

VERGLEICHENDE ANALYSE DER KONZENTRIERTEN EINZELKRAFTEINLEITUNG IN EINE RECHTECKSCHEIBE MITTELS KONTINUUMSMECHANISCHER UND FEM-BERECHNUNG SOWIE EXPERIMENT

R. Basan

Bundesanstalt für Materialforschung und –prüfung (BAM)
Unter den Eichen 87, 12205 Berlin

1. EINLEITUNG

Das Lösen von Kräfteinleitungsproblemen bildet eine wesentliche Aufgabe des Leichtbaus und der Strukturmechanik, da eine Einzellast stets zu einer lokalen Spannungskonzentration bzw. gleichbedeutend zu einer großen Strukturkennzahl [2] als Quotient von Kraft und zugehöriger Referenzfläche führt. Die mit dieser Strukturkennzahl einhergehenden Konsequenzen nach einer Reduzierung des Spannungsniveaus durch Erhöhung des Materialeinsatzes sowie durch zusätzliche Verstärkungselemente und konstruktive Maßnahmen stellen im Sinn des Strukturgewichts, der Fertigung und der Kosten einen erhöhten Aufwand dar und sollen demnach in ihrer Ausführung so gering wie möglich gehalten werden. Oftmals ist es allerdings unumgänglich, Einzellasten, d.h. in einem geringen Querschnitt wirkende Belastungen zu akzeptieren, stets ist es aber erforderlich, den genauen Spannungs- und Verzerungszustand der jeweiligen Struktur zu kennen.

Nachstehend werden drei unterschiedliche Verfahren zur Bestimmung des Spannungs- und des Verschiebungszustands infolge einer Einzellasteinleitung in eine Rechteckscheibe thematisiert. Zum einen kommt ein auf der Scheibentheorie basierendes kontinuumsmechanisches Berechnungsverfahren zum Einsatz, wonach flache ebene Strukturen durch ein ebenes Verschiebungs- und Spannungsfeld beschrieben werden können. Die Grundlage hierfür bildet die Scheibendifferentialgleichung. Aufgrund der Linearität dieser Differentialgleichung ist eine Superposition einzelner Lösungen möglich, was letztlich die Approximation der mathematisch schwer beschreibbaren theoretischen Einzellast als Unstetigkeit mit Hilfe der Fourieranalyse und somit die Bestimmung des gesuchten Spannungszustands ermöglicht.

Zum anderen werden die berechneten Resultate mit Versuchsergebnissen verglichen und sowohl auf ihre qualitative als auch auf ihre quantitative Güte untersucht. Bei der dafür verwendeten Messmethode handelt es sich um das Verfahren der Electronic-Speckle-Pattern-Interferometry (ESPI) als ein optisches Messverfahren, das unter Verwendung von Laserlicht Interferenzbilder auf der Oberfläche des Versuchsobjekts erzeugt und anschließend mittels einer Charged-Coupled-Device-Kamera (CCD) rech-

nerintern ausgewertet. Mit einem Ausgangsbild der unbelasteten Probe bzw. deren Objektkontur und des zu diesem Zustand ins Verhältnis gesetzten Bildes der durch eine Zugbelastung deformierten Versuchsscheibe aus Aluminium ist eine Bestimmung des Verschiebungs- und des daraus resultierenden Spannungszustands infolge der äußeren Kräfteinwirkung möglich.

Da sich die Voraussetzungen und die Annahmen der kontinuumsmechanischen Berechnung nicht vollständig mit denen des Experiments in Einklang bringen lassen, ist ein direkter Vergleich der Ergebnisse beider Verfahren nicht sinnvoll. Die unterschiedlichen Annahmen hinsichtlich der Modellierung einer Einzellast in der Analytik bzw. deren Erzeugung im Fall des Experiments, aber auch die unterschiedlichen, sich aus den jeweiligen Grundlagen des Verfahrens ableitenden Lagerungsbedingungen lassen prinzipiell Unterschiede in den Ergebnissen erwarten. Diese Tatsachen berücksichtigend ist es notwendig, eine zweckmäßige Verbindung zwischen beiden Verfahren herzustellen, um die ermittelten Resultate letztlich in Relation zueinander setzen zu können. Das geeignete Mittel dafür stellt die Modellierung des jeweiligen Falls mit seinen speziellen Eigenschaften mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) dar. Die Berücksichtigung der charakteristischen Eigenschaften des jeweiligen Verfahrens wird durch die Numerik gewährleistet und führt letztlich zu zwei verschiedenen numerischen Modellen der Scheibe. Erst die daraus resultierenden Erkenntnisse erlauben eine genaue Zuordnung der Resultate aus der Kontinuumsmechanik und dem Experiment zu ihren Ursachen und stellen eine wichtige Ergänzung zur Auswertung der Ergebnisse der kontinuumsmechanischen Berechnung und der Versuche dar.

2. KONTINUUMSMECHANIK

2.1. Scheibengeometrie des analytischen Modells

Für die in den folgenden Berechnungen verwendeten Funktionen ist die Einführung eines Koordinatensystems unerlässlich. Definitionsgemäß soll der Ursprung des Koordinatensystems an der Stelle der Einzellasteinleitung liegen. Von diesem Punkt ausgehend zeigt die positive x -

Achse in Scheibenlängsrichtung und beschreibt demzufolge die Längskoordinate der 125 mm langen sowie 50 mm breiten und 0,5 mm starken Scheibe. Dagegen dient die y -Achse zur Angabe von Punkten in Richtung der Scheibenbreite. Die positive Richtung der z -Achse vervollständigt sich durch Verwendung eines rechtshändigen Koordinatensystems. Gemäß den Voraussetzungen der Scheibentheorie befindet sich die x - y -Ebene mit $z=0$ in der entsprechenden Symmetrieebene des Quaders. Unter Verwendung dieser Angaben ergibt sich für die Scheibe der Kontinuumsmechanik das folgende Koordinatensystem.

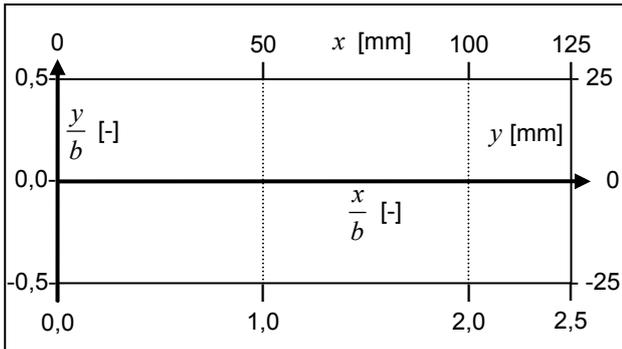


BILD 1. Absolutes und auf die Scheibenbreite normiertes Koordinatensystem der Kontinuumsmechanik

Das absolute Koordinatensystem gibt hierbei die geometrischen Abmessungen in Millimetern wieder. Eine für die weitere Berechnung größere Bedeutung weist allerdings das normierte Koordinatensystem auf, dass sich aus dem absoluten durch Division der einzelnen Werte durch die Scheibenbreite herleiten lässt. Der Ursprung befindet sich an der Lasteinleitungsstelle, bzw. die Einzellast wird in den Punkt $(x/b; y/b) = (0;0)$ parallel zur x -Achse eingeleitet, wobei die positive Kraft- der negativen Koordinatenrichtung entspricht.

2.2. Scheibendifferentialgleichung & Airy'sche Spannungsfunktionen

Die Grundlage der kontinuumsmechanischen Analyse des Lasteinleitungsproblems in eine flache Struktur ist die Scheibentheorie. Mit den geometrischen Voraussetzungen, wonach die Scheibendicke wesentlich geringer als die Abmessungen der beiden anderen Dimensionen der Struktur ist sowie der daraus folgenden Vernachlässigung der aus der Symmetrieebene der Struktur weisenden Spannungen, ergibt sich unter Berücksichtigung des Kräftegleichgewichts am differentiellen Scheibenelement sowie der Verschiebungs-Verzerrungs-Relation und dem Materialgesetz des ebenen Spannungszustands für isotrope Materialien die Scheibendifferentialgleichung [3].

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0$$

Die Scheibengleichung ist unabhängig von jeglichen Mate-

rialparametern und unter der Bedingung des Hooke'schen Spannungs-Dehnungsverhaltens für jeden isotropen Werkstoff anwendbar. Die kontinuumsmechanische Berechnung einer Einzellasteinleitung reduziert sich somit auf das Lösen der vorliegenden Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen und erfolgt in einem ersten Schritt durch Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion – der Airy'schen Spannungsfunktion F . Die Airy'sche Spannungsfunktion F ist eine von den Koordinaten x und y abhängige Funktion, deren zweimaliges Ableiten per Definition die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} ergeben soll

$$(2) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Das Einsetzen dieser Ausdrücke in (1) ergibt eine in ihrer Struktur entscheidend veränderte Differentialgleichung.

$$(3) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Die vorliegende Gleichung ist eine lineare, partielle und homogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für diese Art von Gleichungen existieren unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten, die zu verschiedenen Ergebnissen führen. Da die obige Differentialgleichung linearen Charakter hat, ist es möglich, gefundene Lösungen der Differentialgleichung zu superponieren, so dass auch die Summe dieser Lösungen wiederum die Gleichung erfüllt. Andererseits bedeutet dies auch, dass es möglich ist, den tatsächlichen Lastfall in mehrere Teillösungen zu zerlegen.

2.3. Nichtelementarer Belastungszustand

Für den nichtelementaren Belastungszustand $F_{Störung}$ wird angenommen, dass sich dieser als das Produkt zweier Funktionen darstellen lässt, wobei die eine nur von der Koordinate x/b und die andere nur von der Variablen y/b abhängig ist.

$$(4) \quad F_{Störung} = X\left(\frac{x}{b}\right)Y\left(\frac{y}{b}\right)$$

Die Funktion $Y(y/b)$ beschreibt hierbei das Verhalten der Spannungen in Breitenrichtung und enthält ausschließlich trigonometrische Funktionen. Dagegen wird für die Modellierung des Spannungsverhaltens in Längsrichtung mit $X(x/b)$ auf Exponentialfunktionen zurückgegriffen. Diese Annahmen und die daraus resultierenden Umformungen führen zu dem folgenden Ergebnis als eine Lösung der Scheibendifferentialgleichung (3), [1].

$$(5) \quad F_{\text{Störung}}\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) = \dots$$

$$\dots = -\sigma_{x0} \left(\frac{b}{n\pi}\right)^2 \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \left[1 + n\pi \frac{x}{b}\right] e^{-n\pi \frac{x}{b}}$$

Die gefundene Funktion genügt sämtlichen Anforderungen. Sowohl die Gleichgewichtsbedingungen, das Stoffgesetz als auch die kinematischen Ansprüche und die Schnittkrafttrandbedingungen werden von dieser Airy'schen Spannungsfunktion erfüllt.

Eine Modellierung des Problems der Einzellasteinleitung mit Hilfe einer einzigen Kosinuswelle ist nur unzureichend. Deshalb soll die Einzellast durch eine Fourierreihe approximiert werden. D.h. auf der Grundlage des Prinzips der Superposition wird der reale Lastfall durch Linearkombinationen einzelner Teillösungen der Scheibengleichung angenähert, wobei aus Gründen des Kräftegleichgewichts nur gerade Reihenglieder ($n = 2, 4, 6, \dots$) berücksichtigt werden dürfen [1]. Für die durch die Fourierreihe angenäherten Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung ergibt sich somit die folgende Reihe zur Modellierung der Einzellast mit σ_{x0} als Maximalwert der durch eine Einzellast F_{Einzel} hervorgerufenen Normalspannungen.

$$(6) \quad \sigma_{x,\text{Störung}}\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sigma_{x0} \cos\left(2j\pi \frac{y}{b}\right) \left[1 + 2j\pi \frac{x}{b}\right] e^{-2j\pi \frac{x}{b}}$$

Wenngleich die vorliegende Gleichung wichtige Voraussetzungen zur Modellierung einer Einzellasteinleitung berücksichtigt, sind zwei wesentliche Randbedingungen nicht erfüllt. Für $x/b \rightarrow \infty$ verschwindet der Betrag der Normalspannungen. Tatsächlich aber müsste hier ein endlicher Wert, der ausgeglichene Spannungszustand, erreicht werden. Darüber hinaus werden an der Lasteinleitungsseite am seitlichen Rand $(x/b; y/b) = (0; \pm 0,5)$ negative Spannungen erreicht, was offensichtlich ein Widerspruch zur Realität ist. Abhilfe bei der Beseitigung dieser Fehler hinsichtlich der Randbedingungen liefert der elementare Belastungszustand.

2.4. Elementarer Belastungszustand

Setzt sich die Spannungsfunktion F aus Polynomen vom maximalen Grad drei für die Variablen x und y zusammen, so ist die Differentialgleichung (3) offensichtlich stets erfüllt, da sämtliche vierten Ableitungen zu Null werden. Spannungsfunktionen, die diese Anforderungen erfüllen, werden als elementare Spannungszustände $F_{\text{elementar}}$ bezeichnet. Mit Hilfe dieser Art von Spannungsfunktionen kann eine konstante Spannung in Scheibenlängsrichtung beschrieben werden. Der Ausdruck

$$(7) \quad F_{\text{elementar}}(x, y) = cy^2$$

mit dem freien Parameter c liefert eine konstante Spannung in x -Richtung

$$(8) \quad \sigma_{x,\text{elementar}} = \frac{\partial^2 F_{\text{elementar}}(x, y)}{\partial y^2} = 2c,$$

während Ableitungen nach x verschwinden und es somit keine Spannungen in y -Richtung und auch keine Schubspannungen geben kann. Diese Eigenschaft der elementaren Spannungsfunktion wird im Folgenden genutzt, um die beiden beschriebenen Randbedingungen zu erfüllen. Die Konstante c berechnet sich gerade durch die Voraussetzung der Spannungsfreiheit an der vorderen seitlichen Kante der Scheibe $(x/b; y/b) = (0; \pm 0,5)$.

$$(9) \quad c = \frac{\sigma_{x0}}{4m}$$

Die Gleichung zur Beschreibung einer Einzellasteinleitung in eine flache Struktur setzt sich also aus einer elementaren Belastung und einer unendlichen Reihe für den nicht-elementaren Lastfall zusammen.

$$(10) \quad F\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) = \frac{\sigma_{x0}}{4m} y^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{\sigma_{x0}}{m} \sum_{j=1}^m \left(\frac{b}{2j\pi}\right)^2 \cos\left(2j\pi \frac{y}{b}\right) \left[1 + 2j\pi \frac{x}{b}\right] e^{-2j\pi \frac{x}{b}}$$

In den bisherigen Erläuterungen wurde stets für den Lasteinleitungspunkt der Wert σ_{x0} für die Spannung σ_x infolge einer in diesem Punkt angreifenden Einzellast F_{Einzel} vorgegeben. Für die konkrete Berechnung dieses Wertes wird das Kräftegleichgewicht an der Lasteinleitungsstelle und für $x/b \rightarrow \infty$ aufgestellt [1]. Dieses Vorgehen liefert das folgende Resultat.

$$(11) \quad \sigma_{x0} = 2m \frac{F_{\text{Einzel}}}{bt}$$

Damit ergibt sich als vollständige Lösung des Lasteinleitungsproblems die folgende Airy'sche Spannungsfunktion.

$$(12) \quad F\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b}\right) = \frac{F_{\text{Einzel}}}{2bt} y^2 - \dots$$

$$\dots - 2 \frac{F_{\text{Einzel}}}{bt} \sum_{j=1}^m \left(\frac{b}{2j\pi}\right)^2 \cos\left(2j\pi \frac{y}{b}\right) \left[1 + 2j\pi \frac{x}{b}\right] e^{-2j\pi \frac{x}{b}}$$

Der elementare Anteil ist somit unabhängig von m und somit auch ohne Einfluss von der Güte der Darstellung der Einzellast durch die Anzahl der einzelnen Reihenglieder. Dagegen führt eine Grenzwertbetrachtung mit $m \rightarrow \infty$ zu der Erkenntnis, dass sich die Spannungsspitze immer

stärker ausprägt und bei entsprechender Anzahl an Reihengliedern beliebig große Werte annehmen kann. Dieses Ergebnis korreliert mit der Tatsache, dass eine Einzellast eine Belastung einer unendlich kleinen Fläche darstellt, in deren Folge an dieser Stelle eine unendlich große Spannung zu verzeichnen sein muss.

Für den Fall einer Einzellasteinleitung ergibt sich somit die folgende Gleichung für die auftretenden Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung.

$$(13) \quad \sigma_x \left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b} \right) = \frac{F_{\text{Einzel}}}{bt} + \dots$$

$$\dots + 2 \frac{F_{\text{Einzel}}}{bt} \sum_{j=1}^m \cos \left(2j\pi \frac{y}{b} \right) \left[1 + 2j\pi \frac{x}{b} \right] e^{-2j\pi \frac{x}{b}}$$

Mit den Gleichungen (12) und (2) ist die Bestimmung der Normalspannungen in Breitenrichtung σ_y sowie der Schubspannungen τ_{xy} möglich.

2.5. Verschiebungsgleichungen

Nachdem die Spannungen mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion ermittelt wurden, ist es möglich, unter Verwendung der Verschiebungs-Verzerrungs-Relation bzw. deren Integration und des Hooke'schen Materialgesetzes die Verschiebungen u und v zu berechnen.

$$(14) \quad u \left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b} \right) = \int \varepsilon_x dx = \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx$$

$$(15) \quad v \left(\frac{x}{b}, \frac{y}{b} \right) = \int \varepsilon_y dy = \frac{1}{E} \int (-\nu \sigma_x + \sigma_y) dy$$

Die unbestimmte Integration liefert für beide Verschiebungen je eine Integrationskonstante, die aus den Verschiebungsrandbedingungen des Lasteinleitungsproblems zu bestimmen sind. Während es sich für (14) um die feste Einspannung bei $x/b = 2,5$ handelt, wird für die Integrationskonstante für (15) die Symmetrie in der $x-z$ -Ebene für das Verschiebungsfeld v ausgenutzt. Die Gleichungen der Verschiebungen u und v infolge einer Einzellast im Koordinatenursprung lassen sich somit vollständig beschreiben [1].

3. EXPERIMENTELLE STRUKTURANALYSE

3.1. Scheibengeometrie des Versuchs

Um einen Bezug auf einzelne Bereiche der Scheibe herstellen zu können, wird für die Versuchsscheibe das Koordinatensystem der Berechnungen der Kontinuumsmechanik um die Lasteinleitung und die beiden Einspannbereiche im Anschluss an die Scheibenverjüngung bzw. am hinteren Ende erweitert (s. BILD 2). Dieses Koordinatensystem stellt sowohl in dem Kapitel der FEM als auch der

Auswertung die Grundlage sämtlicher Erörterungen dar.

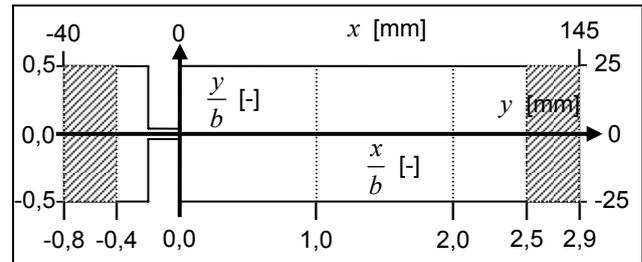


BILD 2. Absolutes und auf die Scheibenbreite normiertes Koordinatensystem der Versuchsscheibe

Die Verjüngung zur Lasteinleitung, die in der Kontinuumsmechanik nicht vorhanden ist, befindet sich im negativen Bereich der x -Koordinate. Sie ist insgesamt zehn Millimeter lang, d.h. sie erstreckt sich von $x/b = -0,2$ bis $x/b = 0$. Im Vergleich zur Gesamtbreite der Scheibe ist der Lasteinleitungsbereich als klein anzusehen, so dass eine Annäherung des Versuchsfalls an den idealen Einzellastfall zu erkennen ist. Fertigungstechnische Gegebenheiten sorgen für einen Radius von zwei Millimetern an den sich treffenden Kanten. Die schraffierten Flächen verdeutlichen die Bereiche der Einspannung im Versuchsstand mit einer Ausdehnung in Scheibenlängsrichtung von zwanzig Millimetern. Die übrigen geometrischen Abmessungen entsprechen denen des Scheibenmodells für die kontinuumsmechanischen Berechnungen. Auch in diesem Koordinatensystem gilt, dass die Zugkraft in negative Richtung und parallel zur x -Koordinate aufgebracht wird, d.h. bei einer positiven Kraft sind in Scheibenlängsrichtung negative Verschiebungen zu erwarten.

Insgesamt stehen somit die beiden unterschiedlichen Scheibengeometrien mit ihren darauf basierenden Koordinatensystemen zur Verfügung. Obwohl die Modelle der beiden Scheiben voneinander differieren, ist es gelungen, den für die Spannungsuntersuchungen entscheidenden Bereich der Scheiben mit $x/b \in [0; 2,5]$ und $y/b \in [-0,5; 0,5]$ für beide Definitionen der Koordinatensysteme gleich zu gestalten.

3.1.1. ESPI – Verfahren

Die Electronic-Speckle-Pattern-Interferometry (ESPI) ist ein optisches Messverfahren zur berührungslosen Bestimmung von Deformationen eines Objekts in den drei Raumrichtungen. Grundlage der ESPI ist die Erzeugung eines Specklebildes der zu untersuchenden Oberfläche. Dafür wird von einer Laserquelle monochromatisches und kohärentes Licht emittiert und in zwei Strahlen aufgeteilt. Das Versuchsobjekt wird anschließend derart mit dem Laserlicht beleuchtet, dass sich die beiden Strahlen bzw. ein aus mehreren Lichtwellen gebildeter Strahlenfächer an der optisch rauen Oberfläche überlagern. Diese mit Hilfe einer CCD-Kamera (Charged-Coupled-Device) aufge-

nommene Superposition der Lichtwellen ergibt schließlich ein aus einzelnen Flecken unterschiedlicher Helligkeit bestehendes körniges Bild, das Specklebild (s. BILD 3, a).

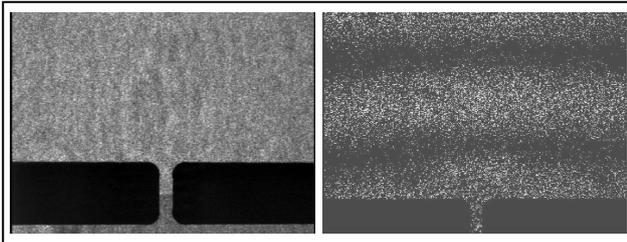


BILD 3. a) Specklebild, b) Interferenzbild

Die Verteilung der einzelnen Bildpunkte in der Visualisierung ist infolge der Streuung an den Unebenheiten des Materials und der damit verbundenen unregelmäßigen Phasenverschiebung der Überlagerung von Objekt- und Referenzstrahlen zufällig und charakteristisch für die Topographie der Oberfläche des untersuchten Gegenstands.

Erfährt das Versuchsobjekt eine Belastung, deformiert es sich, und die einzelnen Reflexionspunkte werden verschoben. Daraus resultierend differieren die reflektierten Strahlen gegenüber der Ausgangssituation und erzeugen ein neues, der Belastung und der daraus veränderten Oberfläche entsprechendes, zweites Specklebild. Durch Subtraktion des Specklebildes des deformierten Zustands von dem des Ausgangszustands ist es möglich, die gerichtete Bewegung eines jeden Punktes auf der deformierten Oberfläche zu ermitteln und folglich auch die Verschiebungen entlang den Raumachsen zu bestimmen. Das Ergebnis der subtrahierten Specklebilder ist das Interferenzbild (s. BILD 3, b), auf dem Bereiche hoher und niedriger Lichtintensität zu erkennen sind. Charakteristisch für das Ergebnis der beiden voneinander subtrahierten Specklebilder sind die abwechselnd schwarzen und weißen Streifen. Der Abstand zweier schwarzer bzw. weißer Streifen entspricht dabei gerade einer Periode der Lichtwelle des Laserlichts und dient somit als quantitatives Maß der Verschiebungen. Bewegt sich ein Punkt auf der Objektoberfläche infolge der äußeren Belastung um ein Vielfaches der Wellenlänge des Laserlichts, so ergibt die Differenzbildung der Specklebilder einen schwarzen Streifen. Analog erfolgt die Erzeugung der weißen Bereiche, wobei die Deformation einer halben Wellenlänge entspricht.

Nach jeweils einer Verschiebung mit dem Betrag der Wellenlänge des Laserlichts ergibt sich genau das gleiche Überlagerungsbild und somit die gleiche Lichtintensität bzw. synonym die Farbe der Interferenzstreifen. Aus den Streifen des Interferenzbildes lassen sich demnach direkt die Verschiebungen durch Multiplikation der Streifenanzahl mit der Laserlichtwellenlänge bestimmen.

3.2. Ermittlung der Spannungen

Ist das Verschiebungsfeld des zu untersuchenden Körpers

bekannt, lassen sich daraus auch die Verzerrungen und unter Berücksichtigung der Materialparameter der verwendeten Aluminiumscheibe (Elastizitätsmodul $E = 72000\text{MPa}$ und Querkontraktionszahl $\nu = 0,33$) die daraus folgenden Spannungen ermitteln. Dies ist allerdings nur innerhalb der $x-y$ -Ebene möglich, eine Berechnung der Verzerrungen ε_z , γ_{xz} und γ_{yz} sowie der Spannungen σ_z , τ_{xz} und τ_{yz} ist aufgrund der unbekannt geometrischen Abmessungen in der z -Richtung nicht durchführbar.

3.3. Versuchsstand

Die Versuche werden mit der folgend dargestellten Apparatur durchgeführt, wobei in BILD 4 zum einen das CAD-Modell und zum anderen die tatsächliche Umsetzung des Versuchsstandes zu sehen sind.

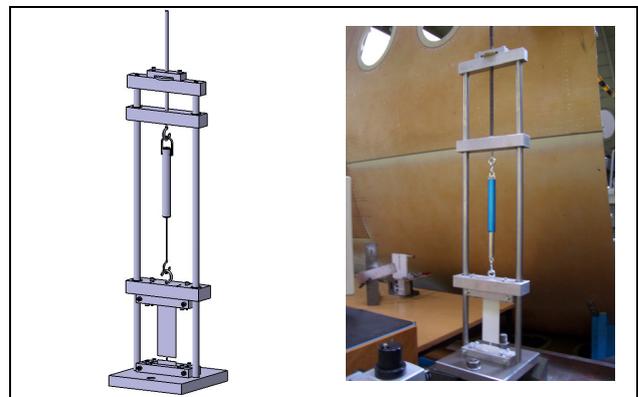


BILD 4. Versuchsvorrichtung a) CAD-Modell, b) Umsetzung

Die Apparatur funktioniert derart, dass die Versuchsprobe sowohl unten als auch im entlang der Linearführungen verschiebbaren oberen Anschlussstück fixiert wird. Über ein oben gelegenes Stellrad überträgt eine zur Kraftmessung in Reihe geschaltete Federwaage die Zugbelastung in die Probe, so dass letztlich der gewünschte Spannungszustand in der Versuchsprobe eingestellt werden kann.

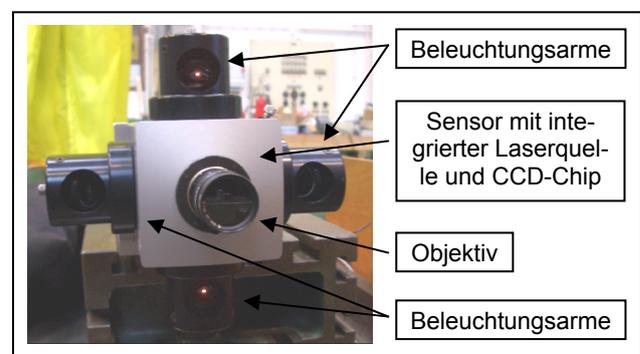


BILD 5. ESPI-Sensor

Der für die Versuche verwendete ESPI-Sensor arbeitet mit Laserlicht einer Wellenlänge von $\lambda = 780\text{nm}$. Über vier

Beleuchtungsarme mit integrierten Spiegeln wird die Probe mit dem Laserlicht derart bestrahlt, dass das reflektierte Licht mit Hilfe der Kamera aufgezeichnet werden kann.

Der wichtigste Bestandteil der Kamera ist der integrierte CCD-Chip, mit dessen Hilfe Lichtsignale in elektrische Ladungen gewandelt werden können. Der CCD-Chip besteht dabei aus einer Vielzahl lichtempfindlicher Elemente, die auf dem Chip in Zeilen und Spalten angeordnet sind und in dieser Brennebene das einfallende Licht aufnehmen. Über einen angeschlossenen Messrechner erfolgt im Anschluss daran die Auswertung der gewonnenen und mit Hilfe des CCD-Chips in elektrische Signale gewandelten Daten.

4. NUMERISCHE BERECHNUNG

Ein alternatives Verfahren zur Berechnung des Spannungszustands einer durch eine Einzellast beanspruchten Scheibe stellt die Finite-Elemente-Methode (FEM) dar. Sie ist als Verbindung zwischen den Analysemethoden der Kontinuumsmechanik und des ESPI-Verfahrens zu sehen, da sie eine Berücksichtigung der speziellen Eigenschaften beider Verfahren ermöglicht. Bereits die voneinander abweichende Scheibengeometrie und die unterschiedlichen Lagerungsbedingungen der beiden bisherigen Betrachtungsweisen machen die FEM zur Beurteilung der Ergebnisse unentbehrlich.

Aus diesem Grund ist es sinnvoll, für jede Variante zur Bestimmung der Spannungen ein eigenes FE-Modell zu verwenden, in welches dann die jeweiligen Besonderheiten gezielt eingearbeitet werden können. Dieses Vorgehen ermöglicht eine optimale Vergleichbarkeit der Ergebnisse einerseits zwischen dem jeweiligen Verfahren und dem entsprechenden FE-Modell. Andererseits ist es erst sinnvoll, die beiden von einander differierenden Verfahren der Kontinuumsmechanik und der ESPI miteinander zu vergleichen, wenn die aus ihren Unterschieden resultierenden Auswirkungen auf die Spannungsfelder erkannt worden sind. Im Folgenden werden deswegen die prinzipiellen Unterschiede zwischen dem kontinuumsmechanischen Berechnungsmodell und den Bedingungen aus dem Zugversuch erörtert, wissend, dass sich diese in der Modellierung des jeweiligen FE-Programms wieder finden werden.

- Lasteinleitung

Mittels der Fourieranalyse ermöglicht es das Scheibenmodell, die Einzellasteinleitung beliebig genau abzubilden. Dagegen ist eine derart konzentrierte Einzellast im Versuch nicht zu realisieren. Vielmehr wird diese durch eine im Verhältnis zur Scheibenbreite sehr geringe Verjüngung der Scheibe angenähert.

- Einspannung

Die sich aus der Scheibendifferentialgleichung ergebende Lösung für den Spannungszustand berechnet sich direkt aus dem Schnittkraftgleichgewicht am Element und somit

unter Vernachlässigung irgendwelcher Lagerungsbedingungen. Einspannungseffekte können demnach nicht durch diese Lösung wiedergegeben und Phänomene wie die Spannungserhöhung an der festen Einspannung durch Querkontraktionsbehinderung nicht berücksichtigt werden. Dagegen spiegelt die Messung der Kamera diesen Sachverhalt der Lagerung wider und hat demnach auch Eingang in das entsprechende FE-Modell zu finden.

- Betrachtungsebene

Die Ergebnisse der Scheibendifferentialgleichung gelten gemäß den Voraussetzungen unabhängig von der Koordinate z , d.h. sie sind für jede $x-y$ -Ebene $z \in [-t/2; t/2]$ gleich. Dagegen ist das ESPI-Verfahren eine Methode zur Bestimmung von Verschiebungen auf einer Oberfläche und kann somit nur Spannungen in dieser Ebene bestimmen. Belastungen innerhalb der Struktur sind nicht quantifizierbar. Entsprechend ist für das FE-Modell des Versuchs die Oberfläche des Modells zu betrachten. Von Interesse zum Vergleich mit den anderen Ergebnissen ist allerdings auch die Symmetrieebene bei $z = 0$.

Demnach wird deutlich, dass ein und dasselbe Netz nicht für beide Problemstellungen herangezogen werden kann. Vielmehr hat das jeweilige FE-Modell die beschriebenen Eigenschaften des entsprechenden Problems zu repräsentieren. Nur dann ist ein Vergleich der unterschiedlichen Spannungsfelder sinnvoll und eine Interpretation der unterschiedlichen Ergebnisse möglich.

4.1. FE-Modell für die Kontinuumsmechanik

Generell gilt es, Bereiche hoher Spannungsgradienten, d.h. Gebiete großer Änderungen der Spannungen in Abhängigkeit der Koordinaten x und y feiner zu vernetzen. Von besonderem Interesse sind demnach die Bereiche in der Nähe der Einzellasteinleitung. Dagegen sind entfernter liegende Gebiete der Scheibe weniger genau zu vernetzen. Unter Berücksichtigung des zu erwartenden Spannungsfeldes empfiehlt sich eine zu den Seitenrändern der Scheibe hin zunehmende Netzweite. Gleiches gilt für die Richtung entlang der positiven x -Koordinate. Auch hier kann die Elementdichte verringert werden, da die Spannungsgradienten immer geringer ausfallen und im homogenen Lastzustand schließlich zu Null werden.

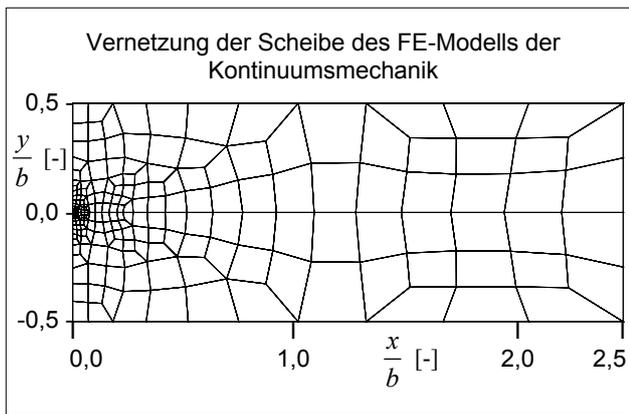


BILD 6. FE-Netz der Kontinuumsmechanik

Wie bereits beschrieben, berücksichtigt das Scheibenmodell keine Einspannungseffekte, sondern sieht am Ende der Scheibe Reaktionskräfte nur in x -Richtung vor. Einspannungen werden in FE-Programmen durch Blockieren von Freiheitsgraden der jeweiligen Knoten modelliert. Demzufolge wird bei $x/b = 2,5$ der die x -Verschiebung repräsentierende Knotenfreiheitsgrad jedes Knotens blockiert. Weil das System statisch bestimmt sein muss, wird der Knoten bei den Koordinaten $(x/b; y/b) = (2,5; 0)$ in seinen gesamten Freiheitsgraden blockiert. Demnach ist nur ein Knoten in seinen gesamten Verschiebungen eingeschränkt, so dass das hintere Ende der Scheibe eine ungehinderte Querkontraktion ausführen kann und somit die Gegebenheiten der Kontinuumsmechanik widerspiegelt werden. Für die Beschreibung der Geometrie kommen dreidimensionale Volumenelemente mit viereckigen Grundflächen zum Einsatz. Die zweite und gleichzeitig effektivere Variante zur Verbesserung der Genauigkeit der FE-Rechnung neben der Netzverfeinerung ist die Erhöhung des Polynomgrades der Ansatzfunktionen. Dementsprechend werden für die numerische Simulation Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet.

Unter Berücksichtigung dieser Grundlagen ergibt sich dann zur Verifizierung des Scheibenmodells das in BILD 6 dargestellte Netz. Es weist 2055 Knoten in 210 Elementen auf und wird in Tiefenrichtung mit einem Element modelliert.

4.2. FE-Modell für den Versuch

Die Geometrie für das den Versuch repräsentierende FE-Modell ist identisch mit der Scheibe des Zugversuchs. Nach Aufbringen der Zugkraft ist auch in diesem Fall eine Spannungserhöhung im Bereich der Lasteinleitung zu erwarten, so dass in diesem Gebiet ein feinmaschigeres Netz zu verwenden ist. Für die Spannungsverteilung im Zugversuch ist derselbe trichterförmige Verlauf zu prognostizieren wie im FE-Vergleichsmodell für die Kontinuumsmechanik. Daher ist eine gröbere Vernetzung in den Außenbereichen der Scheibe ausreichend. Dagegen werden im Zugversuch Einspannungseffekte erfasst, so

dass die Einspannung anders zu modellieren ist. An dieser Stelle sei angemerkt, dass im Experiment und demnach auch in dem entsprechenden FE-Modell die Seite der Lasteinleitungsstelle der Versuchsscheibe fest gelagert und an der anderen Seite eine kontinuierliche Zugkraft in x -Richtung aufgebracht wird, um Messfehler aufgrund der Starrkörperverschiebung zu minimieren. Der kritische Bereich der Lasteinleitung verschiebt sich somit infolge der Starrkörperverschiebung geringer als bei umgekehrter Lagerung, wodurch letztlich die Ergebnisqualität der Versuche gesteigert werden kann. Daher wird der Lasteinleitungsbereich der Scheibe fest eingespannt und der andere Teil nur in den Freiheitsgraden in y - und in z -Richtung eingeschränkt, wodurch eine Querkontraktionsbehinderung simuliert werden kann. An der äußeren Fläche wird dann eine konstante Zuglast an jedem Knoten aufgebracht, die in der Summe die gleiche Kraft wie im Zugversuch ergibt. Ferner ist zur möglichst genauen Bestimmung der Einspannungseffekte eine Verfeinerung des Netzes im Bereich der hinteren Einspannung, insbesondere in den Ecken, vorzusehen. Zur Erhöhung der Genauigkeit werden ebenfalls quadratische Ansatzfunktionen für die Annäherung der Verschiebungen verwendet und die Modellierung des Netzes mit Viereckselementen durchgeführt. Für eine umfassende Analyse des Lastfalls kommen des Weiteren Volumenelemente zum Einsatz.

Im Ergebnis liegt dann die in der folgenden BILD 7 dargestellte Vernetzung mit den beschriebenen Knotenfreiheitsgraden bzw. Knotenbelastungen vor. Dieses aus 790 Solidelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen bestehende Netz hat 7623 Knoten. In Tiefenrichtung weist ein Element eine Ausdehnung von einem halben Millimeter auf, d.h. die Dicke t der Scheibe wird durch ein Element ausgefüllt.

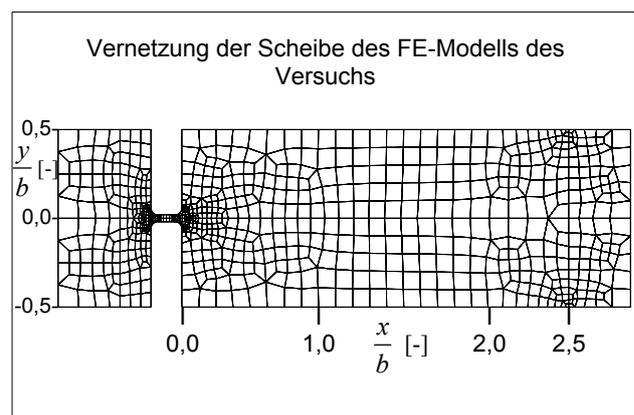


BILD 7. FE-Netz des Versuchs

Mit den beiden generierten Netzen ist es möglich, die aus der Kontinuumsmechanik und aus dem Versuch resultierenden Ergebnisse zu verifizieren und zueinander in Verbindung zu setzen. Dabei haben die oben beschriebenen jeweiligen Voraussetzungen der unterschiedlichen Scheiben Eingang in das entsprechende FE-Modell gefunden.

5. AUSWERTUNG

Folgend werden die mit den unterschiedlichen Verfahren ermittelten Ergebnisse dargestellt und ausgewertet. Die Spannungsdiagramme resultieren aus einer Zugkraft von $F_{\text{Einzel}} = 20N$, die in Abhängigkeit vom jeweiligen Verfahren auf beschriebene Weise in die Scheibe eingeleitet wird und zu Belastungen im linear elastischen Bereich führt. Sämtliche Spannungen werden dabei auf den Spannungswert des elementaren Lastfalls F_{Einzel}/bt bezogen. Sie sind somit dimensionslos und daraus folgend auch geometrieunabhängig bzw. allgemeingültig.

Die Ergebnisse der kontinuumsmechanischen Berechnung beruhen auf einer Anzahl von $m = 20$ Reihengliedern und einer Unterteilung der Scheibe in Breiten- und in Längsrichtung in je 200 Stellen. Die Resultate der numerischen Berechnungen ergeben sich für die in den Abschnitten 4.1 und 4.2 erörterten Netze. Für die vollständigen Ergebnisse sowohl der Normalspannungen in Scheibenbreitenrichtung als auch der Schubspannungen sowie der Verschiebungen in den einzelnen Koordinatenrichtungen sei auf Quelle [1] verwiesen.

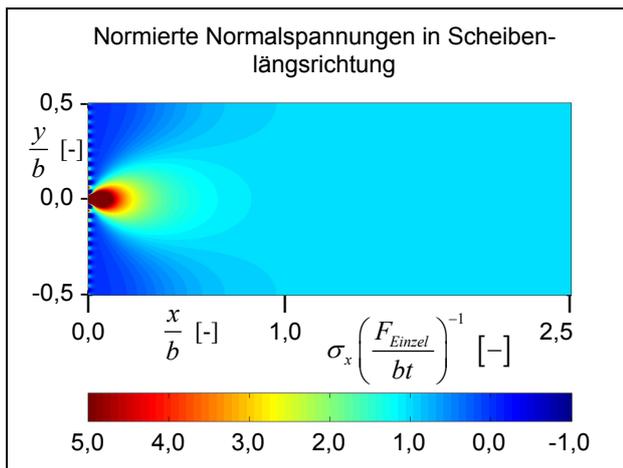


BILD 8. Normierte Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung der Kontinuumsmechanik

Deutlich ist das Spannungsmaximum an der Lasteinleitungsstelle in BILD 8 zu erkennen. Die Spannungswerte klingen dann sowohl in Breiten- als auch in Längsrichtung ab. Die Isolinien der Spannungen haben dabei elliptische Gestalt und berühren sich alle in dem Punkt der Lasteinleitung. Der maximale Wert beträgt $\sigma_{x,\text{max}} (F_{\text{Einzel}}/bt)^{-1} = 41$. Obwohl mit diesem Wert eine deutliche Spannungsüberhöhung im Lasteinleitungsbereich zu verzeichnen ist, gibt es keine unendlich große Spannungsspitze, da die zur Modellierung der Einzellast verwendete Anzahl an Reihengliedern der Fourierreihe $m = 20$ beträgt und somit von der exakten Beschreibung der Einzellast mit $m \rightarrow \infty$ abweicht.

Ab einer Entfernung von ca. einer Scheibenbreite vom

Lasteinleitungsrand sind die Störspannungen fast abgeklungen. Es überwiegt der elementare Lastzustand. Da auf den Spannungswert des elementaren Lastfalls normiert wird, ergibt sich in diesen Bereichen der Scheibe ein Wert von eins für die normierten Spannungen. Am Rand der Lasteinleitung sind des Weiteren helle und dunkle Bereiche sichtbar, die von der Modellierung des Lasteinleitungsproblems durch trigonometrische Funktionen zeugen. In jedem helleren Bereich befindet sich demzufolge ein lokales Maximum der Spannungen, und in den dunkleren Abschnitten werden lokale Minima erzielt. Die Bereiche um den linken und den rechten vorderen Rand der Scheibe $(x/b; y/b) = (0; \pm 0,5)$ sind anfangs kaum belastet bzw. durch die Reihenentwicklung am Lasteinleitungsrand beeinflusst. Mit zunehmender Längskoordinate nehmen die Spannungen aber zu bis sich der elementare Lastfall einstellt.

Die Modellierung des Verlaufs der Normalspannungen σ_x mit Hilfe einer Kosinusreihe führt selbstverständlich zu einem achsensymmetrischen Verhalten im Spannungsfeld. Einspannungseffekte sind nicht zu verzeichnen, vielmehr ist der hintere Rand der Scheibe hinsichtlich des Spannungsniveaus vollkommen homogen.

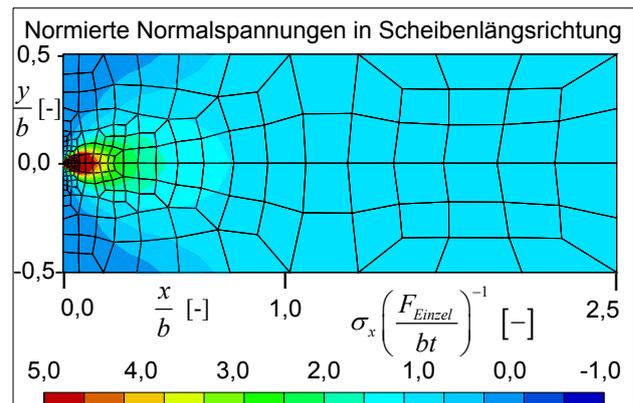


BILD 9. Normierte Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung der Numerik (für Kontinuumsmechanik)

Die Spannungsverteilung in BILD 9 auf der Grundlage der numerischen Berechnung weist qualitativ die vollkommen identischen Phänomene wie das der Kontinuumsmechanik auf. Neben einem Spannungsmaximum im Punkt der Lasteinleitung sind die elliptischen Linien konstanter Spannungen, die unbelasteten vorderen Ränder sowie die angrenzenden spannungsfreien Gebiete und der homogene Spannungszustand ab ca. einer Scheibenbreite zu verzeichnen.

Unterschiede ergeben sich im Spannungsmaximum mit einem Wert $\sigma_{x,\text{max}} (F_{\text{Einzel}}/bt)^{-1} = 384,3$. Die Einzellast wird demnach scheinbar von der Numerik besser abgebildet. Denn theoretisch müsste sich bei einer diskreten Last ein unendlicher Spannungswert einstellen. Eine feinere Vernetzung der Lasteinleitungsstelle zöge zwar auch im

FE-Modell eine Zunahme der Spannungsspitze nach sich, würde allerdings auf die übrigen Bereiche keine signifikanten Auswirkungen haben.

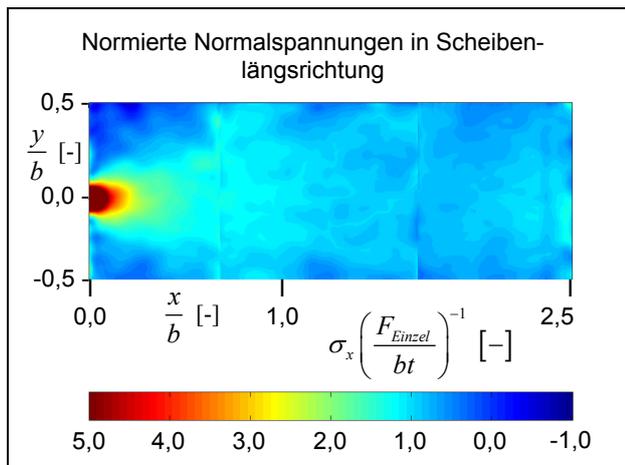


BILD 10. Normierte Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung des Versuchs

Deutlich ist in BILD 10 die ovale Spannungsüberhöhung im Bereich der Lasteinleitung erkennbar. Die Versuchsdaten weisen allerdings an der Lasteinleitungskante einen breiteren Bereich erhöhter Spannungen auf als die Varianten der diskreten Einzellast. Die Isolinien der Normalspannungen schneiden sich somit nicht alle in einem Punkt. Die Ursache für dieses Phänomen ist in der unterschiedlichen Belastung zu suchen, da die Einzellast über einen schmalen Streifen mit Radien an den sich berührenden Kanten in die Struktur geleitet wird. Demnach wird ein größerer Bereich des relevanten Scheibenausschnitts für die Lasteinleitung genutzt. Die Spannungen sind demnach in den angrenzenden Gebieten bereits höher als die kontinuumsmechanische Lösung bzw. die des entsprechenden FE-Modells mit einer diskreten Einzellast erwarten lässt. Auf der anderen Seite ist das Maximum der normierten Normalspannung mit einem Wert von

$\sigma_{x,max}(x/b = 0,01, y/b = 0)(F_{Einzel}/bt)^{-1} = 12,18$ geringer, da die Einzellast über eine vergleichsweise große Fläche in die Scheibe gelangt. Das Spannungsmaximum liegt nicht in der direkten Umgebung des Koordinatenursprungs, was sich allerdings nicht inhaltlich erklären lässt, sondern in Problemen des Berechnungsalgorithmus der Datenauswertung im randnahen Bereich der Specklebilder begründet ist.

In Breitenrichtung nehmen die Spannungswerte deutlich ab und erreichen um $(x/b; y/b) = (0; \pm 0,5)$ den Wert Null. Der unstete Verlauf in den Normalspannungen bei $x/b = 0,68$ und bei $x/b = 1,7$ resultiert aus der Zusammensetzung des gesamten Scheibenfeldes aus drei einzelnen Teilmessungen. An diesen Kanten kommt es demnach zu Sprüngen im Spannungsverlauf. Ab $x/b = 1$ sind keine eindeutigen Tendenzen im Spannungsbild zu erkennen. Vielmehr bewegen sich die Beträge um den Wert

eins und lassen somit auf das Erreichen des homogenen Lastzustands schließen. Anders verhält es sich in den hinteren Ecken der Versuchsscheibe $(x/b; y/b) = (2,5; \pm 0,5)$. Hier ist eine Zunahme des Spannungsniveaus infolge der Querkontraktionsbehinderung durch die feste Einspannung zu verzeichnen. Die Spannungen sind gegenüber den Werten des homogenen Falls ca. um den Faktor zwei erhöht.

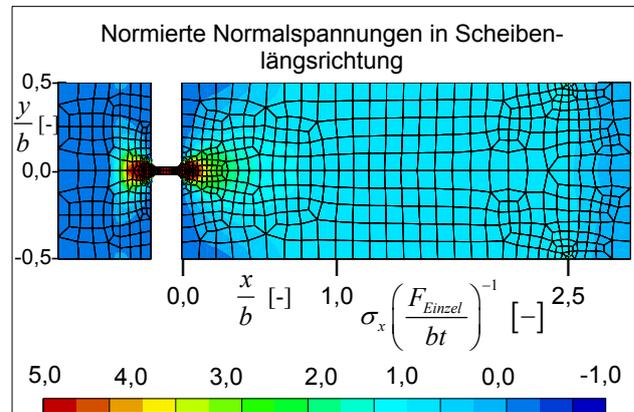


BILD 11. Normierte Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung der Numerik (für Versuch)

Die beschriebenen Beobachtungen für die Versuchsergebnisse lassen sich auch im dazugehörigen FE-Modell wieder finden (s. BILD 11). Deutlicher ist die Symmetrie der Ergebnisse bezüglich der x -Achse zu erkennen. Dennoch gelten für die Erkenntnisse insbesondere im Lasteinleitungsbereich die gleichen Schlüsse. Der Bereich der erhöhten Spannungen weist eine rundere Kontur auf und ist im absoluten Spannungswert mit $\sigma_{x,max}(F_{Einzel}/bt)^{-1} = 14,6$ wesentlich geringer als die Verfahren auf der Grundlage einer diskreten Einzellast belegen. Für die FEM liegt das Spannungsmaximum wie erwartet direkt im Koordinatenursprung.

Mit zunehmender Scheibenbreitenkoordinate aber auch in Längsrichtung klingt die Belastung ab und geht nach ca. einer Scheibenbreite in den homogenen Zustand über. Bei der verwendeten Farbskalierung nehmen die Spannungen infolge der Querkontraktionsbehinderung durch die hintere Einspannung ab einem Wert von $x/b = 2,3$ wieder zu. Kritische Werte werden ebenfalls an den Scheibenecken $(x/b; y/b) = (2,5; \pm 0,5)$ mit einer ungefähr zweifachen Spannungsüberhöhung gegenüber dem homogenen Spannungszustand erreicht.

Insgesamt führen nicht nur die quantitativen, sondern insbesondere auch detaillierte quantitative Vergleiche der Ergebnisse der Normalspannungen in Scheibenlängsrichtung σ_x zu einem hohen Übereinstimmungsgrad zwischen den vier Analysemethoden [1].

6. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Alle vier Verfahren zur Berechnung des Einzellasteinleitungsproblems spiegeln die lokalen Spannungsüberhöhungen im Bereich der Lasteinleitungsstelle und das Phänomen der Abklinglänge sowie das Erreichen des ausgeglichenen Spannungszustands und die dem entsprechenden Berechnungsmodell zugrunde liegenden geometrischen Randbedingungen wider. Obwohl alle vier Modelle unterschiedliche Annahmen treffen, auf ungleichen Theorien basieren und verschiedene Effekte vernachlässigen, sind Abweichungen der Ergebnisse zwar unausweichlich, die Größenordnung dieser allerdings sehr gering und die Kernaussagen der Resultate nicht verändernd. Die Normalspannungen σ_x stellen hierbei im Vergleich zu den Normalspannungen in Scheibenbreitenrichtung σ_y , sowie den Schubspannungen τ_{xy} - und folglich auch für die Vergleichspannungen nach von Mises σ_v - die dominierende Belastung der Struktur dar [1].

Stets breiten sie sich elliptisch von der Stelle der Lasteinleitung aus, nehmen bei $x/b = 0$ die größten Werte an und erreichen dann ab $x/b \approx 1$ den Betrag des homogenen Spannungszustands. Gemäß der Modellierung sind die Beträge der Normalspannungen für die Kontinuumsmechanik und für das dazugehörige FE-Modell am größten, weil die Einzellast in diesen Fällen tatsächlich auf einem sehr kleinen Querschnitt bzw. im Fall der FEM direkt am Knoten wirkt. Dagegen wird die Last im Zugversuch und somit auch in dem entsprechenden FE-Modell über eine Verjüngung der Versuchsscheibe mit einem endlich kleinen Querschnitt in die Struktur geführt, so dass das Spannungsniveau hier geringer ausfallen muss.

Wie in BILD 8 bis BILD 11 ersichtlich wird, sind nach spätestens einhalb Scheibenbreiten in Längsrichtung die durch die Einzellast hervorgerufenen Störungen des Spannungsniveaus vollkommen abgebaut und der ausgeglichene Belastungszustand herrscht vor.

7. ZUSAMMENFASSUNG

Es ist eine vergleichende Analyse der konzentrierten Einzelkrafteinleitung in eine Rechteckscheibe mittels kontinuumsmechanischer und FE-Berechnung sowie Experiment durchgeführt worden. Die kontinuumsmechanische Berechnung, der Versuch und die beiden dazugehörigen FE-Modelle haben sehr genau die Verschiebungs- und die Spannungsfelder der Scheibe ermittelt und die Eignung des jeweiligen Verfahrens zur Beschreibung des Lasteinleitungsphänomens bewiesen. Durch die Normierung der Ergebnisse auf geeignete Parameter wie die Scheibenbreite und den Betrag des homogenen Spannungswertes ist außerdem eine Allgemeingültigkeit der Resultate erzielt worden.

Während die kontinuumsmechanische Berechnung und das entsprechende FE-Modell den Fall einer diskreten Spannungsspitze analysieren, wird die Last im Versuch und in der dazugehörigen FE-Berechnung über einen geringen Querschnitt in die Struktur geführt. Die damit einhergehenden und die weiteren Unterschiede der vier Berechnungsverfahren wie z.B. Lagerungsbedingungen finden Eingang in die Ergebnisse und gestatten eine Zuordnung der Resultate zu diesen Besonderheiten.

8. SCHRIFTTUM

- [1] BASAN, R.: „Vergleichende Analyse der konzentrierten Einzelkrafteinleitung in eine Rechteckscheibe mittels kontinuumsmechanischer und FEM-Berechnung sowie Experiment“; Studienarbeit, TU Berlin, 2006
- [2] THORBECK, J.: „Leichtbau“; Veranstaltungsskript TU Berlin, 2003
- [3] WIEDEMANN, J.: „Leichtbau 1. Elemente“; 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996

DANKSAGUNG

Der vorliegende Artikel basiert auf meiner am Institut für Luft- und Raumfahrt (ILR) der TU Berlin geschriebenen Studienarbeit. Mein Dank gilt in diesem Zusammenhang Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Thorbeck sowohl für die Möglichkeit zum Schreiben dieser Arbeit am ILR als auch für die kompetente Beratung bei inhaltlichen Fragestellungen. Ebenso bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. O. Mierheim für die fachkundige Unterstützung und die Betreuung meiner Studienarbeit.