AEROELASTISCHE UNTERSUCHUNGEN AN NACHGIEBIGEN TRAGFLÄCHEN

G. Thwapiah, L. F. Campanile
Eidgenössische Materialprüfungs- und Forschungsanstalt (Empa)
Überlandstrasse 129, CH-8600 Dübendorf
Schweiz

ZUSAMMENFASSUNG

Mit dem Interesse an formadaptiven Tragflächen („morphing airfoils“) sowie an der gezielten Nutzung aeroelastischer Servoeffekte („active aeroelasticity“) wächst die Relevanz einer nichtlinearen aeroelastischen Stabilitätsanalyse sowie der Untersuchung entsprechender postkritischer Zustände. Diese Arbeit fügt sich in diesen Kontext ein und behandelt die statische aeroelastische Antwort und Stabilität dünner flexibler Platten bei Vorhandensein großer Deformationen, wobei diese nichtlineare Effekte sowohl hinsichtlich des Strukturverhaltens als auch der Aerodynamik hervorrufen. Dabei werden zwei getrennte Probleme betrachtet: Der vom Torsionsverhalten bestimmte Fall einer ungepfeilten Tragfläche und der vom Biegeverhalten dominierte Fall einer vorwärts gepfeilten Tragfläche (wobei die Torsionsnachgiebigkeit vernachlässigt wird). Für beide Fälle werden zu Beginn die – als Referenz dienenden – Linearmodelle beschrieben; anschließend wird die Betrachtung um die nichtlinearen Terme für Struktur und Aerodynamik ergänzt. Die Analyse basiert auf einer Modellierung der Struktur als Torsions- bzw. Biegebalken und auf einer mittels der Streifentheorie vereinfachten Aerodynamik.

1. HINTERGRÜNDE

Die statische aeroelastische Stabilität von Tragflächen wird in der klassischen Betrachtungsweise anhand linearer Modelle untersucht. Für konventionelle Flugzeuge ist ein aeroelastisches postkritisches Verhalten meistens nicht von Interesse, da aufgrund der geringen Nachgiebigkeit der Leichtbaustruktur Fluggeschwindigkeiten oberhalb der Stabilitätsgrenze unvereinbar mit der Strukturintegrität sind. Aktuelle Forschungstrends (formadaptive Tragflächenstrukturen, „morphing airfoils“) zielen allerdings auf die Verwendung nachgiebiger Strukturen[1] (d.h. Strukturen, die bewusst für große elastische Verformungen ausgelegt werden) und auf die Nutzung aeroelastischer Servoeffekte[2,3], die in der Nähe statischer Instabilitäten am ausgeprägtesten sind. In diesem Zusammenhang wächst die Relevanz einer nichtlinearen aeroelastischen Analyse.

In diesem Beitrag werden die statische aeroelastische Antwort und Stabilität dünner flexibler Platten bei Vorhandensein großer Deformationen behandelt. Motiviert wird diese Forschungsaufgabe durch die Idee, mittels strukturintegrierter Festkörperaktorik (Piezokeramik) sowie unter Ausnützung aeroelastischer Servoeffekte große kontrollierbare Verformungen in Tragflächen und damit eine erweiterte Kontrolle der Luftlasten zu erzielen. Das Vorhandensein großer Deformationen erfordert eine nichtlineare Betrachtung sowohl hinsichtlich des Strukturverhaltens als auch der Aerodynamik. Die strukturellen Nichtlinearitäten beruhen auf den endlichen Drehungen, die sowohl bei der Torsions- als auch bei der Biegeverformung entstehen und die in der Regel eine versteifende Wirkung haben; die aerodynamischen Nichtlinearitäten entstehen hauptsächlich durch den Strömungsabriss bei hohen Anstellwinkeln. Aufgrund der nichtlinearen Effekte wird die Verformung nach Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit begrenzt und die Tragfläche erreicht einen ausgelenkten, stabilen Zustand. Ist die Struktur so ausgelegt, dass die im postkritischen Zustand entstehenden Verzerrungen im elastischen Bereich bleiben, so ist das Phänomen reversibel.

2. ANALYSE

2.1. Grundannahmen

Gegenstand der hier vorgestellten Analyse sind dünne rechteckige Tragflächen. Aus strukturmechanischer Sicht werden diese als einseitig eingespannte Biegetorsionsbalken betrachtet. Die Einspannungsebene ist normal zur Balkenlängsachse, die als y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems gewählt wird. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt an der Einspannung und die positive y-Richtung ist dem freien Ende zugewandt. Die z-Achse ist entlang der kürzesten Kante gerichtet und die x-Achse ergibt sich aus der Forderung eines rechteckigen, linkshändigen Koordinatensystems. Es wird außerdem eine Bogenlangkoordinate s definiert, die im unverformten Zustand der y-Achse entspricht (siehe BILD 1). Die Abmessungen der Tragfläche in x-, y- und z-Richtung werden jeweils mit den Symbolen c, L und h gekennzeichnet.

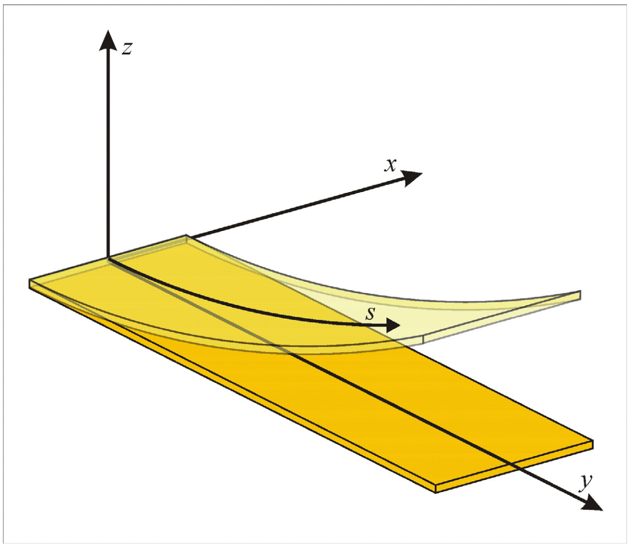

BILD 1 Koordinatensystem.

Hinsichtlich des Biegeverhaltens werden weder Schubverzerrungen noch Biegeverformungen um die z-Achse zugelassen; außerdem wird der Balken als axial undehnbar angenommen, so dass jeder infinitesimale Balkenabschnitt (Schnittebene normal zur y-Achse) nur zwei Verzerrungskomponenten besitzt: Die aus der Torsion resultierende Verdrillung (relative Drehung der Querschnitte um die y-Achse) und die aus der Biegung resultierende Verkrümmung (relative Drehung der Querschnitte um die x-Achse). Diese Verzerrungen werden als klein angenommen; die Balkenverformungen (Durchbiegung, Rotationswinkel) können hingegen große Werte annehmen (geometrische Nichtlinearität).

Die Biegesteifigkeit des Balkens berücksichtigt die brettartige Geometrie des Trägers[4]. Demnach wird in der Beziehung zwischen Biegemoment M_b und Krümmung χ

$$M_b = EI\chi \tag{1}$$

das korrigierte Biegeträgheitsmoment

$$I = \frac{bh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{2}$$

verwendet. In (1)-(2) bezeichnet E das Elastizitätsmodul des Materials und ν die Querkontraktionszahl..

Bei der Modellierung einer ungepfeilten Tragfläche liegt der Geschwindigkeitsvektor der Anströmung in der xz-Ebene und ist im Bezug zur x-Achse um den Winkel α (Anstellwinkel) gedreht. Der Winkel ist positiv im Gegenuhrzeigersinn, von der positiven y-Richtung aus betrachtet. Beim gepfeilten Flügel liegt der Geschwindigkeitsvektor in einer vertikalen, im Bezug zur xz-Ebene um den Winkel φ (Pfeilwinkel) gedrehten Ebene und dort wiederum um den Anstellwinkel gedreht. Der Pfeilwinkel ist positiv im Uhrzeigersinn, von der positiven z-Richtung betrachtet. Die Modellierung der Luftkräfte basiert auf der sogenannten Streifentheorie, nach der die auf einem infinitesimalen Tragflächenabschnitt wirkenden aerodynamischen Kräfte nur von den Anströmverhältnissen am selben Abschnitt abhängen, der als Teil einer zweidimensionalen Strömung angesehen wird.

2.2. Lineare Analyse

Für den Linearfall (kleine Verformungen und kleine Anstellwinkel) liefert die klassische Aeroelastik Lösungen in geschlossener Form, die aus einer analytischen Modellierung als Eigenwertproblem resultieren.

Für den ungepfeilten Flügel lautet der Divergenzstaudruck[5]

$$q_{\text{div}} = \frac{GJ\pi^2}{4L^2 a\varepsilon c^2} \tag{3}$$

wobei G das Schubmodul, J das Torsionsflächenmoment, a die Steigung der Profilpolare und ε der dimensionslose (auf die Profiltiefe c bezogene) Abstand zwischen elastischer und aerodynamischer Achse (Exzentrizität) sind. Letzterer gilt als positiv, wenn sich die aerodynamische Achse im Bezug zur elastischen Achse stromaufwärts befindet. Wird davon ausgegangen, dass die elastische Achse des Balkens in dessen Mitte liegt und unter Zugrundelegung der Theorie dünner Profile ist

$$a = 2\pi; \quad \varepsilon = \frac{1}{4} \tag{4}$$

Zwischen Staudruck, Anströmgeschwindigkeit und Luftdichte gilt die Beziehung

$$q = \frac{1}{2}\rho U^2 \tag{5}$$

Beim Erreichen des Divergenzstaudrucks wird die Tragfläche aeroelastisch instabil: Die Torsionssteifigkeit der Struktur wird durch die aeroelastische Rückkopplung aufgehoben und die statische Systemantwort wird unbestimmt. Die spannweitige Verteilung der Torsionsverdrehung wird von der Eigenform der Divergenz geliefert:

$$\vartheta_{div}\left(y\right) = \Theta \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{L}\right) \tag{6}$$

mit der Amplitude Θ als frei wählbarer Konstante.

Beim gepfeilten Flügel resultiert die Divergenzbedingung aus der Lösung eines Differentialgleichungssystems sechster Ordnung, in dem folgende Parameter erscheinen:

$$b = q\cos^2\varphi\frac{ac^2\varepsilon L^2}{GJ}; \quad d = q\sin\varphi\cos\varphi\frac{acL^3}{EI} \tag{7}$$

Die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse werden typischerweise mittels der Kurve $b = b\left(d/b\right)$ bzw. $d = d\left(b/d\right)$ dargestellt (siehe BILD 2). Zu beachten ist dabei, dass das als unabhängige Variable gewähltes Verhältnis der Parameter b und d nur von Geometrie und Material der Tragfläche sowie vom Pfeilwinkel abhängt und deshalb vorgegeben ist. Die jeweils abhängige Variable liefert dann den Wert des Divergenzstaudrucks.

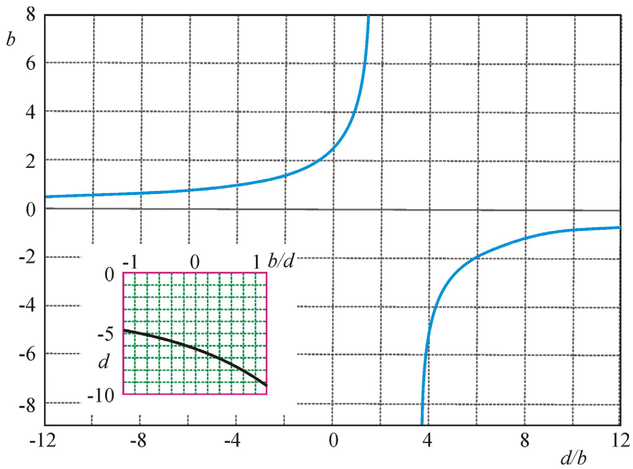

BILD 2 Ergebnisse der Stabilitätsanalyse der gepfeilten Tragfläche (adaptiert aus [6]).

Bei höheren (absoluten) Werten des Verhältnisses d/b ist das Divergenzverhalten der Tragfläche vom Biegeverhalten dominiert. Ein solcher Fall tritt bei ausreichend hoher Torsionssteifigkeit, geringer Exzentrizität und/oder hohem Pfeilwinkel auf. In diesem Fall bietet es sich an, den Parameter b beim Aufstellen des Eigenwertproblems zu Null zu setzen, was zu einer erheblichen Vereinfachung führt. In diesem Fall schreibt sich der Divergenzstaudruck

$$q_{\text{Bdiv}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\mu_1^3\frac{EI}{acL^3}\frac{1}{\left|\sin\varphi\right|\cos\varphi} \tag{8}$$

mit μ_1 als der kleinsten Lösung der Gleichung

$$2\cos\mu = -e^{-\sqrt{3}\mu} \tag{9}$$

Auf diesen Fall der reinen Biegedivergenz wird sich die später aufgeführte nichtlineare Analyse der gepfeilten Tragfläche beschränken.

2.3. Strukturmodelle für die nichtlineare Analyse

Zur Berücksichtigung großer Deformationen bei der Torsionsverformung wird die klassische Beziehung der Saint-Venant'schen Torsion zwischen dem Torsionsmoment M_t (als Schnittreaktion) und Verdrillung um einen nichtlinearen Term ergänzt[7]:

$$M_t(y) = GJ\frac{d\vartheta}{dy} + \frac{1}{2}EI_n\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)^3 \tag{10}$$

wobei der Koeffizient I_n die Wagner-Konstante darstellt, die im Falle der rechteckigen Platte den Wert $c^5 h/180$ annimmt. Das Momentengleichgewicht am infinitesimalen Balkenelement liefert die Beziehung zwischen verteiltem Torsionmoment und Schnittreaktion

$$m(y) = -\frac{dM_t}{dy} \tag{11}$$

woraus sich schließlich die nichtlineare Differentialgleichung des durch ein verteiltes Moment belasteten Torsionsbalkens ergibt:

$$\frac{d}{dy}\left[GJ\frac{d\vartheta}{dy} + \frac{1}{2}EI_n\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)^3\right] + m(y) = 0 \tag{12}$$

Für konstante Querschnittseigenschaften wird (12) zu

$$GJ\frac{d^2\vartheta}{dy^2} + \frac{3}{2}EI_n\left(\frac{d\vartheta}{dy}\right)^2\frac{d^2\vartheta}{dy^2} + m(y) = 0 \tag{13}$$

Für die einseitige Einspannung lauten die Randbedingungen zu (13) wie folgt

$$\vartheta(0) = 0; \quad \left.\frac{d\vartheta}{dy}\right|_{y=L} = 0 \tag{14}$$

Der nichtlineare Term in den Gleichungen (10) bzw. (12)-(13) resultiert aus der Verformung der axialen Fasern bei großen Drehwinkeln. Die ursprünglich geraden Fasern nehmen die Gestalt einer Helixkurve an. Die Anpassung der Faser an die dadurch verlängerte Strecke induziert Zugspannungen, die für eine Erhöhung der Torsionssteifigkeit sorgen. Zur Veranschaulichung werden in BILD 3 zwei Last-Verformungskurven eines durch ein konstantes verteiltes Moment belasteten Balkens dargestellt. Aufgetragen wird der Drehwinkel am freien Ende als Funktion des dimensionslosen Lastparameters mL^2/GJ, für $3EI_n/2GJL^2 = 0$ (Linearfall) bzw. $= 1$ (nichtlinear).

Zur nichtlinearen Analyse der Biegedivergenz wird die Differentialgleichung des durch eine verteilte Kraft belasteten Biegebalkens unter Berücksichtigung großer Verformungen benötigt. Die Streckenlast wirkt am verformten Balken immer senkrecht zur verformten Fläche.

Das Gleichgewicht am infinitesimalen Balkenelement liefert

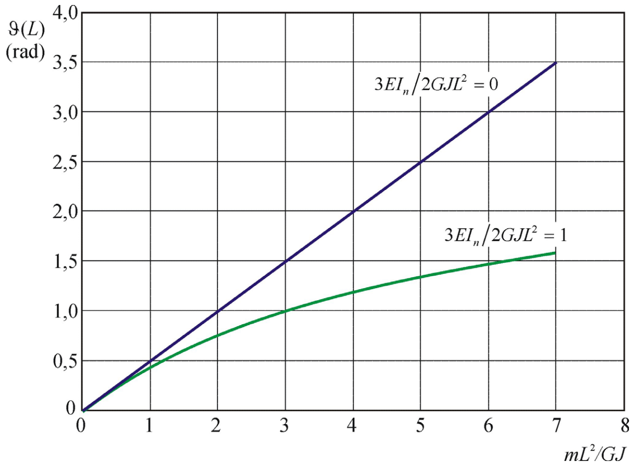

BILD 3 Last-Verformungskurven beim Torsionsbalken mit und ohne nichtlinearen Term.

$$p + \frac{dQ}{ds} + N\frac{d\psi}{ds} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{dN}{ds} - Q\frac{d\psi}{ds} = 0 \tag{16}$$

wobei p die Streckenlast, N die axiale Schnittreaktion und Q die Querkraft sind. Die elastische Linie des Balkens wird mittels des Rotationswinkels ψ ausgedrückt. Hinzu kommt die Beziehung zwischen Biegemoment und Querkraft

$$Q = -\frac{dM_b}{ds} \tag{17}$$

und schließlich gilt die Elastizitätsbeziehung (1), die wie folgt geschrieben wird:

$$M_b = EI\frac{d\psi}{ds} \tag{18}$$

Einführen von (17) und (18) in (15)-(16) liefert

$$\frac{dN}{ds} + EI\frac{d\psi}{ds}\frac{d^2\psi}{ds^2} = 0 \tag{19}$$

$$p - EI\frac{d^3\psi}{ds^3} + \frac{d\psi}{ds}N = 0 \tag{20}$$

Bei (19)-(20) handelt es sich um ein Differentialgleichungs-system vierter Ordnung, das mit einer kinematischen Randbedingung für ψ (Fixierung des Rotationswinkels an der Einspannung) und drei statischen Randbedingungen am freien Ende gelöst wird, welche die Normalkraft, die Querkraft und das Biegemoment festlegen. Gleichung (19) kann direkt integriert werden:

$$N + \frac{EI}{2}\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 = K \tag{21}$$

Die Konstante K steht fest, wenn sowohl das Biegemoment als auch die Normalkraft am Balkenende gegeben sind. Für verschwindende konzentrierte Kräfte am freien Ende ist $K = 0$ und außerdem

$$\psi(0)=0;\quad \left.\frac{d\psi}{ds}\right|_{s=L}=0;\quad \left.\frac{d^2\psi}{ds^2}\right|_{s=L}=0; \tag{22}$$

Aus (21) und (15) ergibt sich mit $K=0$

$$2\left(EI\frac{d^3\psi}{ds^3}-p\right)+EI\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^3=0 \tag{23}$$

2.4. Nichtlineare aerodynamische Kräfte

Aufgrund der großen Deformationen wird die Tragfläche unter teilweise großem Anstellwinkel angeströmt. Das hat zwei wichtige Folgen: Zum einen muss die Auftriebspolare weit über den linearen Bereich hinaus betrachtet werden. Zum anderen vergrößert sich mit zunehmendem Anstellwinkel der Einfluss des aerodynamischen Widerstandes auf Biege- und Torsionsverformung. Im Gegensatz zur klassischen, linearen aeroelastischen Analyse müssen deshalb nun grundsätzlich alle drei Starrkörperresultierenden Auftrieb, Widerstand und aerodynamisches Moment berücksichtigt werden. Ablöseeffekte und Turbulenz spielen eine wichtige Rolle und deshalb ist man in aller Regel auf experimentelle Ergebnisse angewiesen. Insbesondere spielt bei der dünnen Platte die genaue Beschaffenheit der Vorderkante (etwa der Krümmungsradius) eine wesentliche Rolle, da sie sich stark auf den Anstellwinkel auswirkt, bei dem die Strömung abreißt.

BILD 4 zeigt die Polaren des NACA Profils 0012 über den gesamten Anstellwinkelbereich von 0° bis 360°. Ergebnisse von Messungen an dünnen Platten wurden für verschiedene Reynoldszahlen von Schmitz[8] veröffentlicht (siehe BILD 5), jedoch über einen begrenzten Anstellwinkelbereich. In beiden Fällen wird das aerodynamische Moment auf die Neutralachse bezogen. Im Linearfall ist die Wahl der Neutralachse als Bezugsachse des Moments von Vorteil, da in diesem Fall das aerodynamische Moment anstellwinkelunabhängig ist (und für symmetrische Profile Null ist). Beim Überschreiten der Abrissgrenze wird jedoch das aerodynamische Moment ohnehin anstellwinkelabhängig, weshalb bei nichtlinearer Betrachtung die Wahl der Bezugsachse prinzipiell irrelevant ist.

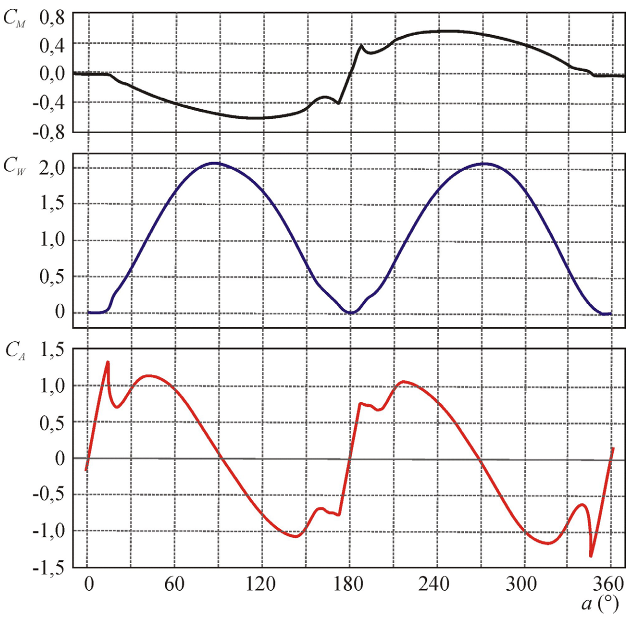

BILD 4 Polaren des NACA-Profils 0012. Auftriebs-, Widerstands- und Momentenbeiwert (jeweils C_A, C_W, C_M); Re= $1{,}8\cdot10^6$ (adaptiert aus [9]).

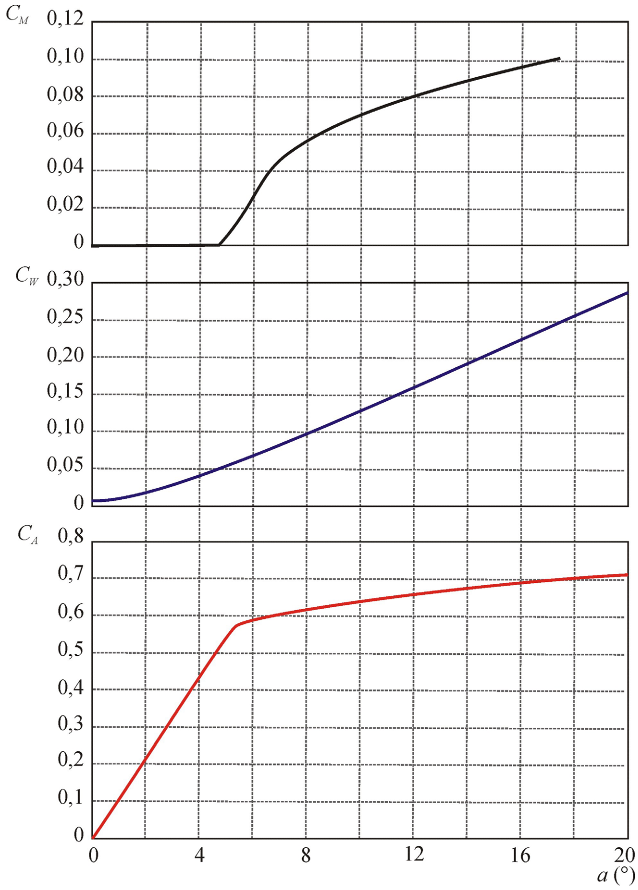

BILD 5 Polaren einer dünnen Platte. Auftriebs-, Widerstands- und Momentenbeiwert; Re= 168000 (adaptiert aus [8]).

2.5. Nichtlineare Torsionsdivergenz

Sind für einen gegebenen Anstellwinkelbereich die Auftriebs-, die Widerstands-, sowie die Momentenpolare (bezogen auf den Punkt P des Profils) verfügbar, so gilt für das Moment um die elastische Achse der Platte:

$$\begin{aligned}m(y)&=m_P(\alpha+\vartheta)+e_P qcC_A(\alpha+\vartheta)\cos(\alpha+\vartheta)+\\&+e_P qcC_W(\alpha+\vartheta)\sin(\alpha+\vartheta)\end{aligned} \tag{24}$$

wobei die Exzentrizität e_P mit Bezug auf den Punkt P berechnet wird wird.

Die nichtlineare Gleichung des aeroelastischen Gleichgewichts ergibt sich dann aus (13) und (24) mit den Randbedingungen (14). Der Linearfall (mit aerodynamischen Kräfte aus der Theorie der dünnen Profile) ergibt sich als Sonderfall der nichtlinearen Gleichung durch die Festlegung

$$m(y)=2\pi eqc(\alpha+\vartheta);\quad I_n=0 \tag{25}$$

2.6. Nichtlineare Biegedivergenz

Zur Aufstellung des aeroelastischen Gleichgewichts bei der gepfeilten Tragfläche werden zwei Bezugssysteme betrachtet. Das erste ist das bereits im Abschnitt 2.1 definierte globale *xyz*-System. Das zweite ist ein lokales, auf jeden Tragflächenstreifen bezogenes, orthogonales Bezugssystem mit Ursprung in der Profilmitte, ξ-Achse parallel zur *x*-Achse, η-Achse tangent zur verformten Mittellinie der Tragfläche und ζ-Achse normal zur verformten Tragfläche (siehe BILD 6).

Die Komponenten der Anströmgeschwindigkeit im globalen Bezugssystem sind

$$U_x = U\cos\alpha\cos\varphi \tag{26}$$

$$U_y = U\cos\alpha\sin\varphi \tag{27}$$

$$U_z = U\sin\alpha \tag{28}$$

Für einen gegebenen Flügelstreifen können dann die Komponenten errechnet werden:

$$U_\xi = U_x \tag{29}$$

$$U_\eta = U_y\cos\psi + U_z\sin\psi \tag{30}$$

$$U_\zeta = -U_y\sin\psi + U_z\cos\psi \tag{31}$$

Der gesamte Anstellwinkel der Strömung am Flügelstreifen ist dann

$$\begin{aligned}\alpha_{eff} &= \arctan\left(\frac{U_\zeta}{U_\xi}\right) = \arctan\left(\frac{-U_y\sin\psi + U_z\cos\psi}{U_x}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{-\sin\varphi\sin\psi + \tan\alpha\cos\psi}{\cos\varphi}\right)\end{aligned} \tag{32}$$

und der effektive Staudruck lautet

$$\begin{aligned}q_{eff} &= \frac{1}{2}\rho\left(U_\xi^2 + U_\zeta^2\right) = \\ &= q\left[\left(\cos\alpha\cos\varphi\right)^2 + \left(\sin\alpha\cos\psi - \cos\alpha\sin\varphi\sin\psi\right)^2\right]\end{aligned} \tag{33}$$

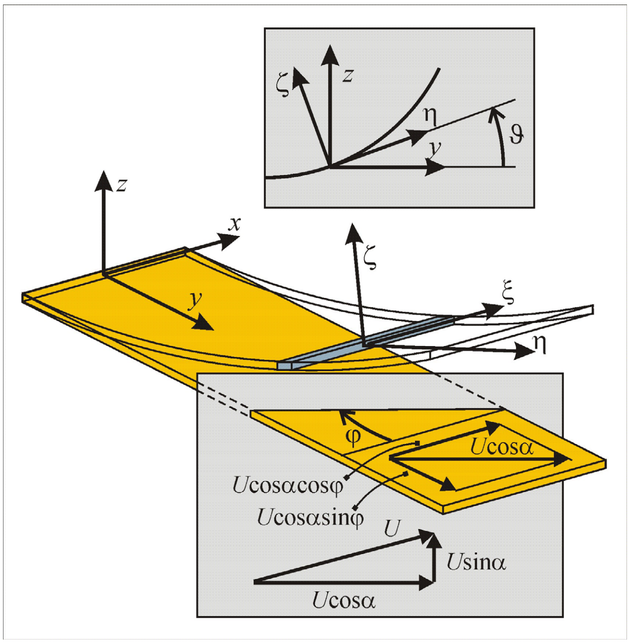

BILD 6 Strömungsverhältnisse an der gepfeilten Tragfläche.

Schließlich schreibt sich die Schnittlast wie folgt:

$$m(s) = q_{eff}\,c\left[C_A\left(\alpha_{eff}\right)\cos\alpha_{eff} + C_W\left(\alpha_{eff}\right)\sin\alpha_{eff}\right] \tag{34}$$

und die nichtlineare Gleichung des aeroelastischen Gleichgewichts beim gepfeilten, torsionsstarren Flügel resultiert aus (34), mit (32)-(33) und (23) und den Randedingungen (22).

Der Linearfall ergibt sich durch

$$m(s) = 2\pi qc\cos^2\varphi\left(\alpha - \psi\right) \tag{35}$$

und durch die Vernachlässigung des 2. Terms in (23).

2.7. Das Kreisbogenverfahren

Zur effizienten Lösung des sogenannten *elastica*-Problems (Biegung eines undehnbaren, schubstarren Balkens bei großen Verformungen und kleinen Verzerrungen[10]) wurde im Rahmen dieser Arbeit das Kreisbogenverfahren entwickelt. Dabei wird die verformte Balkenmittellinie in N kreisförmige Abschnitte unterteilt. Obwohl dies nicht zwingend notwendig ist, wird im Folgenden von gleichlangen Abschnitten ausgegangen. Beim Übergang zwischen den Abschnitten besteht Kontinuität des Rotationswinkels. Die Geometrie der Balkenverformung wird somit – bis ggf. auf Starrkörperbewegungen bei unterbestimmter Lagerung – vollständig durch die Werte der Krümmung der einzelnen Abschnitte $\chi_1, \chi_2, \dots \chi_N$ beschrieben. In dem hier vorliegenden Fall der einseitigen Einspannung lassen sich die Werte der Drehung an den $N+1$ Knoten $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_N$ unmittelbar aus den Krümmungswerten errechnen:

$$\psi_i = l\sum_{j=0}^{i}\chi_j \tag{36}$$

wobei l die Abschnittlänge ist:

$$l = \frac{L}{N} \tag{37}$$

Es gilt $\psi_0 = 0$ (Einspannung am ersten Knoten (Knotenindex Null). Es wird nun zum i-ten Knoten das lokale Bezugssystem mit den Achsen $\eta^{(i)}, \zeta^{(i)}$ definiert, das Ursprung im Knoten selbst hat und im Bezug auf das *yz*-System um den Winkel ψ_i gedreht ist. Die Koordinaten des i-ten Knotens im (i-1)-ten lokalen System schreiben sich

$$\eta_i^{(i-1)} = \frac{\sin\left(l\chi_i\right)}{\chi_i};\quad \zeta_i^{(i-1)} = \frac{1-\cos\left(l\chi_i\right)}{\chi_i},\quad i = 1\dots N \tag{38}$$

Im globalen System werden die Knotenkoordinaten rekursiv wie folgt errechnet:

$$y_i = y_{i-1} + \eta_i^{(i-1)}\cos\psi_{i-1} - \zeta_i^{(i-1)}\sin\psi_{i-1} \tag{39}$$

$$z_i = z_{i-1} + \eta_i^{(i-1)}\sin\psi_{i-1} + \zeta_i^{(i-1)}\cos\psi_{i-1} \tag{40}$$

mit

$$y_0 = 0 \tag{41}$$

$$z_0 = 0 \tag{42}$$

Wird die Belastung des Balkens auf Knotenkräfte umgerechnet, die (in der *xz*-Ebene) normal zur verformten elastischen Linie wirken, so lautet das Biegemoment am i-ten Knoten

$$M_i = \sum_{j=i+1}^{N} \left[F_j \sin\psi_j \left(z_j - z_i \right) + F_j \cos\psi_j \left(y_j - y_i \right) \right] \quad (43)$$

wobei F_i die am i-ten Knoten wirkende Kraft ist. Die unbekannten Werte der Krümmung werden dann über die Elastizitätsbeziehung

$$\chi_i = \frac{M_i}{EI} \quad (44)$$

iterativ errechnet: Nach Wahl eines Satzes von Anfangswerten werden sukzessive die Knotendrehungen (aus (36)), die Knotenpositionen (aus (38)-(42)), die Biegemomente (aus (43)) und schließlich die neuen Krümmungswerte (aus (44)) errechnet. Die Prozedur wird dann wiederholt, bis Konvergenz eintritt.

Die Prozedur eignet sich auch zur Lösung des *elastica*-Problems bei anderen Lagerbedingungen. Im Falle eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens gehört die Drehung des ersten Knotens zu den Unbekannten des Problems. Das Nullsetzen der z-Verschiebung des letzten Knotens liefert dann die erforderliche zusätzliche Gleichung.

BILD 7 zeigt die mittels des Kreisbogenverfahrens errechnete Verformung eines Balkens mit gleichmäßiger Streckenlast (siehe Abschnitt 2.3). Die Ergebnisse stimmen sehr gut mit denen überein, die aus der numerischen Lösung der Gleichung (22)-(23) resultieren.

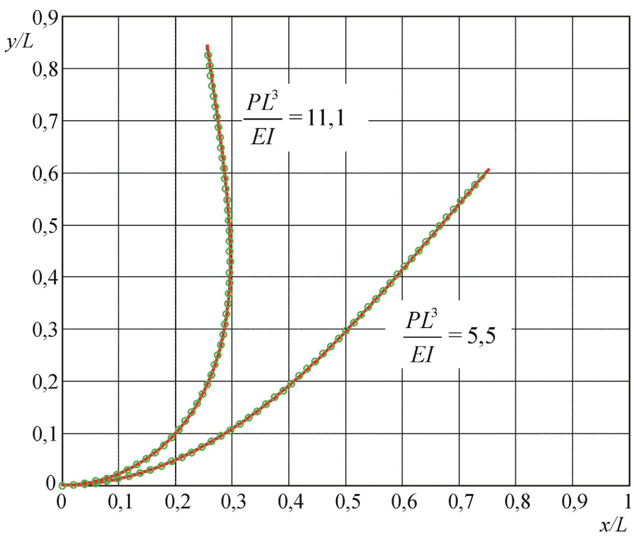

BILD 7 Balken mit gleichmäßiger Streckenlast. Vergleich zwischen der mit dem Kreisbogenverfahren berechneten Lösung (durchgezogene Linie) und der Lösung aus der Differentialgleichung (Kreise).

3. ERGEBNISSE

3.1. Beispielstruktur

Die im vorherigen Hauptabschnitt beschriebenen mathematischen Modelle des aeroelastischen Gleichgewichts wurden exemplarisch auf den Fall einer dünnen Glasfaserplatte angewendet. Die geometrischen Daten und die Materialkennwerte der Beispielstruktur sind in TABELLE 1 aufgelistet.

Für die Luftdichte wurde den Wert $\rho = 1,2\ \mathrm{Kg/m^3}$ verwendet. Aus (3) und mit dem Torsionsflächenmoment dünner rechteckiger Profile:

$$J = \frac{1}{3} c h^3 \quad (45)$$

ergibt sich die Divergenzgeschwindigkeit $U_{div} = 14,7\ \mathrm{m/s}$. Die entsprechende Reynoldszahl (bei einer Luftviskosität $\eta = 17,1\ \mu\mathrm{Pa \cdot s}$) beträgt 51700. Wird der Geschwindigkeitsbereich von Interesse auf $6 \cdot U_{div}$ ausgedehnt, so ergibt sich eine mittlere Reynoldszahl von 155100, die in die Nähe des Wertes Re=168000 kommt, für den die Polaren im BILD 5 gemessen wurden.

Länge (Halbspannweite)	L	0,25 m
Breite (Profiltiefe)	c	50 mm
Dicke	h	0,5 mm
Schubmodul	G	6,22 GPa
Elastizitätsmodul	E	25,7 GPa
Querkontraktionszahl	ν	0,22

TABELLE 1 Geometrische Daten und Materialkennwerte der Beispielstruktur.

3.2. Interpolation der aerodynamischen Kräfte

Zur Berechnung der aerodynamischen Koeffizienten der aeroelastischen Gleichungen wurden die in BILD 5 dargestellten Polaren durch Fourierreihen in der Form

$$C_A(\alpha) = \sum_{k=1}^{R} \left[A_{Ak} \sin 2k\alpha \right] \quad (46)$$

$$C_W(\alpha) = \sum_{k=0}^{R} \left[A_{Wk} \cos 2k\alpha \right] \quad (47)$$

$$C_M(\alpha) = \sum_{k=1}^{R} \left[A_{Mk} \sin k\alpha \right] \quad (48)$$

angenähert. Die Gestalt der Reihenentwicklung berücksichtigt unabhängig von den Koeffizienten die Symmetrie- und Periodizitätseigenschaften der Polaren (gerade Funktion für den Widerstand, ungerade Funktionen für Auftrieb und Moment; Periode π für Auftrieb und Widerstand, 2π für das Moment). Die Koeffizienten wurden so gewählt, um eine möglichst genaue Wiedergabe der Polaren der ebenen Platte (siehe BILD 5) im Bereich der verfügbaren Messwerte zu erhalten und im übrigen Kurvenabschnitt (bis $\alpha = \pi/2$) qualitativ den erwarteten Kurvenverlauf (siehe beispielsweise BILD 4) abzubilden.

3.3. Torsionsdivergenz

Zur Lösung der aeroelastischen Gleichungen für den Fall der ungepfeilten Tragfläche wurde ein kommerzielles Berechnungsprogramm (ODE von *Numerical Mathematics*) verwendet, das auf der Entwicklung der zu ermittelnden Funktion in eine Potenzreihe basiert. Wesentliche Parameter der Analyse sind:

- Der Staudruck der Anströmung, ausgedrückt durch den Parameter $\gamma = q/q_{div}$
- Der Anstellwinkel α der ungestörten Strömung.

Die aeroelastische Antwort des Systems (Torsionsdrehwinkel als Funktion der dimensionslosen Spannweitenkoordinate y/L) für $\gamma = 0{,}9$ und $\alpha = 1{,}15°$ ist in BILD 8 dargestellt. Es werden die Kurven aus der linearen und aus der nichtlinearen Analyse gegenübergestellt.

BILD 9 zeigt die überkritische Verformung (ausgelenkte, stabile Lage bei $\alpha = 0$) für verschiedene Werte von γ.

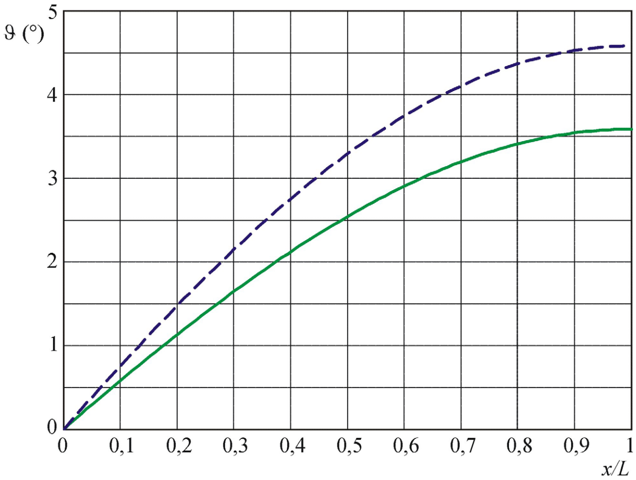

BILD 8 Unterkritische Systemantwort ($\gamma = 0{,}9$, $\alpha = 1{,}15°$) linear (gestrichelte Linie) und nichtlinear (durchgezogene Linie).

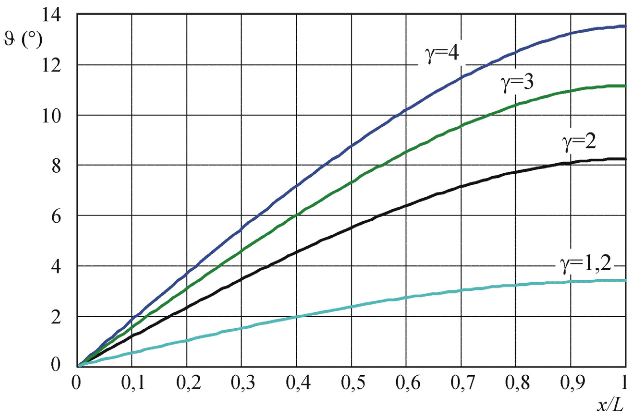

BILD 9 Überkritische Verformung ($\alpha = 0$) für verschiedene Werte von γ).

Schließlich werden in BILD 10 die Instabilitätskurven gezeigt, in denen für verschiedenen Werte von α als Kurvenparameter der dimensionslose Staudruck γ als Funktion des Drehwinkels am freien Balkenende $\vartheta(L)$ aufgetragen wird. Der qualitative Verlauf der Kurven ähnelt erwartungsgemäß den Last-Verformungskurven eines Knickstabes mit Imperfektionen. Der Verzweigungspunkt bei $\alpha = 0$ liegt wie erwartet bei $\gamma = 1$. Bei $\alpha \neq 0$ nehmen die Kurven die typische unsymmetrische Gestalt an, mit einem durchgehenden stabilen Abschnitt und einer weiteren Kurve mit je einem stabilen und einem instabilen Abschnitt. Der Divergenzstaudruck, definiert als derjenige Staudruck, ab dem drei Lösungen existieren, wird mit zunehmendem Anstellwinkel höher. Zu welcher der drei Lösungen im überkritischen Bereich der Lösungsalgorithmus konvergiert, hängt von der Wahl der ersten Schätzung der Lösung ab.

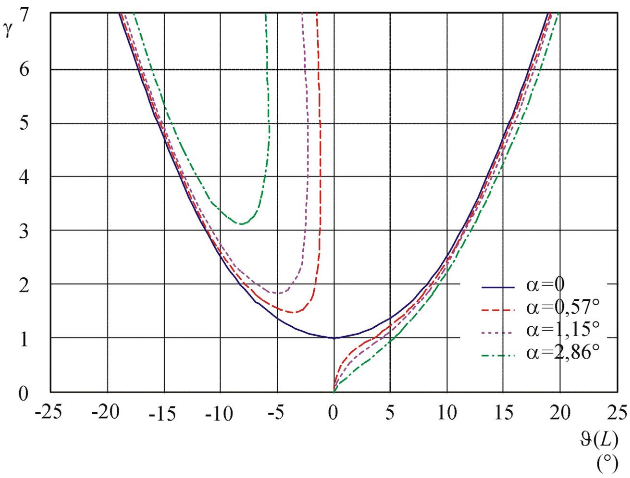

BILD 10 Instabilitätskurven der Torsionsdivergenz.

3.4. Biegedivergenz

Für die gepfeilte Tragfläche wurde das Kreisbogenverfahren verwendet. Die aeroelastische Rückkopplung wurde dabei durch eine iterative Anpassung der verteilten Last berücksichtigt. Parameter der Analyse sind hier γ, α und der Pfeilwinkel φ. Wo nichts anderes angegeben, wird in γ der Staudruck auf den Biegedivergenzstaudruck für $\varphi = -45°$ bezogen.

In BILD 11 wird die Systemantwort (Auslenkung als Funktion der Spannweitenkoordinate, beide auf die Balkenlänge bezogen) für $\gamma = 0{,}9$, $\varphi = -45°$ und $\alpha = 0{,}01$ rad (0,57°) dargestellt (linear und nichtlinear).

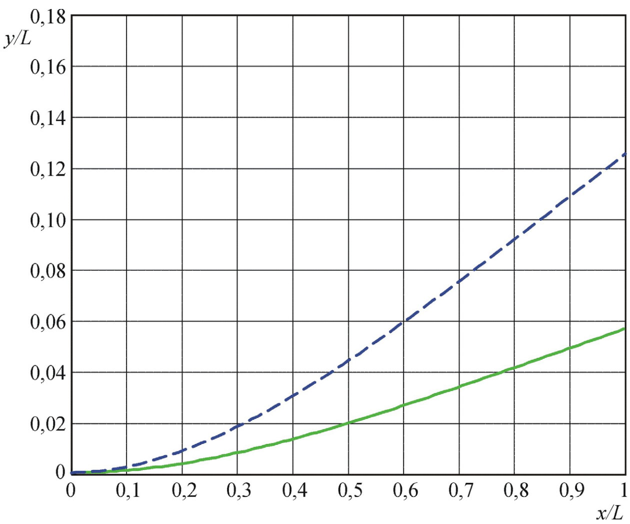

BILD 11 Unterkritische Systemantwort ($\gamma = 0{,}9$, $\varphi = -45°$, $\alpha = 0{,}57°$) linear (gestrichelte Linie) und nichtlinear (durchgezogene Linie).

Die überkritische Verformung für $\varphi = -45°$ und verschiedene Werte von γ wird in BILD 12 gezeigt, während in BILD 13 der Staudruck konstant gehalten und der Pfeilwinkel variiert wird.

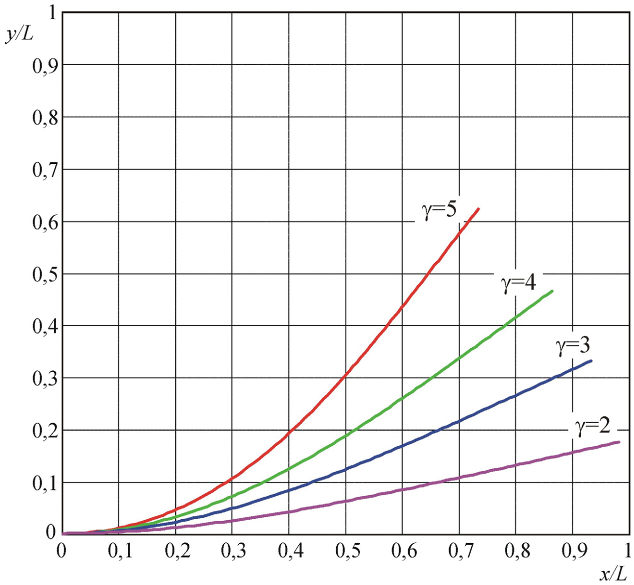

BILD 12 Überkritische Verformung ($\varphi = -45°$, $\alpha = 0$) für verschiedene Werte von γ).

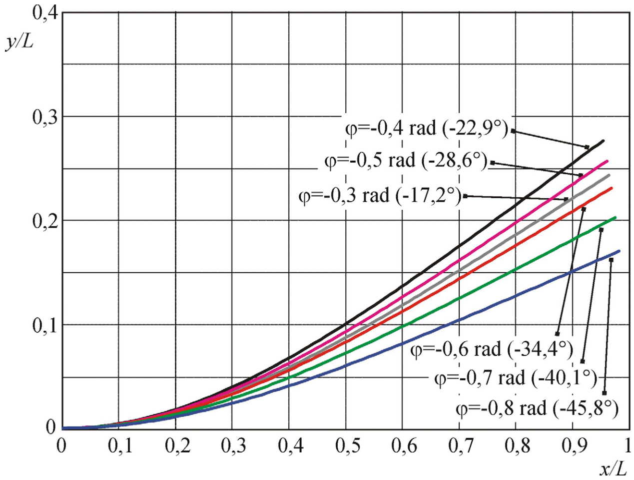

BILD 13 Überkritische Verformung ($\gamma = 2$, $\alpha = 0$).

Die Instabilitätskurven der Biegedivergenz sind in BILD 14 zu sehen. Auslenkungsparameter ist hier die längenbezogene Auslenkung am Balkenende. Im Gegensatz zu den Kurven des Torsionsfalls sind hier die Kurvenabschnitte, die die instabilen Lösungen enthalten, nicht sichtbar. Der Grund hierfür liegt in der Natur des Lösungsverfahrens mit einer „physikalischen" Iterationsschleife, in der die Verformung und die aerodynamischen Kräfte rückgekoppelt werden: In der Nähe eines instabilen Gleichgewichts neigen die Kräfte definitionsgemäß dazu, das System von der Lösung zu entfernen.

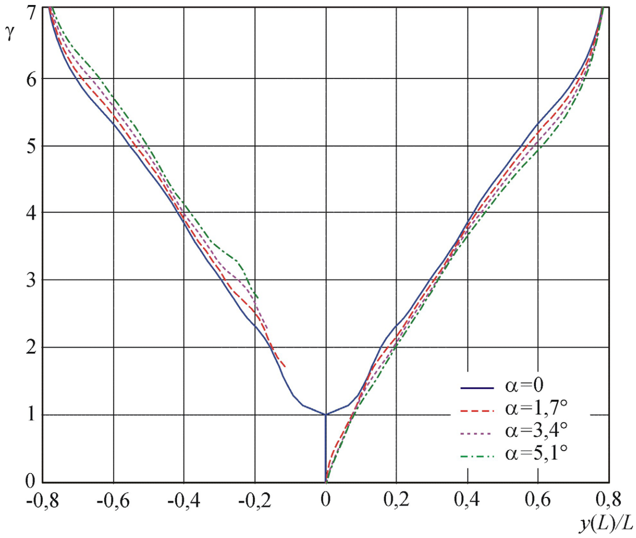

BILD 14 Instabilitätskurven der Biegedivergenz.

3.5. Aeroelastische Verstärkung

Der verhältnismäßig große Abstand zwischen der Kurve für $\alpha = 0$ und den Kurven mit $\alpha > 0$ in BILD 10 bzw. BILD 14 für Werte des Staudruck knapp unter dem kritischen Staudruck weist auf das Potential hin, welches die Nutzung aeroelastischer Effekte zur Verstärkung der Wirkung von Aktuatoren mit geringer Energiedichte (z.B. Piezoaktoren) bietet. Die (geringe) primäre Aktorwirkung reicht aus, um eine kleine Störung in das System einzuführen und somit zwischen den Kurven zu wechseln. Die große Wirkung auf die Systemverformung ergibt sich aus den Luftkräften aufgrund der aeroelastischen Kopplung.

Dieser Effekt wird in BILD 15 bzw. BILD 16 verdeutlicht, in denen jeweils für den Fall der Torsions- und der Biegedivergenz die Kurven des Wurzelmoments der Tragfläche als Funktion von α mit und ohne aeroelastische Verstärkung (für $\gamma = 1$) dargestellt werden. Stellt die betrachtete Tragfläche etwa den Halbflügel eines Fluggerätes dar, so entspricht das Wurzelmoment – beim gepfeilten Flügel bis auf den Faktor $\cos\varphi$ – dem Beitrag des Halbflügels zum Rollmoment.

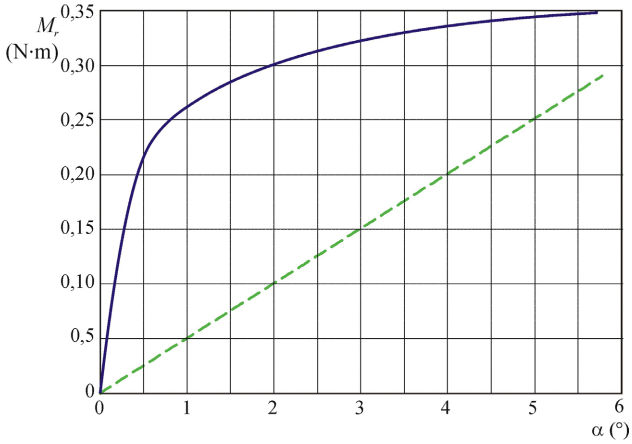

BILD 15 Aeroelastische Verstärkung bei Torsionsdivergenz.

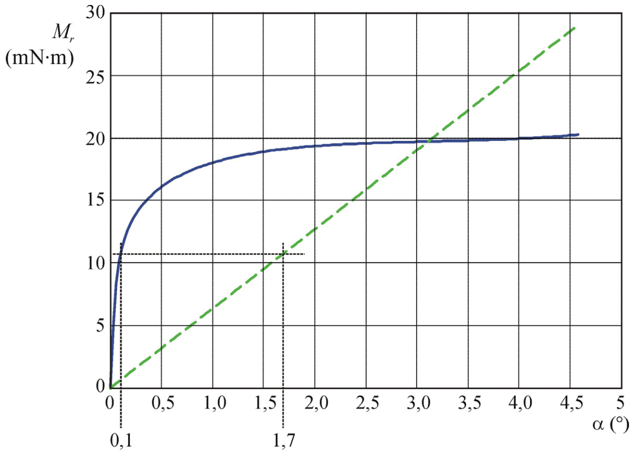

BILD 16 Aeroelastische Verstärkung bei Biegedivergenz.

Im Falle der Biegedivergenz würde sich beispielsweise bei einer gleichmäßigen Auftriebserhöhung (etwa durch aktive Profilverwölbung), die einem aufgeprägten Anstellwinkel von lediglich 0,1° entspricht, ein Rollmoment ergeben, das bei starrem Flügel den Anstellwinkel $\alpha = 1,7°$ erfordern würde (siehe BILD 16).

4. AUSBLICK

Die vorgestellten Modelle und Verfahren stellen einen ersten, elementaren Beitrag zu einer Thematik dar, die im Rahmen der intensiven Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der Formadaption an Tragflächen in den nächsten Jahren ein stetig wachsendes Interesse wecken wird: Die Analyse aeroelastisch kritischer und postkritischer Zustände nachgiebiger, umströmter Strukturen. An der Empa Dübendorf wird diese Thematik als Teil eines Vorhabens größerer Tragweite bearbeitet, das sich als Ziel setzt, durch die Nutzung aeroelastischer Verstärkungseffekte die Fortschritte der letzten zwanzig Jahre auf dem Gebiet der Festkörperaktorik zur Kontrolle der Tragflächengeometrie nutzbar zu machen.

Geplante weitere Schritte in dieser Richtung sind der Bau geeigneter Versuchsträger, die experimentelle Ermittlung der entsprechenden Polaren und die daraus resultierende Anpassung der Analysenergebnisse. Ferner sind die direkte Überprüfung der Ergebnisse mittels aeroelastischer Versuche sowie die Aktivierung der Tragflächenmodelle in Instabilitätsnähe mittels Festkörperaktorik vorgesehen.

5. LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. F. Campanile, und D. Sachau, 2000. “The belt-rib concept: a structronic approach to variable camber”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11 (3), 215-224.

[2] E. W. Pendleton, D. Bessette, P. B. Field, G. D. Miller und K. E. Griffin, 2000. ‘Active Aeroelastic Wing flight research program: technical program and model analytical development’, *Journal of Aircraft*, 37(4), 554–561.

[3] L. F. Campanile, 2006. “Shape-adaptive wings-the unfulfilled dream of flight”, in: R. Liebe (ed.), Flow phenomena in nature, WIT press, Southampton, Vol. 2, 400-419.

[4] I. Szabo, 2003. Einführung in die Technische Mechanik, Springer, Berlin 127-129.

[5] H. W. Försching, 1974. Grundlagen der Aeroelastik, Springer, Berlin, 422.

[6] F. W. Diederich und B. Budianski, 1948. NACA Report A346083.

[7] N. S. Trahair, 2003. “Non-linear elastic non-uniform torsion”, Research report No. R828, Department of Civil Engineering, The University of Sydney.

[8] F. W. Schmitz, Aerodynamik des Flugmodells, 1975. Zuerl, Steinebach-Wörthsee, Tafel II

[9] F. W. Riegels, Aerodynamische Profile, 1958. Oldenbourg, München. 252

[10] W. Gorski, 1976. “A review of literature and a bibliography on finite elastic deflection of bars”, *Civil Engineering Transactions*, 18(2), 74–85.