischungsverhältnis

**Englisch:** *mixing ratio* oder *humidity ratio*

**Definition:**

Das Mischungsverhältnis  $r$  beschreibt die **Masse des Wasserdampfs bezogen auf die Masse der trockenen Luft**.

$$w = \frac{m_w}{m_d}$$

**Einheit:** kg Wasserdampf / kg trockene Luft

**Zusammenhang mit spezifischem Wassergehalt:**

Beide Größen sind eng verwandt. Es gilt:

$$q = \frac{w}{1 + w}$$

und umgekehrt

$$w = \frac{q}{1 - q}$$

Für typische atmosphärische Bedingungen (kleine  $w$ ) sind  $q$  und  $w$  nahezu gleich.

### 3 Relative Feuchte

**Englisch:** *relative humidity*

**Definition:**

Die relative Feuchte  $\varphi$  (oft in %) gibt an, **wie viel Wasserdampf die Luft im Verhältnis zur maximal möglichen Menge bei gleicher Temperatur enthält.**

$$\varphi = \frac{e}{e_s} \times 100\%$$

mit

- $e$ : aktueller Dampfdruck
- $e_s$ : Sättigungsdampfdruck bei gleicher Temperatur

**Einheit:** %

### Vergleich (Übersicht)

| Größe                            | Sym-<br>bol | Definition                                               | Bezug            | Ein-<br>heit | Eng-<br>lisch                | Bemerkung                                                             |
|----------------------------------|-------------|----------------------------------------------------------|------------------|--------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| <b>Spezifischer Wassergehalt</b> | $q$         | Masse Wasserdampf /<br>Masse feuchte Luft                | Gesamt-<br>luft  | kg/kg        | <i>specific<br/>humidity</i> | Physikalisch exakt, kon-<br>servativ bei adiabati-<br>schen Prozessen |
| <b>Mischungs-<br/>verhältnis</b> | $w$         | Masse Wasserdampf /<br>Masse trockene Luft               | Trockene<br>Luft | kg/kg        | <i>mixing<br/>ratio</i>      | In Meteorologie oft be-<br>vorzugt                                    |
| <b>Relative<br/>Feuchte</b>      | $\varphi$   | Verhältnis tatsächli-<br>cher zu maximaler<br>Dampfdruck | Dampf-<br>druck  | %            | <i>relative<br/>humidity</i> | Abhängig von Tempera-<br>tur; kein Maß für abso-<br>lute Feuchte      |

### 4 Beziehung zwischen Mischungsverhältnis, $w$ und Dampfdruck, $e$

Aus der idealen Gasgleichung und den molaren Massen folgt (siehe unten "Herleitung: Mischungsverhältnis aus Dampfdruck"):

$$w = \varepsilon \cdot \frac{e}{p - e} ,$$

mit

- $\varepsilon = 0,622$  = Verhältnis der molaren Massen ( $\text{H}_2\text{O}$  / trockene Luft),
- $e$  = Dampfdruck (*vapor pressure*),
- $p$  = Gesamtdruck (*total pressure*).

Daraus folgt die Umkehrung:

$$e = \frac{w p}{w + \varepsilon} .$$

### Herleitung: Mischungsverhältnis aus Dampfdruck

$$w = \varepsilon \cdot \frac{e}{p - e}$$

#### a) Ausgangspunkt: Ideale Gasgleichung (ideal gas law)

Für jede Gaskomponente gilt lokal (pro Volumen):

$$p_i = \rho_i R_i T$$

mit

- $p_i$  = Partialdruck der Komponente (Pa) — *partial pressure*
- $\rho_i$  = Dichte der Komponente ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) — *density*
- $R_i$  = spezifische Gaskonstante der Komponente ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) — *specific gas constant*
- $T$  = Temperatur (K) — *temperature*

Für Wasserdampf (water vapor) gilt also:

$$e = \rho_w R_w T$$

wobei  $e$  der Dampfdruck (*vapor pressure*) ist.

Für die trockene Luft (dry air) gilt für den Partialdruck  $p_d = p - e$ :

$$p - e = \rho_d R_d T.$$

#### b) Definition des Mischungsverhältnisses $w$ (mixing ratio / humidity ratio)

Das Mischungsverhältnis ist die **Masse des Wasserdampfs bezogen auf die Masse der trockenen Luft** (kg/kg). Pro Volumen ist das Verhältnis der Massen gleich dem Verhältnis der Dichten:

$$w = \frac{m_w}{m_d} = \frac{\rho_w}{\rho_d} .$$

Setze die Dichten aus den idealen Gasgleichungen ein:

$$\rho_w = \frac{e}{R_w T}, \rho_d = \frac{p - e}{R_d T}.$$

Somit

$$w = \frac{\rho_w}{\rho_d} = \frac{\frac{e}{R_w T}}{\frac{p - e}{R_d T}} = \frac{e}{R_w} \cdot \frac{R_d}{p - e} = \frac{R_d}{R_w} \cdot \frac{e}{p - e}.$$

### c) Verbindung zu den molaren Massen (molar masses)

Die spezielle Gaskonstante eines Gases hängt von der universellen Gaskonstanten  $R$  und der molaren Masse  $M$  ab:

$$R_i = \frac{R}{M_i}.$$

Daraus folgt

$$\frac{R_d}{R_w} = \frac{R/M_d}{R/M_w} = \frac{M_w}{M_d} = \varepsilon,$$

wobei man in der Meteorologie üblicherweise schreibt

$$\varepsilon \equiv \frac{M_w}{M_d} \approx \frac{18,016 \text{ g}}{28,965 \text{ g}} \frac{\text{/mol}}{\text{/mol}} \approx 0,622.$$

(Englisch:  $\varepsilon$  = ratio of molar masses of water vapor to dry air.)

Setzt man  $\frac{R_d}{R_w} = \varepsilon$  in die Formel für  $w$  ein, erhält man die bekannte Beziehung:

$$\boxed{w = \varepsilon \frac{e}{p - e}} \quad \text{mit } \varepsilon \approx 0,622.$$

(Englisch:  $w = \varepsilon \frac{e}{p - e}$  — *mixing ratio* expressed via vapor pressure  $e$  and total pressure  $p$ .)

---

## 5 Beziehung zwischen spezifischen Wassergehalt, $q$ auf relative Feuchte, $\varphi$

Die relative Feuchte  $\varphi$  (*relative humidity*) ist definiert als

$$\varphi = \frac{e}{e_s},$$

wobei  $e_s$  der **Sättigungsdampfdruck** (*saturation vapor pressure*) bei der gegebenen Temperatur ist.

Kombination aller Gleichungen:

Setze  $e = \frac{wp}{w+\varepsilon}$  in die obige Gleichung ein, und ersetze  $w = \frac{q}{1-q}$

$$\varphi = \frac{1}{e_s} \cdot \frac{wp}{w+\varepsilon} = \frac{p}{e_s} \cdot \frac{\frac{q}{1-q}}{\frac{q}{1-q} + \varepsilon}.$$

Nach etwas Umformen

$$\boxed{\varphi = \frac{p}{e_s} \cdot \frac{q}{q + \varepsilon(1 - q)}}$$

Das ist die **allgemeine Umrechnungsformel** von **spezifischem Wassergehalt**  $q$  zu **relativer Feuchte**  $\varphi$ .

**Umkehrung nach  $q = f(\varphi)$ .**

Wir lösen die Gleichung nach  $q$  auf.

Ausgangsgleichung:

$$\varphi = \frac{p}{e_s} \cdot \frac{q}{q + \varepsilon(1 - q)}$$

Zuerst umstellen:

$$\frac{\varphi e_s}{p} = \frac{q}{q + \varepsilon(1 - q)}$$

Multipliziere beide Seiten mit dem Nenner:

$$\frac{\varphi e_s}{p} [q + \varepsilon(1 - q)] = q$$

Jetzt ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi e_s}{p} [\varepsilon + q(1 - \varepsilon)] &= q \\ \frac{\varphi e_s}{p} \varepsilon + \frac{\varphi e_s}{p} q(1 - \varepsilon) &= q \end{aligned}$$

Alle Terme mit  $q$  auf eine Seite:

$$q - \frac{\varphi e_s}{p} q(1 - \varepsilon) = \frac{\varphi e_s}{p} \varepsilon$$

Faktoriere  $q$ :

$$q \left[ 1 - \frac{\varphi e_s}{p} (1 - \varepsilon) \right] = \frac{\varphi e_s}{p} \varepsilon$$

Und schließlich nach  $q$  auflösen:

$$q = \frac{\varepsilon \varphi \frac{e_s}{p}}{1 - (1 - \varepsilon) \varphi \frac{e_s}{p}}$$

## 6 Beziehung zwischen Mischungsverhältnis, $w$ und relativer Feuchte, $\varphi$

### Beziehung zwischen $w$ und $\varphi$

Wir setzen  $e = \varphi e_s$  in die Formel (siehe oben) für  $w$  ein

$$w = \varepsilon \frac{\varphi e_s}{p - \varphi e_s} .$$

Das ist die **direkte Beziehung**, mit der du das Mischungsverhältnis aus der relativen Feuchte berechnest:

$$w = \varepsilon \frac{\varphi e_s(T)}{p - \varphi e_s(T)}$$

### Umkehrung (relative Feuchte aus $w$ )

Wenn du stattdessen  $\varphi$  aus  $w$  berechnen möchtest, löse nach  $\varphi$  auf:

$$w = \varepsilon \frac{\varphi e_s}{p - \varphi e_s}$$

Multipliziere beide Seiten mit dem Nenner:

$$w(p - \varphi e_s) = \varepsilon \varphi e_s$$

$$wp = \varphi e_s(w + \varepsilon)$$

Daraus folgt:

$$\varphi = \frac{w p}{e_s(T) [w + \varepsilon]}$$

## 7 Beziehung zwischen spezifischen Wassergehalt, $q$ und Dampfdruck, $e$

Aus den Definitionen ist bekannt:

- Spezifischer Wassergehalt

$$q = \frac{m_w}{m_d + m_w}$$

- Mischungsverhältnis

$$w = \frac{m_w}{m_d}$$

Verbindung:

$$q = \frac{w}{1 + w} \text{ und umgekehrt } w = \frac{q}{1 - q} .$$

### Beziehung zwischen $w$ und $e$

Nach der idealen Gasgleichung für ein Gasgemisch gilt:

$$w = \varepsilon \frac{e}{p - e},$$

mit

- $e$ : Dampfdruck (vapor pressure)
- $p$ : Gesamtdruck (total air pressure)
- $\varepsilon = \frac{M_w}{M_d} = 0.622$ : Verhältnis der molaren Massen von Wasser und trockener Luft.

Setze  $w = \frac{q}{1 - q}$  ein

$$\frac{q}{1 - q} = \varepsilon \frac{e}{p - e} .$$

Wir wollen  $q$  als Funktion von  $e$  ausdrücken.

**Schrittweise Umformung:**

$$q(p - e) = \varepsilon e(1 - q)$$

$$qp - qe = \varepsilon e - \varepsilon eq$$

Alle  $q$ -Terme auf eine Seite:

$$qp - qe + \varepsilon eq = \varepsilon e$$

Faktorisieren  $q$ :

$$q(p - e + \varepsilon e) = \varepsilon e$$

$$q = \frac{\varepsilon e}{p - e + \varepsilon e}$$

Ergebnis:

$$q = \frac{\varepsilon e}{p - (1 - \varepsilon) e}$$

**Umkehrfunktion —  $e$  aus  $q$** 

Wir lösen die vorige Gleichung nach  $e$  auf. Aus

$$q = \frac{\varepsilon e}{p - e + \varepsilon e}$$

multiplizieren wir mit dem Nenner:

$$q(p - e + \varepsilon e) = \varepsilon e$$

$$qp - qe + q\varepsilon e = \varepsilon e$$

$$qp = e[\varepsilon + q(1 - \varepsilon)]$$

$$e = \frac{qp}{\varepsilon + q(1 - \varepsilon)}$$

## 8 Überblick über die Umrechnungen

|           | $q$ | $w$ | $\varphi$ | $e$ |
|-----------|-----|-----|-----------|-----|
| $q$       | x   | 2   | 5         | 7   |
| $w$       | 2   | x   | 6         | 4   |
| $\varphi$ | 5   | 6   | x         | 3   |
| $e$       | 7   | 4   | 3         | x   |

Die Nummern geben die Abschnitte an, in denen die Umrechnungsformeln stehen.

|   |           |                                                            |     |   |
|---|-----------|------------------------------------------------------------|-----|---|
| 7 |           |                                                            |     | 6 |
|   | $q$       | 2                                                          | $w$ |   |
|   | 5         | 7: $q \Leftrightarrow e$<br>6: $w \Leftrightarrow \varphi$ | 4   |   |
|   | $\varphi$ | 3                                                          | $e$ |   |
| 6 |           |                                                            |     | 7 |

Die Nummern in den Kästen, die Parameter verbinden, geben die Abschnitte an, in denen die Umrechnungsformeln stehen.

# Herleitung der Steigung, $G$ der Mischgeraden

## 1 Ausgangspunkt: Mischgerade in T–w-Diagramm

Wir betrachten ein „Paket“ von 1 kg trockener Luft, in dem eine kleine Masse Kraftstoff  $m_f$  verbrannt wird im Verhältnis  $\mu = \frac{m_f}{m_d}$  kg Kraftstoff (fuel) pro kg trockener (dry) Luft verbrannt wird.

Notation (wie gewünscht):  $EI_{H_2O}$  = Emissionsindex für  $H_2O$  (Masse  $H_2O$  pro kg Kraftstoff).  $Q$  = Heizwert / Energie pro kg Kraftstoff ( $J \cdot kg^{-1}$ ).  $c_p$  = spezifische Wärmekapazität (bezogen auf 1 kg trockene Luft) ( $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ).  $w_\infty$  = ursprüngliches Mischungsverhältnis der Umgebung (kg  $H_2O$  pro kg trockene Luft).  $T_\infty$  = Umgebungstemperatur.

1. Wasserdampf-Mischungsverhältnis des reinen Abgas-/Plume-Elements (nach Verbrennung, vor Abkühlung):

$$w_E = w_\infty + \mu EI_{H_2O}$$

(weil pro 1 kg trockener Luft die Anfangsfeuchte  $w_\infty$  da war und zusätzlich  $\mu \cdot EI_{H_2O}$  kg  $H_2O$  durch Verbrennung dazukommen).

2. Temperaturerhöhung des Pakets (vereinfachend: gesamte freigesetzte Energie geht in Erwärmung eines auf 1 kg trockener Luft normierten Systems; kleine-Korrekturen durch zusätzliche Massen werden weiter unten erwähnt):

$$T_E - T_\infty \approx \frac{\mu Q}{c_p}.$$

Mit Einbeziehung des **Wirkungsgrades**  $\eta$  des Triebwerks, der den Teil der chemischen Energie  $Q$  beschreibt, der in Wärme umgesetzt wird:

$$T_E - T_\infty = \frac{\mu Q(1 - \eta)}{c_p}.$$

3. Mischgerade-Steigung,  $G_w$  (Definition)

$$G_w = \frac{T_E - T_\infty}{w_E - w_\infty} = \frac{\frac{\mu Q(1 - \eta)}{c_p}}{\mu EI_{H_2O}} = \frac{Q(1 - \eta)}{c_p EI_{H_2O}}.$$

Das ist die kompakte und wichtige Beziehung — **die Abhängigkeit von  $\mu$  fällt weg**, d.h. die Steigung der Mischgeraden ist (unter den getroffenen Annahmen) unabhängig vom konkreten Treibstoff-Luft-Verhältnis und hängt nur von  $Q$ ,  $c_p$  und  $EL_{H_2O}$  ab.

- Die vereinfachte Formel setzte u. a. voraus, dass die zusätzliche Masse (Kraftstoff+Produkte) die effektive Wärmekapazität nicht stark ändert. Eine genauere Form (inkl. Massenkorrektur) lautet:

$$G_w = \frac{\mu Q(1 - \eta)}{c_p (1 + \mu + w_\infty + \mu EL_{H_2O})}$$

Dazu muss  $w_\infty$  ausgerechnet werden. Siehe dazu die Gleichung weiter unten. Dazu müsste aber auch  $\mu$  bekannt sein. Wir wollen diesen weiteren Parameter nicht einführen. Daher wird diese Gleichung nicht verwendet.

## 2 Die gängige Form für die Steigung der Mischgerade im Dampfdruck-(e) – T-Diagramm

### a) Ausgangsgleichung

Der Zusammenhang zwischen Mischungsverhältnis  $w$  (kg H<sub>2</sub>O / kg trockene Luft) und Dampfdruck  $e$  ist

$$w = \epsilon \frac{e}{p - e}.$$

### b) Umstellen nach $e$ (Schritt-für-Schritt)

- Multipliziere beide Seiten mit  $p - e$ :

$$w(p - e) = \epsilon e.$$

- Auflösen der Klammer auf der linken Seite:

$$wp - we = \epsilon e.$$

- Alle Terme mit  $e$  auf eine Seite bringen:

$$wp = we + \epsilon e = e(w + \epsilon).$$

- Nach  $e$  auflösen:

$$e = \frac{w p}{\epsilon + w}$$

Das ist die explizite Umkehrfunktion  $e(w)$ .

### c) Ableitung $\frac{de}{dw}$

Wir differenzieren  $e(w) = \frac{wp}{\epsilon + w}$  nach  $w$ . Verwende die Quotientenregel:

Sei  $N(w) = pw$ ,  $D(w) = \epsilon + w$ . Dann

$$\frac{de}{dw} = \frac{N'D - ND'}{D^2} = \frac{p(\epsilon + w) - pw \cdot 1}{(\epsilon + w)^2}.$$

Vereinfacht:

$$\frac{de}{dw} = \frac{p \epsilon}{(\epsilon + w)^2}$$

Ein paar Hinweise zu dieser Formel:

- Einheit:  $[de/dw] = \text{Pa} / (\text{kg/kg}) = \text{Pa}$  (weil  $w$  dimensionslos in  $\text{kg/kg}$ ).
- Physikalisch:  $\frac{de}{dw}$  sagt, wie stark der Dampfdruck  $e$  sich ändert, wenn man das Mischungsverhältnis  $w$  ändert, bei konstantem Gesamtdruck  $p$ .

### d) Kehrwert $\frac{dw}{de}$

$$\frac{dw}{de} = \frac{(\epsilon + w)^2}{p \epsilon}$$

Diese Form wird direkt benötigt, wenn man von einer Steigung  $\frac{dT}{dw}$  in  $T$ - $w$ -Koordinaten auf  $\frac{dT}{de}$  in  $T$ - $e$ -Koordinaten umrechnet:

$$\frac{dT}{de} = \frac{dT}{dw} \cdot \frac{dw}{de}.$$

### e) Nützliche Grenzfälle / Näherungen

- Für sehr kleine Feuchte  $w \ll \epsilon$  (typisch in der oberen Troposphäre) gilt  $\epsilon + w \approx \epsilon$ .  
Dann

$$\frac{de}{dw} \approx \frac{p \epsilon}{\epsilon^2} = \frac{p}{\epsilon}, \quad \frac{dw}{de} \approx \frac{\epsilon}{p}.$$

Das erklärt, warum oft der einfache Faktor  $\frac{\epsilon}{p}$  auftaucht.

- Für größere  $w$  muss der vollständige Ausdruck mit  $(\epsilon + w)^2$  verwendet werden.

### f) Ausgangsgleichungen

- Steigung der Mischgeraden im  $T - w$ -Diagramm (aus Energie- und Massenbilanzen):

$$\frac{dT}{dw} = G_w = \frac{Q(1 - \eta)}{c_p \epsilon I_{H_2O}}.$$

(Bei der Herleitung von  $G_w$  wurde für ein „Paket“ 1 kg trockene Luft angenommen; die  $\mu$ -Faktoren heben sich auf.)

### g) Ableitung $de/dw$ (exakt)

Differenzieren von  $e(w)$  nach  $w$  (Quotientenregel):

$$\frac{de}{dw} = \frac{p \epsilon}{(\epsilon + w)^2}.$$

Für die Mischgerade setzt man  $w = w_\infty$  (Umgebungs-mischungsverhältnis) in diesen Faktor ein, da die Umrechnung entlang der Mischkurve an der Umgebungslinie bewertet wird.

### h) Kettenregel: $de/dT$ (exakt)

$$\frac{de}{dT} = \frac{de}{dw} \cdot \frac{dw}{dT} = \frac{de}{dw} \cdot \frac{1}{dT/dw}.$$

Einsetzen von  $\frac{de}{dw}$  und  $\frac{dT}{dw} = G_w$  ergibt die **exakte** Formel:

$$\frac{de}{dT} = \frac{p \epsilon}{(\epsilon + w_\infty)^2} \cdot \frac{c_p E I_{H_2O}}{Q(1 - \eta)}.$$

Das ist die Steigung des Mischstrahls im  $T$ -gegen- $e$ -Diagramm in der Form  $de/dT$  (Einheit:  $\text{Pa} \cdot \text{K}^{-1}$ ) ohne irgendeine Näherung.

**i) Jetzt muss noch  $w_\infty$  berechnet werden!**

### **(1) Relative Feuchte**

$$\varphi = \frac{e}{e_s}$$

mit

- $\varphi$ : relative Feuchte (– oder in %)
- $e$ : aktueller Dampfdruck (vapor pressure)
- $e_s$ : Sättigungsdampfdruck bei der Lufttemperatur (saturation vapor pressure)

Daraus folgt:

$$e = \varphi \cdot e_s$$

### **(2) Mischungsverhältnis (aus separater Herleitung)**

$$w = \epsilon \cdot \frac{e}{p - e}$$

mit

- $\epsilon = 0,622$  (Verhältnis der molaren Massen)
- $p$ : Gesamtdruck (total air pressure, meist etwa 1013 hPa)
- $e$ : Dampfdruck aus Schritt (1)

### **(3) Kombinierte Formel**

Wenn man (1) in (2) einsetzt, ergibt sich:

$$w_\infty = \epsilon \cdot \frac{\varphi e_s(T)}{p - \varphi e_s(T)}$$

Das ist die Formel, um  $w_\infty$  direkt **aus der relativen Feuchte** zu berechnen.

## j) Näherung für feuchtearme (typische troposphärische/hohe Flughöhen) Luft

Für  $w \ll \epsilon$  gilt  $\epsilon + w \approx \epsilon$ , somit

$$\frac{p \epsilon}{(\epsilon + w)^2} \approx \frac{p \epsilon}{\epsilon^2} = \frac{p}{\epsilon}.$$

Einsetzen ergibt die **Näherungsformel**:

$$\frac{de}{dT} \approx \frac{p}{\epsilon} \cdot \frac{c_p E I_{H_2O}}{Q(1 - \eta)}$$

$$\frac{de}{dT} \approx \frac{E I_{H_2O} p c_p}{\epsilon Q(1 - \eta)}$$

Das ist die übliche Gleichung (mit  $\epsilon = 0,622$ ).

## Warum ist die Mischgerade (mit Steigung, $G$ ) eine Gerade?

Tatsächlich ist die „**Mischgerade**“ im  $T$ - $w$ - oder  $T$ - $e$ -Diagramm **keine Naturkonstante**, sondern eine **modellierende Annahme**, die aber auf sehr soliden thermodynamischen Überlegungen beruht.

Lass uns das genau auseinandernehmen:

### 1 Was physikalisch passiert

Wenn sich heiße, feuchte **Abgase** ( $T_E, w_E$ ) mit kalter, trockener **Umgebungsluft** ( $T_\infty, w_\infty$ ) mischen, entstehen unendlich viele mögliche Mischungsverhältnisse — von 100 % Abgas bis 100 % Umgebungsluft.

Wenn man den Massenanteil der heißen Abgase  $r$  nennt (z. B.  $r = 0,1$  bedeutet 10 % Abgas, 90 % Umgebungsluft), gilt bei **idealer, isobarer Mischung** (gleicher Druck  $p$ ):

$$\begin{aligned} T(r) &= r T_E + (1 - r) T_\infty, \\ w(r) &= r w_E + (1 - r) w_\infty. \end{aligned}$$

Diese linearen Mischungsregeln gelten, **wenn keine Phasenänderung** (Kondensation) eintritt und die Mischung **adiabat und isobar** erfolgt.

## 2 Warum daraus eine „Gerade“ entsteht

Trägt man diese beiden Größen gegeneinander auf, also  $T$  auf der y-Achse und  $w$  auf der x-Achse, dann eliminiert man  $r$ :

$$T = T_{\infty} + \frac{T_E - T_{\infty}}{w_E - w_{\infty}} (w - w_{\infty}).$$

Das ist **eine lineare Funktion** von  $w$  mit konstanter Steigung

$$G_w = \frac{T_E - T_{\infty}}{w_E - w_{\infty}}.$$

→ Also: Wenn die Mischung **isobar, adiabatisch und ohne Kondensation** erfolgt, liegt sie tatsächlich auf einer **Geraden** im  $T$ - $w$ -Diagramm.

## 3 Die physikalische Bedeutung der Annahme

Diese Linearität ist keine „zufällige Vereinfachung“, sondern folgt direkt aus zwei Annahmen:

1. **Isobare Mischung:** Druck ändert sich beim Mischen nicht wesentlich (realistisch, da der Strahldruck  $<$  Atmosphärendruck im Nachlauf ist).
2. **Adiabate Mischung:** Keine nennenswerte Wärmeabgabe an die Umgebung (vernünftige Annahme für die sehr kurzen Zeitskalen).

Solange beide gelten und keine Kondensation erfolgt, ist der Verlauf tatsächlich eine Gerade. Erst **ab dem Punkt, wo Kondensation einsetzt**, weicht die Kurve ab (da dann latente Wärme freigesetzt wird).

## 4 Was passiert bei Kondensation?

Sobald die Mischgerade die **Sättigungskurve** im  $T$ - $w$ -Diagramm schneidet, kondensiert Wasserdampf zu flüssigen oder festen Partikeln.

Ab diesem Punkt gilt:

- Die Temperatur sinkt nicht mehr linear, da **latente Wärme** frei wird.
- Die Mischkurve biegt ab und verläuft **entlang der Sättigungslinie**.

Die **Geradenannahme** ist also nur **bis zur Sättigung gültig** — danach muss ein anderer Verlauf angenommen werden.

## 5 In $T$ - $e$ (Dampfdruck)-Darstellung

Da  $e(w)$  nichtlinear ist, wird die Gerade in  $T$ - $e$ -Koordinaten leicht gekrümmt. Die Linearisierung dort (mit einer „effektiven Steigung“  $G_e$ ) ist also tatsächlich eine **Näherung**, die in der Nähe des Umgebungszustands sehr gut funktioniert, weil  $w \ll \epsilon$  und die Nichtlinearität gering ist.

## 6 Fazit

| Punkt                  | Aussage                                                                                                         |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Physikalischer Grund   | Mischung heißer und kalter Luft bei konstantem Druck und ohne Kondensation ergibt lineare $T$ - $w$ -Beziehung. |
| Voraussetzung          | isobar, adiabatisch, kein Phasenübergang.                                                                       |
| Gültigkeit             | bis zur Sättigung, danach nicht mehr (dann folgt die Mischung der Sättigungskurve).                             |
| Im $T$ - $e$ -Diagramm | formal leicht gekrümmt; die „Mischgerade“ dort ist eine linearisierte Näherung.                                 |

## Warum wird die $T$ - $e$ -Darstellung gewählt, wenn die eine weitere Näherung enthält?

Man verwendet die  $T - e$ -Darstellung (Temperatur – Dampfdruck), obwohl sie eine zusätzliche Näherung enthält, weil sie physikalisch unmittelbarer mit der Kondensationsbedingung verknüpft ist.

Lass uns das Schritt für Schritt herleiten – dann wird der Grund klar und nachvollziehbar.

### 1 Was wir physikalisch prüfen wollen

Das **Schmidt-Appleman-Kriterium** fragt:

*Erreicht die Mischung aus Abgas und Umgebungsluft die Sättigung (bzw. Übersättigung) bezüglich Wasser?*

Die Bedingung für Kondensstreifenbildung ist:

$$e_{\text{mix}} = e_s(T_{\text{mix}})$$

also:

der **tatsächliche Dampfdruck der Mischung**  $e_{\text{mix}}$  erreicht oder überschreitet den **Sättigungsdampfdruck**  $e_s$  bei der Mischtemperatur.

Diese Bedingung ist **eine Gleichung zwischen zwei Dampfdrucken** — nicht zwischen Mischungsverhältnissen.

👉 Deshalb ist das  $T - e$ -Diagramm die **natürliche Ebene**, um diese Schnittbedingung geometrisch darzustellen.

## 2 Warum man trotzdem von $w$ ausgeht

Thermodynamisch ist  $w$  einfacher, weil Massenbilanzen linear in  $w$  und  $T$  sind:

$$T = T_\infty + (T_E - T_\infty) r, \quad w = w_\infty + (w_E - w_\infty) r.$$

→ ergibt im  $T - w$ -Diagramm eine **exakt lineare Mischgerade** (solange isobar & adiabatisch).

Also: Die Linearisierung kommt aus der Physik, die  $w$ -Darstellung aus der Bilanz.

## 3 Warum man dann doch $e$ verwendet

Der Sättigungszustand wird nicht durch  $w$ , sondern durch den **Dampfdruck**  $e_s(T)$  bestimmt. Die Kondensationsbedingung lautet:

$$e_{\text{mix}}(T_{\text{mix}}) = e_s(T_{\text{mix}}),$$

nicht

$$w_{\text{mix}}(T_{\text{mix}}) = w_s(T_{\text{mix}}).$$

Daher will man im Diagramm **direkt Dampfdruckgrößen vergleichen**, also:

- die **Mischkurve**  $e_{\text{mix}}(T)$ ,
- und die **Sättigungskurve**  $e_s(T)$ .

Dann ist die Schnittstelle unmittelbar der Punkt, an dem Kondensation beginnen würde.

## 4 Ja, das ist eine zusätzliche Näherung — aber eine kontrollierte

Die Umrechnung  $w \leftrightarrow e$  ist leicht nichtlinear:

$$e = \frac{wp}{\epsilon + w}.$$

In der oberen Troposphäre gilt aber  $w \ll \epsilon$  (z. B.  $w \sim 10^{-4}$ – $10^{-3}$ ,  $\epsilon = 0,622$ ), also ist der Term  $(\epsilon + w) \approx \epsilon$ , und die Nichtlinearität praktisch vernachlässigbar:

$$e \approx \frac{p}{\epsilon} w.$$

Damit ist die „Mischgerade“ im  $T - e$ -Diagramm fast genauso linear wie im  $T - w$ -Diagramm — die zusätzliche Näherung hat kaum Einfluss.

Typischer Fehler durch diese Linearisierung: **unter 0,1 %** bei realistischen Werten in der Tropopause.

## 5 Praktischer Grund in der Forschung und Modellierung

Neben der physikalischen Motivation gibt's einen **praktischen Grund**:

- Der **Sättigungsdampfdruck**  $e_s(T)$  ist eine direkt messbare, tabellierte Größe (Clausius–Clapeyron-Beziehung).
- Viele atmosphärische Modelle (und klassische Diagramme) arbeiten mit  $e$  und  $T$ , nicht mit  $w$ .

→ Die  $T - e$ -Darstellung erlaubt eine **direkte grafische Entscheidung**, ob Kondensstreifenbildung möglich ist:

- Mischungslinie:  $e_{\text{mix}}(T)$  (annähernd linear)
- Sättigungslinie:  $e_s(T)$  (stark gekrümmt)
- Schnittpunkt  $\Rightarrow$  Kondensationsbeginn

## 6 Fazit

| Aspekt                                         | $T - w$ -Darstellung                   | $T - e$ -Darstellung                                   |
|------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| <b>Linearität der Mischung</b>                 | exakt linear (unter iso-bar/adiabat)   | leicht gekrümmt (fast linear, da $w \ll \epsilon$ )    |
| <b>Physikalische Relevanz für Kondensation</b> | indirekt (man muss $w_s(T)$ berechnen) | direkt (Kondensation bei $e = e_s(T)$ )                |
| <b>Praktische Anwendbarkeit</b>                | weniger gebräuchlich in Meteorologie   | Standarddarstellung in Contrail- und Atmosphärenphysik |
| <b>Nähe zur beobachteten Größe</b>             | Mischungsverhältnis (abgeleitet)       | Dampfdruck (messbar, tabelliert)                       |

**Kurz gesagt:**

Man akzeptiert die kleine Näherung bei der Umrechnung  $w \leftrightarrow e$ , weil die  $T - e$ -Darstellung direkt an die physikalisch relevante Kondensationsbedingung anschließt — und die dadurch entstehenden Abweichungen sind in der oberen Troposphäre vernachlässigbar klein.

**Wir benötigen nicht nur die Steigung der Mischgeraden, sondern auch deren Lage im  $e$ - $T$ -Diagramm. Dazu schreiben wir  $G \cdot T + G_0 = RH \cdot e_w(T)$ . Wie können wir  $G_0$  bestimmen?**

Jetzt kommen wir zum **Abfangen der Lage der Mischgeraden im  $T - e$ -Diagramm**, nicht nur deren Steigung  $G$ . Du möchtest die Geradengleichung schreiben als:

$$G \cdot T + G_0 = RH \cdot e_w(T),$$

wobei:

- $G = dT/de$  bzw. ein Faktor, der die Steigung der Mischgeraden beschreibt,
- $G_0$  = Verschiebung / Achsenabschnitt, den wir bestimmen wollen,
- $RH$  = relative Luftfeuchtigkeit (als Bruchzahl),
- $e_w(T)$  = Sättigungsdampfdruck über Wasser bei Temperatur  $T$ .

Lass uns Schritt für Schritt ableiten, wie man  $G_0$  bestimmt.

## **1 Ausgangspunkt: Geradengleichung im $T - e$ -Diagramm**

Die Mischgerade (Mixing Line) kann man in linearer Näherung schreiben als:

$$e_{\text{mix}}(T) = \frac{T - T_{\infty}}{G_e} + e_{\infty}$$

- $T_{\infty}$  = Umgebungstemperatur
- $e_{\infty} = RH \cdot e_w(T_{\infty})$  = Dampfdruck der Umgebungsluft
- $G_e = dT/de$  Steigung der Mischgeraden im  $T - e$ -Diagramm

Hier wird  $e_{\infty}$  auf die tatsächliche Umgebung (rel. Luftfeuchte) bezogen.

## 2 Vergleich mit der Form der Geraden

Du schreibst:

$$G T + G_0 = RH \cdot e_w(T)$$

Wir wollen  $G_0$  so bestimmen, dass die Mischgerade **die Umgebungsbedingungen bei  $T_\infty, e_\infty$**  durchläuft. Das ist die logische Referenzbedingung.

Setze  $T = T_\infty$  und  $RH \cdot e_w(T_\infty) = e_\infty$  in die Gleichung ein:

$$G T_\infty + G_0 = e_\infty$$

## 3 Auflösen nach $G_0$

$$G_0 = e_\infty - G T_\infty = RH \cdot e_w(T_\infty) - G T_\infty$$

Das ist die **exakte Bestimmung von  $G_0$** .

## 4 Physikalische Interpretation

- $G$  bestimmt die **Steigung der Mischgerade** → „wie stark Temperatur mit Dampfdruck zunimmt“
- $G_0$  verschiebt die Gerade nach oben/unten, sodass sie **die Ausgangsbedingungen der Umgebungsluft korrekt trifft**.

Damit hat die Mischgerade sowohl die **richtige Steigung** als auch die **richtige Lage** im  $T - e$ -Diagramm.

**Die Mischgerade ist nur eine Gerade bis zum Kondensationspunkt und folgt dann der Sättigungslinie. Die Geradenannahme ist also nur bis zur Sättigung gültig. Wie passt das zum Geradenverlauf bis zu Umgebungsbedingungen?**

es handelt sich um **zwei unterschiedliche Abschnitte der Mischkurve**, die in der bisherigen Herleitung zusammengefasst werden müssen. Lass uns das Schritt für Schritt klarstellen:

## 1 Mischgerade vor der Kondensation

- Physikalisch mischen heiße Abgase und kalte Umgebungsluft **adiabat und isobar**.
- Dann gilt **lineare Mischung in T–w bzw. T–e**:

$$T_{\text{mix}} = T_{\infty} + r(T_E - T_{\infty}), w_{\text{mix}} = w_{\infty} + r(w_E - w_{\infty}),$$

mit Mischanteil  $r \in [0,1]$ .

- Eliminieren von  $r$  ergibt **eine gerade Linie im T–w- oder T–e-Diagramm**.
- Die Steigung  $G$  und die Lage  $G_0$  bestimmen wir so, dass die Gerade die **Umgebungsbedingungen bei  $r = 0$**  durchläuft.

## 2 Kondensationspunkt

- Kondensation beginnt, wenn die Mischgerade die **Sättigungskurve  $e_s(T)$**  erreicht:

$$e_{\text{mix}}(T_{\text{cond}}) = e_s(T_{\text{cond}}).$$

- Dies ist der **Kondensationspunkt  $T_{\text{cond}}$** .
- Ab hier **ändert sich die Thermodynamik**, weil latente Wärme freigesetzt wird und die Luft nicht mehr trocken ist.
- Die „lineare Mischung“ (Mischgerade) gilt nicht mehr, die Mischkurve folgt nun **der Sättigungskurve  $e_s(T)$** , bis ggf. komplette Mischung stattgefunden hat.

## 3 Auflösung des „Widerspruchs“

- **Vor Kondensation**: die Mischkurve ist exakt linear → Mischgerade.
- **Ab Kondensation**: die Kurve biegt ab → folgt der gekrümmten Sättigungskurve.

**Wichtige Konsequenz für die Geradengleichung  $GT + G_0 = RH \cdot e_w(T)$ :**

- $G, G_0$  definieren **nur die Gerade bis zum Kondensationspunkt**.
- Danach kann man die Gerade formal nicht mehr verlängern, man muss **die tatsächliche Sättigungskurve** nehmen.
- Die Gerade liefert also **Steigung und Startpunkt**, nicht die vollständige Mischungskurve.

## 4 Fazit

- **Gerade:** vom Umgebungszustand bis Kondensationspunkt (linear)
- **Biegung:** ab Kondensationspunkt entlang der Sättigungskurve
- **Keine Widersprüche**, nur zwei Abschnitte der Mischkurve: linear bis Kondensation, gekrümmt danach.
- G und  $G_0$  bestimmen **die Gerade vor Kondensation**.
- Die **tatsächliche Mischkurve** für  $T < T_{\text{cond}}$  muss die physikalische Sättigung berücksichtigen.

**Nach vollständiger Mischung sind die Umgebungsbedingungen  $T_\infty$  und  $e_\infty = RH \cdot e_w(T)$ . Damit liegt der Endpunkt nicht auf der Sättigungskurve (wenn  $RH < 100\%$ ). Wie geht es weiter nachdem der Sättigungskurve gefolgt wurde?**

## 1 Ausgangssituation

- Wir betrachten **Mischung von Abgasen mit Umgebungsluft**.
- Die Mischung verläuft **linear** in  $T$ - $w$  (bzw.  $T$ - $e$ ) bis zum **Kondensationspunkt**.
- Ab dort folgt die Kurve **der Sättigungskurve**, weil beim Überschreiten der Sättigung **Kondensation** auftritt.

## 2 Vollständige Mischung am Endpunkt

- Nach vollständiger Durchmischung gilt:

$$T_{\text{final}} = T_\infty, \quad e_{\text{final}} = e_\infty = RH \cdot e_w(T_\infty)$$

- **Wichtig:**  $RH < 100\% \Rightarrow e_\infty < e_s(T_\infty)$ .
- **Das bedeutet: der Endpunkt liegt unter der Sättigungskurve, nicht darauf.**

## 3 Wann endet der Verlauf entlang der Sättigungskurve?

- Die Verlauf entlang der Sättigungskurve beschreibt **nur den Abschnitt, in dem tatsächlich Kondensation stattfindet**.

- Sobald die Mischung **unter die Sättigung fällt**, endet die Kondensation.

### Interpretation:

- Die Mischgerade trifft die Sättigungskurve **nur am Kondensationspunkt**  $T_{\text{cond}}$ .
- Ab hier wird die Kurve entlang der Sättigung „geführt“, **aber nur solange**  $e_{\text{mix}} > e_s(T)$ .
- **Wenn**  $RH < 100\%$ , erreicht die Mischung den Endpunkt **unterhalb der Sättigungskurve**.

### Zusammenfassung

| Abschnitt               | Kurvenverlauf                     | Physikalische Bedingung                                                               |
|-------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Vor Kondensation        | Lineare Mischgerade               | Mischung trocken, T-w linear                                                          |
| Kondensation einsetzend | Verlauf entlang der Sättigung     | $e_{\text{mix}} \geq e_s(T)$ , latente Wärme wird freigesetzt                         |
| Vollständige Mischung   | Endpunkt bei $T_\infty, e_\infty$ | $RH < 100\%$ , keine Kondensation mehr, Endpunkt liegt <b>unterhalb</b> der Sättigung |

### Kernidee:

- Die Sättigungskurve dient nur dazu, **den Beginn der Kondensation** zu markieren.
- Die Mischgerade definiert **Steigung und Startpunkt**.
- **Endpunkt** ist immer die **reale Umgebungsbedingung** ( $T_\infty, RH$ ), die möglicherweise unter der Sättigung liegt.

→ Es gibt also **keinen Widerspruch**: Die Gerade wird bis zum Kondensationspunkt mit Steigung  $G_{\text{linear}}$  geführt, der Verlauf auf der Sättigungskurve ist lokal (nur solange Übersättigung besteht), und danach liegt der Endpunkt unterhalb der Sättigung.

## Flight Planning:

### Avoiding of Warming Contrails – Fostering Cooling Contrails

1.) **Check, if flight is over clouds.**

=> Do nothing (contrail does not change anything)

2.) Otherwise, no clouds: **Check, if daytime** (06:00 and 15:00 UTC).

=> Do nothing (contrail may be cooling)

3.) Otherwise, (approaching) nighttime: **Check, if NO persistent contrail.**

=> Do nothing (no contrail or only short-lived contrail does not change much)

4.) Otherwise, persistent contrail:

=> Avoid contrail (!!!)

Check cruise altitude and **decide, if flying higher (or rather lower) than SSR avoids contrail.**

=> Select new FL (for part of the route)

AND adapt speed for optimum lift coefficient (calculated from density at new FL).

a) Middle Latitudes: Check flying below (above may be too high).

b) Equator: Only below SSR is feasible.

c) Poles: Flying above SSR may be an option.

5.) If envisaged FL is unfeasible:

=> **Check if flying around SSR is feasible.**

=> Plan new route according to Relative Humidity (RH).

6.) If new route is unfeasible:

=> **Ignore warming contrail** (on that part of your flight).

#### Hints:

- Relative humidity for contrail calculation from Windy.com
- Cloud coverage for contrail calculation from Windy.com
- Check different Weather Models

## The Rich-Quench-Lean (RQL) Combustor – Causing More Contrails than Average

Teoh (2022) made an important observation when looking at the influence of nvPM emissions (non-volatile particulate matter, i.e. soot):

*In particular, while one specific **very large wide-body aircraft** is only used in 2.4 % of all flights, it accounted for 18.0 % (6.4 %) of flights with strongly warming (cooling) contrails. Comparing the effects of different aircraft types shows that 43.4 % (17.4 %) of flights with strongly warming (cooling) contrails are powered by one engine combustor type, the "phase 5 rich–quench–lean combustor" (Rolls-Royce), which has one of the highest nvPM EIn.*

**While RQL designs have helped to drastically reduce NO<sub>x</sub> emissions, they tend to be prone to nvPM formation due to the especially rich combustion found in their primary zones.**

(<https://orca.cardiff.ac.uk/id/eprint/153029>)

Rolls-Royce Trent 1000 (B787) has a Phase 5 RQL Combustor.

Pratt & Whitney has developed the TALON family of RQL combustor for commercial aircraft gas turbine engines.

(<https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/handle/1826/12499>)

PW4000 has a TALON combustor ("Technology for Affordable Low NO<sub>x</sub>" is also RQL-Tehnolog). The PW4000 is used on A300-600, A310-300, **B747-400**, B767, ...

([https://en.wikipedia.org/wiki/Rolls-Royce\\_Trent\\_1000](https://en.wikipedia.org/wiki/Rolls-Royce_Trent_1000))

*The impressive development of Phase 5 (RQL — rich/quench/lean) combustor technology that has enabled these reductions to be achieved. Research into the concept began in the late 1980s and was certificated on the Trent 700 and 800 in 1995 and 1996 respectively. Since then a steady flow of improvements in wall cooling, fuel spray nozzles, internal mixing and overall combustor geometry has enabled NO<sub>x</sub> emissions to be progressively reduced, the LTO NO<sub>x</sub> of the Trent 900, for example, being 20% lower than that of the 800 at a similar thrust. Phase 5 technology has now been successfully introduced across the fleet, including all members of the Trent and RB211 family, BR700 and AE3007, and has an exemplary service record. A dedicated Phase 5 improvement programme is now [2009] underway for application to future engines. This is expected to yield further reductions in NO<sub>x</sub> from Phase 5 combustors within a 2016 timeframe but these are unlikely to meet the CAEP LTTG of 45% relative to CAEP 6.*

(Greener by Design, RAeS

<https://www.aerosociety.com/media/15464/greener-by-design-annual-report-2008-2009.pdf>)

**Airbus A380** uses the Trent 970 and Trent 972 engine from Rolls-Royce with **RQL combustor**.

([https://en.wikipedia.org/wiki/Airbus\\_A380](https://en.wikipedia.org/wiki/Airbus_A380))

# Implementation Strategy for Contrail Management

## 1 Getting Started with the Four Outcomes in Science

### The Four Possible Outcomes in a Scientific Test

When you test something (for example, whether a disease is present, a chemical reaction occurred, or a hypothesis is true), you're comparing **the test result** to **the actual truth**.

That gives **four possible outcomes**:

| Actual Condition | Test Result: Positive | Test Result: Negative |
|------------------|-----------------------|-----------------------|
| True (present)   | ✓ True Positive (TP)  | ✗ False Negative (FN) |
| False (absent)   | ✗ False Positive (FP) | ✓ True Negative (TN)  |

#### 1. True Positive (TP)

- The test **correctly** says “yes.”
- Example: A COVID test says “positive,” and the person **really has** COVID.

#### 2. False Positive (FP)

- The test **incorrectly** says “yes” when the truth is “no.”
- Example: A COVID test says “positive,” but the person **does not** have COVID.
- Problem: Leads to **unnecessary concern or treatment**.
- In statistics, this is also called a **Type I error**.

#### 3. True Negative (TN)

- The test **correctly** says “no.”
- Example: The test says “negative,” and the person **does not** have COVID.

#### 4. False Negative (FN)

- The test **incorrectly** says “no” when the truth is “yes.”
- Example: The test says “negative,” but the person **actually has** COVID.
- Problem: Leads to **missed detection or false reassurance**.
- In statistics, this is a **Type II error**.

## Summary in Short:

| Term           | Meaning         | Also Known As | Consequence      |
|----------------|-----------------|---------------|------------------|
| True Positive  | Correct “yes”   | –             | Success          |
| True Negative  | Correct “no”    | –             | Success          |
| False Positive | Incorrect “yes” | Type I error  | False alarm      |
| False Negative | Incorrect “no”  | Type II error | Missed detection |

## In Formula Terms:

If you’re measuring test accuracy:

- **Sensitivity (True Positive Rate)** =  $TP / (TP + FN)$  → how good the test is at finding positives
- **Specificity (True Negative Rate)** =  $TN / (TN + FP)$  → how good it is at ruling out negatives

## 2 Four Outcomes Applied to Contrail Management

### Context: Contrail Management

Airlines and researchers are developing systems to **detect or predict contrails** so flights can be rerouted slightly (altitude or path change) to **avoid forming contrails** that contribute to warming.

However, these avoidance maneuvers **cost fuel and CO<sub>2</sub>**, so accuracy of detection matters a lot.

### The Four Outcomes in Contrail Detection and Mitigation

| Actual Atmosphere                 | System Says “Contrail Risk”<br>(Positive) | System Says “No Contrail Risk”<br>(Negative) |
|-----------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Contrail would form<br>(True)     | ✓ True Positive (TP)                      | ✗ False Negative (FN)                        |
| No contrail would form<br>(False) | ✗ False Positive (FP)                     | ✓ True Negative (TN)                         |

 **1. True Positive (TP)**

- **Reality:** A contrail *would* have formed.
- **System prediction:** “Contrail risk” → aircraft performs mitigation (e.g., small altitude change).
- **Outcome:** Contrail successfully **avoided**, **climate benefit achieved**.
- **Effect:** Some fuel penalty, but it **pays off** because warming is reduced.
-  *Correct and desirable action.*

 **2. False Positive (FP)**

- **Reality:** No contrail would have formed.
- **System prediction:** “Contrail risk” → aircraft changes route or altitude unnecessarily.
- **Outcome:** **Unnecessary fuel burn**, more CO<sub>2</sub>, higher cost.
- **Effect:** **No climate benefit**, only a penalty.
-  *False alarm* — important to minimize.

 **3. False Negative (FN)**

- **Reality:** Contrail *would* have formed.
- **System prediction:** “No contrail risk” → aircraft does nothing.
- **Outcome:** Contrail **forms**, **warming impact remains**.
- **Effect:** **Missed opportunity** to mitigate climate impact.
-  *Missed detection* — contrails not reduced as planned.

 **4. True Negative (TN)**

- **Reality:** No contrail would form.
- **System prediction:** “No contrail risk.”
- **Outcome:** Aircraft keeps optimal route, **no unnecessary fuel burn, no contrail anyway**.
-  *Efficient and correct.*

 **Trade-off Summary**

| Case | Test Outcome             | Fuel Use      | Climate Impact | Value                                                                                            |
|------|--------------------------|---------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| TP   | Correctly avoid contrail | ↑ slightly    | ↓ (benefit)    |  Desirable   |
| FP   | Avoid when not needed    | ↑ (wasted)    | No benefit     |  Undesirable |
| FN   | Miss contrail            | No extra fuel | ↑ warming      |  Undesirable |
| TN   | Stay on course           | Optimal       | No warming     |  Desirable   |

## Key Insight for Contrail Management Systems

- **High sensitivity** (few **false negatives**) ensures contrails are caught — but may increase **false positives**, leading to wasted fuel.
- **High specificity** (few **false positives**) saves fuel — but may miss some contrails.

The **optimal system** balances these:

- Catch most contrails (high sensitivity)
- Avoid unnecessary rerouting (high specificity)

## 3 Optimized Introduction of Contrail Management

### Contrail Management in Context

Contrail mitigation is **an emerging operational practice**, not yet standard.

So the “test” (prediction system) is **optional** and its **errors have asymmetric consequences**:

- **False negatives (FNs)** = business as usual → no extra cost, same warming as before.
- **False positives (FPs)** = new and costly → fuel burn + CO<sub>2</sub> with no benefit.

This asymmetry is crucial.

### 1. Understanding the Present Baseline

**Today:** No contrail mitigation → every contrail (big or small) forms.

This means:

- There’s **no penalty for false negatives** yet (you simply continue current operations).
- There **is a penalty for false positives**, since unnecessary rerouting increases fuel and CO<sub>2</sub> without reducing warming.

Therefore, early systems should **maximize confidence** that detected contrails are *real and significant* before acting.

### 2. Early-Stage Strategy — “Precision First”

**Goal:** Achieve *high specificity* (few false positives) even if that means lower sensitivity (missing some contrails).

Why:

- Fuel cost and CO<sub>2</sub> penalties are real and immediate.
- Scientific models of contrail formation are still uncertain.
- Trust in the system depends on avoiding wasteful reroutes.

So initially, it's better to **avoid acting unless very sure** a contrail would be both *likely* and *climatically significant*.

**In practice:**

- Only mitigate when humidity, temperature, and flight level predictions clearly indicate a “high-confidence, high-impact” contrail (e.g., nighttime, long-lasting, optically thick).
- Skip uncertain cases — missing small or short-lived contrails is acceptable early on.

### 3. Targeting “Big Hits” — Prioritizing High-Impact Contrails

Not all contrails are equal:

- Many are short-lived, low impact.
- A few (“big hits”) form **persistent, thick, nighttime cirrus** that trap heat — these dominate warming impact.

Hence, early systems should:

- Focus detection and rerouting on **high-confidence “big hit” conditions**.
- Accept that some smaller contrails (false negatives) will remain unmitigated — that's fine while the system matures.
- Use these targeted successes to build operational confidence and gather validation data.

### 4. Long-Term Strategy — “Sensitivity Next”

Once:

- Prediction models improve,
- Measurement data from early deployments accumulate, and
- Airlines trust the system's performance,

then the strategy can **gradually shift** toward:

- **Higher sensitivity** — catching more contrails, including moderate-impact ones.
- A **balanced approach** between avoiding waste (FPs) and capturing climate benefit (reducing FNs).

This can be done dynamically, e.g.:

- Apply stricter mitigation (more sensitivity) on **nighttime** flights over **climate-sensitive regions**.
- Be more conservative (more specificity) on **daytime** or **fuel-critical** flights.

#### Summary Table — Strategic Evolution

| Phase                                           | System Goal                     | Priority          | False Positives        | False Negatives      | Targeted Contrails  |
|-------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------|------------------------|----------------------|---------------------|
| <b>Today (No system)</b>                        | Baseline                        | None              | N/A                    | 100%                 | All form            |
| <b>Early Deployment (“Precision First”)</b>     | Build confidence, minimize cost | High Specificity  | ⚠️ Very few (minimize) | ✅ Acceptable         | Focus on “big hits” |
| <b>Mature System (“Sensitivity Next”)</b>       | Maximize climate benefit        | Balanced          | Moderate               | Low                  | Broad coverage      |
| <b>Advanced Phase (“Adaptive Optimization”)</b> | Context-aware optimization      | Dynamic trade-off | Tuned per route/time   | Tuned per route/time | Optimized by impact |

#### Final Insight: The Desired Strategy

**Start small, aim precise, learn fast, expand confidently.**

Specifically:

1. **Begin with high-certainty contrail avoidance** (few FPs, even if many FNs).
2. **Target high-impact cases** (nighttime, persistent, optically thick contrails).
3. **Collect validation data** from early flights to refine prediction algorithms.
4. **Gradually expand scope** to cover more conditions as model accuracy improves.
5. **Optimize dynamically** for different missions (fuel price, route, time, climate sensitivity).