

MODELLIERUNG DES TURBULENTEN WÄRMETRANSPORTS FÜR KANAL- UND STUFENSTRÖMUNGEN

J. Prause¹, D. von Terzi², H. Schneider, H.-J. Bauer
Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Thermische Strömungsmaschinen,
Kaiserstraße 12, 76131 Karlsruhe, Deutschland

Zusammenfassung

Das Wärmetransportmodell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl wurde für verschiedene Strömungsfälle auf mögliche Einsatzgrenzen untersucht. Das Modell basiert auf der Annahme ähnlicher Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder. Für die untersuchten Konfigurationen wurden Referenzdaten mit hochauflösender Large-Eddy-Simulation (LES) erstellt, welche mit Literaturwerten validiert wurden. Bei der Wärmetransportmodellierung wurde das gemittelte LES-Geschwindigkeitsfeld verwendet, um Fehler durch die Turbulenzmodellierung möglichst gering zu halten. Für eine turbulente Kanalströmung wurden unterschiedliche Randbedingungen für Temperatur und Geschwindigkeit gewählt, so dass die jeweiligen Profile nicht ähnlich sind. Obwohl die Voraussetzung der Ähnlichkeit nicht gegeben war, konnte das Wärmetransportmodell die Temperaturverteilung sehr gut wiedergeben. Anschließend wurde der turbulente Wärmetransport an einer rückwärtsgewandten Stufe untersucht. Im Ablösegebiet ist das gemittelte Strömungsfeld stark zweidimensional. Die modellierte Temperaturverteilung weicht in diesem Gebiet bis zu 100% von den realen Werten ab.

SYMBOLVERZEICHNIS

Lateinische Symbole

a	Temperaturleitfähigkeit
c_p	Spezifische Wärmekapazität
Nu	Nusselt-Zahl = $2\delta q_w \rho c_p / (a \Delta \bar{\theta})$
p	Druck
Pr	Prandtl-Zahl = ν/a
q	Wärmestrom
Re	Reynoldszahl = $\delta(u) / \nu$
S_q	Thermischer Quellterm
T	Temperatur
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten
x, y, z	Raumkoordinaten

Griechische Symbole

δ	Referenzlänge
δ_{ij}	Kronecker-Delta
θ	Dimensionslose Temperatur
ν	Kinematische Viskosität
ρ	Dichte
τ	Schubspannung

Indizes

c	Kanalmitte
i, j	Vektor- bzw. Tensorindizes
rms	root-mean-square
t	turbulent
τ	bezüglich Gradienten an der Wand
w	Wand
$(\bar{\quad})$	statistischer Mittelwert
(\prime)	Fluktuation
$(\prime)^+$	Größe in viskosen Einheiten
(\prime)	räumlich gemittelt über Kanalhöhe

1. EINLEITUNG

Die Qualität vieler technischer Entwicklungen ist abhängig von einer möglichst genauen Vorhersage des turbulenten Wärmetransports. Dabei werden zunehmend numerische Verfahren eingesetzt, da die Ergebnisse oft schneller und günstiger zu erhalten sind als durch Experimente. Darüber hinaus können numerische Simulationen auch detailliertere und komplementäre Resultate liefern.

In dieser Arbeit wurde die Leistungsfähigkeit des Wärmetransportmodells mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl untersucht. Es ist eines der am häufigsten in der Industrie und Forschung verwendeten Modelle. Zunächst wurden Referenzdaten für eine Kanal- und Stufenströmung mittels hochauflösender Large-Eddy-Simulation (LES) erstellt. Diese Daten wurden mit Untersuchungen aus der Literatur validiert. Für beide Geometrien stimmen die berechneten Resultate sehr gut mit den Vergleichsdaten überein.

Zur Untersuchung des Wärmetransportmodells wurde das gemittelte Geschwindigkeitsfeld der LES verwendet, um den Einfluss möglicher Fehler der Strömungsmodellierung auf die Modellierung des Wärmetransports ausschließen zu können. Das Wärmetransportmodell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl setzt eine Ähnlichkeit von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld voraus. Es wurde für Strömungen entwickelt, die im statistischen Mittel eindimensional sind. Somit ist davon auszugehen, dass das Modell gute Ergebnisse für einfache Kanal- und Rohrströmungen liefert. Bei komplexeren Geometrien, wie z.B. Stufen, sind die im Modell verwendeten Annahmen nicht gültig. Mittels Variation von Geometrien und Randbedingungen wurden mögliche Grenzen für den Einsatz des Modells bestimmt.

¹Derzeitige Anschrift: ESA-ESTEC, Noordwijk, Niederlande
Korrespondierender Autor: juliane.prause@esa.int

²Derzeitige Anschrift: GE Global Research Europe, München, Deutschland

2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN ZUR WÄRMETRANSPORTMODELLIERUNG

2.1. Numerische Strömungssimulation

Turbulente Strömungen können durch verschiedene Simulationsverfahren berechnet werden. Die genauesten Resultate können mit Direkter Numerischer Simulation (DNS) erzielt werden, da die Grundgleichungen direkt gelöst werden. Allerdings reichen die derzeitigen Rechnerkapazitäten nicht aus, um industrielle Anwendungsfälle mit DNS berechnen zu können. Aus diesem Grund werden für die meisten technischen Anwendungen zeitlich gemittelte Erhaltungsgleichungen gelöst (Gleichungen 1 und 2). Hierbei müssen die Turbulenzgrößen modelliert werden. Da die Turbulenzmodelle nicht exakt sind, können sich Ungenauigkeiten bei der numerischen Berechnung ergeben. Strömungssimulationen bei denen die gemittelten Erhaltungsgleichungen gelöst werden, werden als Reynolds-Averaged-Navier-Stokes-Verfahren (RANS) bezeichnet. Sie sind die am häufigsten in der Industrie eingesetzten Verfahren, da sie in vielen Fällen ausreichend genaue Lösungen in einer akzeptablen Rechenzeit liefern können. Eine weitere Alternative ist die Large-Eddy-Simulation. Hierbei werden die großen, energietragenden Wirbel direkt aufgelöst. Nur die kleinen, energiearmen Wirbel werden modelliert.

2.2. Turbulenzmodellierung

Das Wärmetransportmodell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl basiert auf der Lösung der zeitlich gemittelten Erhaltungsgleichung für die Temperatur. Dazu wird die instantane Größe Φ in einen statistisch gemittelten Anteil $\bar{\Phi}$ und eine Schwankungsgröße Φ' zerlegt. Die zeitlich gemittelten, inkompressiblen Transportgleichungen für Impuls und Energie lauten wie folgt.

$$(1) \quad u_i \rho \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$$

$$(2) \quad \bar{u}_j \rho c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_j} - \rho c_p \frac{\partial \overline{u_j' \theta'}}{\partial x_j} + \bar{S}_q$$

Für newtonsche Fluide kann die Schubspannung τ durch die Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten bestimmt werden. Der Proportionalitätsfaktor entspricht der kinematischen Viskosität ν , welche stoffabhängig ist. Eine ähnliche Beziehung gilt für die Wärmeströme durch Wärmeleitung. Sie sind proportional zum Temperaturgradienten. Das Verhältnis wird bestimmt durch die Temperaturleitfähigkeit a .

$$(3) \quad \tau_{ij} = \nu \rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \nu \rho \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$(4) \quad \dot{q}_i = -\frac{a}{c_p \rho} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}$$

Aus den beiden Stoffkonstanten a und ν kann die dimensionslose Prandtl-Zahl gebildet werden.

$$(5) \quad Pr = \frac{\nu}{a}$$

Die Reynoldsspannungen $\overline{u_i' u_j'}$ und turbulenten Wärmeströme $\overline{u_j' \theta'}$ können nicht direkt bestimmt werden. Zur Lösung dieser Korrelationen wurden Turbulenzmodelle entwickelt. Das am häufigsten verwendete Verfahren ist der Wirbelviskositätsansatz. Dabei wird angenommen, dass sich die turbulenten Impuls- und Wärmeströme analog zu den laminaren Schubspannungen und der Wärmeleitung durch die Gradienten der gemittelten Größen bestimmen lassen.

$$(6) \quad \overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

$$(7) \quad \overline{u_j' \theta'} = -a_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}$$

Die turbulenten Schubspannungen können durch eine turbulente Viskosität ν_t und die turbulente kinetische Energie k bestimmt werden. Zur Bestimmung der turbulenten Wärmeströme wird die turbulente Temperaturleitfähigkeit a_t eingeführt. Die Proportionalitätskonstanten ν_t und a_t sind jedoch keine reinen Stoffgrößen. Sie sind von der Strömung abhängig. Die gängigen Turbulenzmodelle zur Strömungsberechnung, wie beispielsweise das Spalart-Allmaras- und das K- ϵ -Modell, unterscheiden sich in der Bestimmung der Wirbelviskosität. Diese werden in der allgemeinen Fachliteratur umfassend erläutert. In dieser Arbeit wurde das Strömungsfeld mittels LES mit Smagorinsky-Modell [11] berechnet. Bei LES wird nur ein sehr geringer Teil der Turbulenz modelliert. Bei ausreichend hoher Gitterauflösung kann das Strömungsfeld sehr genau bestimmt werden.

2.3. Reynolds-Analogie

Im Rahmen dieser Arbeit steht die Modellierung des turbulenten Wärmetransports im Vordergrund. Dem hier untersuchten Wärmetransportmodell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl liegt die Reynolds-Analogie zu Grunde. In diesem Ansatz wird eine Ähnlichkeit von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld angenommen, so dass sich die turbulente Temperaturleitfähigkeit a_t durch die turbulente Wirbelviskosität ν_t bestimmen lässt.

$$(8) \quad a_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}$$

Zur Ermittlung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t wurden eine Vielzahl von Untersuchungen durchgeführt. Für Luft wurde im logarithmischen Wandbereich eine turbulente Prandtl-Zahl von ungefähr 0,85 ermittelt [5].

3. METHODISCHES VORGEHEN

3.1. Untersuchung möglicher Einsatzgrenzen des Wärmetransportmodells

Bei der Modellierung des turbulenten Wärmetransports werden verschiedene Annahmen getroffen, um die exakten Grundgleichungen vereinfachen zu können. Im Rahmen dieser Arbeit soll untersucht werden, wie sich das Wärmetransportmodell verhält, wenn diese Annahmen nicht erfüllt werden können. Untersucht wird zum einen die Abweichung von ähnlichen Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldern, zum anderen die Wärmetransportmodellierung in Strömungen mit Gradienten in mehrere Raumrichtungen.

Die Ähnlichkeit von Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld ist abhängig von den jeweiligen Randbedingungen. Bei der Kanalströmung (Kapitel 4) wurden unterschiedliche Randbedingungen für die Temperatur und die Geschwindigkeit gewählt, so dass die Profile für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und die Temperatur unterschiedliche Verläufe besitzen.

Eine weitere Vereinfachung bildet die Bestimmung der turbulente Temperaturleitfähigkeit α_t aus der turbulenten Viskosität ν_t und der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t . Man erhält eine skalare Größe für die turbulente Temperaturleitfähigkeit α_t (Gleichung 8). Laut Definition (Gleichung 7) ist die turbulente Temperaturleitfähigkeit α_t jedoch abhängig von der Raumrichtung. Ebenso ist die turbulente Viskosität ν_t genau genommen kein Skalar. Das Modell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl Pr_t wurde für eindimensionale Strömungen entwickelt. In den Erhaltungsgleichungen sind nur die Gradienten der turbulenten Impuls- und Wärmeströme für den turbulenten Transport von Bedeutung (Gleichungen 1 und 2). Für eindimensionale Strömungen liegen ausschließlich Gradienten in eine Raumrichtung vor, so dass nur eine turbulente Schubspannung und ein turbulenter Wärmestrom bestimmt werden müssen (siehe Kapitel 4.1). Somit sind skalare Größen in diesem Fall für die Bestimmung der turbulenten Viskosität und der turbulenten Temperaturleitfähigkeit vollkommen ausreichend. Fraglich ist jedoch ob das Modell noch ausreichend gute Resultate für Strömungen mit Gradienten in mehrere Raumrichtungen liefern kann. Um dies zu untersuchen wurde das Wärmetransportmodell an einer Stufenströmung getestet (Kapitel 5).

3.2. Erstellen der Referenzdaten mit LES

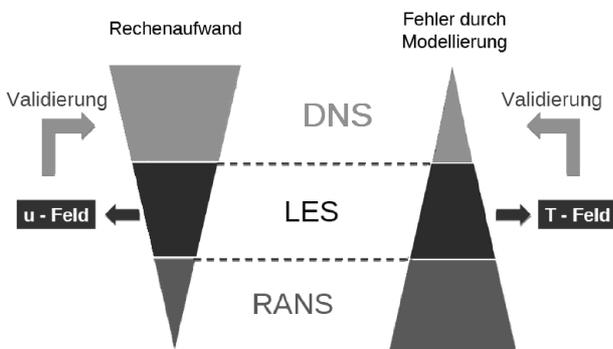


BILD 1. Schritt 1: LES-Referenzdaten

Zunächst wurden Referenzdaten für das Temperaturfeld mittels Large-Eddy-Simulation erstellt. Diese Daten dienen später als Vergleichswerte für die Ergebnisse der Wärmetransportmodellierung. Zur Validierung der LES-Daten wurden je nach Verfügbarkeit Ergebnisse von DNS- oder LES-Rechnungen bzw. experimentellen Untersuchungen aus der Literatur verwendet.

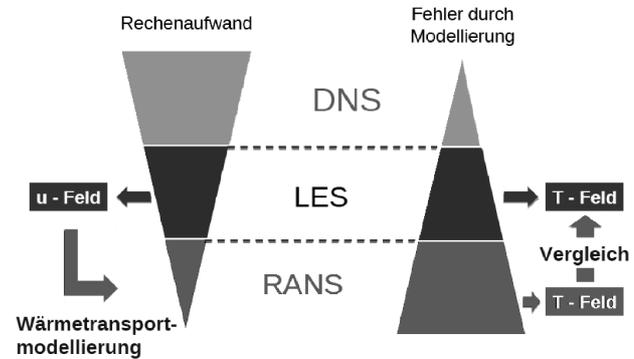


BILD 2. Schritt 2: Wärmetransportmodellierung

Zur Bestimmung des Wärmetransports muss die in Kapitel 2.2 beschriebene Transportgleichung für die gemittelte Temperatur (Gleichung 2) gelöst werden. Die Lösung dieser Gleichung ist abhängig vom Geschwindigkeitsfeld. Einerseits treten im konvektiven Term $\partial \bar{u}_i / \partial x_i$ die gemittelten Geschwindigkeiten auf. Andererseits haben auch die Geschwindigkeitsfluktuationen einen Einfluss auf die turbulenten Wärmeströme.

Somit ist, neben jeglichen Modellierungsannahmen für den Wärmetransport, auch die Güte des Strömungsfeldes entscheidend für die Qualität der Lösung des Temperaturfeldes. Je größer der Fehler in der Simulation des Strömungsfeldes ist, umso ungenauer wird demnach das Ergebnis des Temperaturfeldes. Da in dieser Arbeit jedoch explizit die Leistungsfähigkeit des Wärmetransportmodells untersucht werden soll, ist es notwendig den Einfluss durch Modellierungsfehler beim Strömungsfeld möglichst klein zu halten. Die Strömung wird als inkompressibel angenommen. Somit ist das Strömungsfeld unabhängig von der Verteilung der Temperatur. In diesem Fall kann das gemittelte Geschwindigkeitsfeld eines qualitativ besseren Simulationsverfahrens in die Transportgleichung für die mittlere Temperatur eingesetzt werden. In dieser Arbeit wurden die zeitlich gemittelten Strömungsgrößen der zuvor durchgeführten LES-Rechnung für die Wärmetransportmodellierung verwendet.

4. ERGEBNISSE ZUR KANALSTRÖMUNG

4.1. Eigenschaften

Es wird angenommen, dass der Kanal eben und die Strömung stationär sei. Zudem wird vorausgesetzt, dass die Turbulenz voll entwickelt ist. Mit diesen Annahmen können die Erhaltungsgleichungen wesentlich vereinfacht werden. Die Mittelwerte der Strömungsgrößen sind nur vom Wandabstand y abhängig und dementsprechend eindimensional (Gleichungen 9 und 10).

Für den Impuls- und Energieerhalt sind nur turbulenten Schubspannungen und Wärmeströme in y -Richtung

relevant. Somit können die Turbulenzparameter ν_t und α_t entsprechend Gleichung 11 beschrieben werden.

$$(9) \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right)$$

$$(10) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \overline{v'\theta'} \right)$$

$$(11) \quad \overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \overline{v'\theta'} = -\alpha_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$$

Die Reynolds-Analogie basiert auf der Annahme, dass Temperatur- und Strömungsfeld ähnlich sind. In einer Kanalströmung ist die Geschwindigkeit in der Kanalmitte maximal. An den Wänden werden die Geschwindigkeiten zu Null, so dass sich dort ein konstanter Gradient der mittleren Strömungsgeschwindigkeit einstellt. Dieser Gradient ist abhängig von der Reynoldszahl und besitzt jeweils entgegengesetzte Vorzeichen an den gegenüberliegenden Wänden. In der Kanalmitte wird der Gradient der Geschwindigkeit zu Null.

Wenn ähnliche Randbedingungen für die Temperatur angenommen werden, so ist der Verlauf des Temperaturprofils analog zu dem der Strömungsgeschwindigkeit. Eine ähnliche Randbedingung ist durch die Vorgabe konstanter entgegengerichteter Wärmeströme über die Wände gegeben. Ein voll-entwickeltes Temperaturfeld kann durch das Einführen eines negativen inneren Quellterms sichergestellt werden (Kim und Moin [8]). Hierbei sind die Wandtemperaturen an beiden Wänden gleich und das Temperaturmaximum liegt in der Kanalmitte.

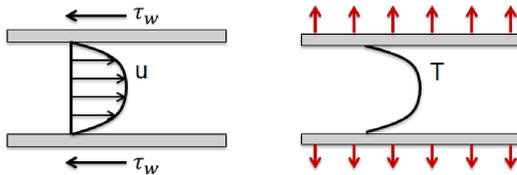


BILD 3. Profile durch Vorgabe konstanter entgegengerichteter Gradienten an den Wänden ($Q_w = \text{konstant}$)

Im Folgenden wird untersucht wie sich das Wärmetransportmodell verhält, wenn die Voraussetzung ähnlicher Felder nicht gegeben ist. Um dies untersuchen zu können, wurde eine isotherme Temperaturrandbedingung gewählt. Bei dieser Konfiguration steigt die Temperatur stetig von der einen zur anderen Wand. Minimum und Maximum liegen an den jeweiligen Wänden. In der Kanalmitte hat das Profil seinen größten Gradienten.

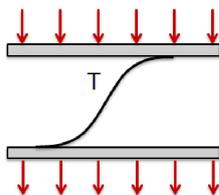


BILD 4. Gleiche Gradienten an der Wand durch isotherme Temperaturrandbedingung ($T_w = \text{konstant}$)

4.2. Literaturüberblick

Erste experimentelle Untersuchungen zu turbulenten Kanalströmungen mit Wärmetransport wurden 1952 von Page et al. [10] veröffentlicht. 1989 wurden die ersten DNS-Rechnungen von turbulenten Kanalströmungen mit Wärmetransport von Kim und Moin [8] durchgeführt. Hierbei wurden Temperaturrandbedingungen mit konstanten Wärmeströmen (Bild 3) verwendet. Teitel und Antonia [13] haben weitere experimentelle Vergleichsdaten für isotherme Randbedingungen (Bild 4) erstellt. Jedoch wurde nur der wandnahe Bereich vermessen. Iida et al. [2] und Johansson und Wikström [3] haben DNS-Rechnungen für isotherme Randbedingungen veröffentlicht.

Artikel	Jahr	T-Randbed.	Re_τ	Art
Page et al. [10]	1952	$T_w = \text{konst.}$	150	Exp.
Kim und Moin [8]	1989	$Q_w = \text{konst.}$	180	DNS
Teitel und Antonia [13]	1993	$T_w = \text{konst.}$	180-550	Exp.
Johansson und Wikström [3]	1999	$T_w = \text{konst.}$	265	DNS
Iida et al. [2]	2002	$T_w = \text{konst.}$	150	DNS
Kozuka et al. [9]	2009	$Q_w = \text{konst.}$	180/ 395	DNS

TAB 1. Literatur zu turbulenten Kanalströmungen mit Wärmetransport

4.3. Konfiguration

Wie in Kapitel 4.1 ausführlich erläutert, wird in dieser Konfiguration eine isotherme Randbedingung (Bild 4) gewählt, um möglichst unterschiedliche Randbedingungen für die Temperatur und die Geschwindigkeit zu erhalten. Für isotherme Randbedingungen liegen DNS-Referenzdaten von Iida et al. [2] und Johansson und Wikström [3] bei Reynoldszahlen von $Re_\tau=150$ bzw. $Re_\tau=265$ vor. Zudem wurden Messdaten in Wandnähe von Teitel und Antonia [13] bei $Re_\tau=395$ veröffentlicht. Die Annahme einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl gilt nur im logarithmischen Bereich (Kapitel 2.3). Dieser ist umso länger, je größer die Reynoldszahl ist. Aus diesem Grund wurde für diese Untersuchung eine LES bei der höchsten Reynoldszahl $Re_\tau=395$ durchgeführt.

Die Strömungsgrößen wurden mit DNS-Ergebnissen von Kozuka et al. [9] verglichen. Die Prandtl-Zahl beträgt 0,71. Dies entspricht dem Wert für Luft.

Zur besseren Vergleichbarkeit der Profile für unterschiedliche Reynoldszahlen werden die Größen in viskosen Einheiten dargestellt. Diese werden mit der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ normiert.

$$(12) \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \rho \nu \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_w$$

$$(13) \quad \bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu} \quad Re_\tau = \frac{\delta u_\tau}{\nu}$$

Die Abmessungen des Kanals betragen $6\delta \times 2\delta \times 3\delta$ in x -, y - und z -Richtung. Die Referenzlänge δ entspricht der halben Kanalhöhe. Die Gitterauflösung in die jeweilige Richtung beträgt $120 \times 200 \times 120$ Zellen. Insgesamt besteht das Gitter aus etwa 2,9 Mio. Zellen. In Strömungs- und Spannweitenrichtung sind die statistischen Größen konstant. Aus diesem Grund wurde in diesen Richtungen eine konstante Gitterweite von $\Delta x^+ \approx 20$ und $\Delta z^+ \approx 20$ gewählt. Da für die zeitlich gemittelten Größen in y -Richtung an der Wand größere Gradienten auftreten als in der Kanalmitte wurde eine geometrische Streckung von $\Delta y_w^+ \approx 1$ auf $\Delta y_c^+ \approx 10$ angewendet. In y -Richtung wird der Kanal durch Wände begrenzt. Für die Flächen senkrecht zur Strömungsrichtung bei $x=0$ und $x=6\delta$ sowie für die Seitenflächen bei $z=0$ und $z=3\delta$ wurden periodische Randbedingungen verwendet. Die dimensionslosen Wandtemperaturen (Gleichung 14) betragen $\theta(y=0)=-1$ und $\theta(y=2\delta)=1$.

4.4. Large-Eddy-Simulation

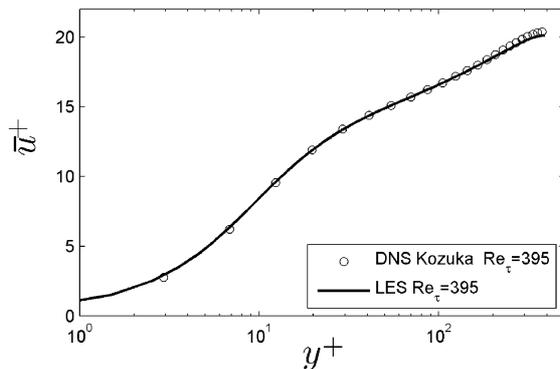


BILD 5. Kanalströmung - Mittleres Geschwindigkeitsprofil

In Bild 5 ist der Verlauf der mittleren dimensionslosen Geschwindigkeit in viskosen Einheiten dargestellt. Die Profile der hier durchgeführten LES und der DNS von Kozuka et al. [10] stimmen sehr gut überein. Im logarithmischen Bereich beträgt die maximale Abweichung 1%.

Im Folgenden wird das Temperaturfeld untersucht. Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird die Temperatur mit der über die Kanalhöhe y gemittelten Temperatur (T) und der Wandtemperatur T_w entdimensionalisiert.

$$(14) \quad \theta = \frac{T - \langle T \rangle}{T_w - \langle T \rangle}$$

Zum Vergleich der mittleren Temperaturen für unterschiedliche Reynoldszahlen kann eine ähnliche Beziehung zur Schubspannung wie bei der Geschwindigkeit aufgestellt werden.

$$(15) \quad \bar{\theta}^+ = \frac{\bar{\theta}}{\theta_\tau} \quad \text{mit} \quad \theta_\tau = - \left. \frac{a}{u_\tau} \frac{d\bar{\theta}}{dy} \right|_w$$

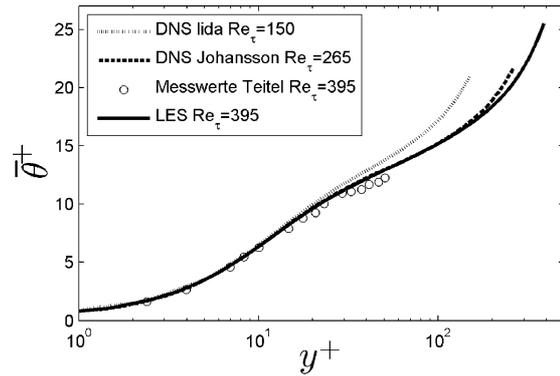


BILD 6. Kanalströmung - Mittleres Temperaturprofil

Im wandnahen Bereich bis $y^+ \leq 50$ stimmt die LES sehr gut mit den Messwerten von Teitel und Antonia [13] überein. Für den logarithmischen Bereich müssen die DNS Ergebnisse von lida et al. [2] und Johansson und Wikström [3] für geringere Reynoldszahlen zum Vergleich herangezogen werden, da hierfür keine Literaturwerte für dementsprechend hohe Reynoldszahlen vorliegen.

Bei der Betrachtung der gemittelten Temperatur (Bild 6) wird deutlich, dass der logarithmische Bereich für die sehr geringe Reynoldszahl von $Re_\tau=150$ kaum ausgeprägt ist. Die DNS der etwas höheren Reynoldszahl von $Re_\tau=265$ besitzt im logarithmischen Bereich eine sehr gute Übereinstimmung mit der LES. Jedoch verschiebt sich auch hier die Nachlaufregion auf Grund der geringeren Reynoldszahl zu kleineren y^+ -Werten. Die Steigung von $\bar{\theta}^+$ nimmt zur Kanalmitte hin zu (Johansson und Wikström [3]). Hier unterscheidet sich der Verlauf stark zu Profilen bei denen der Gradient in der Kanalmitte null wird (Bild 3), wie es bspw. in Bild 5 für das Profil der Geschwindigkeit zu sehen ist. Der allgemeine Verlauf der gemittelten Temperatur der LES stimmt ab dem logarithmischen Bereich gut mit den DNS-Ergebnissen für geringere Reynoldszahlen überein.

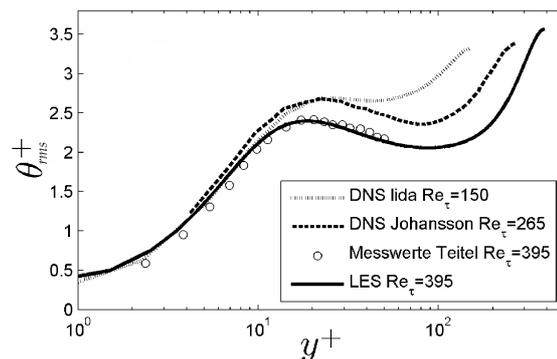


BILD 7. Kanalströmung - Mittlere Temperaturfluktuationen

In Bild 7 ist die mittlere Fluktuation der Temperatur über die viskosen Wandeinheiten aufgetragen. Im wandnahen Bereich ist die Übereinstimmung der LES mit den Messwerten von Teitel und Antonia [13] sehr gut. Der anschließende Verlauf ist ähnlich zu den DNS-Referenzen für geringere Reynoldszahlen. Nach einem lokalen Minimum um $40 \leq y^+ \leq 90$ nehmen die Temperaturfluktuationen wieder zu und erreichen in der Kanalmitte ihr Maximum. Dieses scheint mit zunehmender Reynoldszahl anzusteigen.

gen. Bei Iida et al. [2] mit $Re_t=150$ betragen die maximalen Fluktuationen 3,3. Bei Johansson und Wikström [3] mit $Re_t=265$ sind es 3,4 und in der hier durchgeführten LES bei $Re_t=395$ liegt das globale Maximum bei 3,6.

	DNS [2]	DNS [3]	LES
Re_t	150	265	395
Nu	13,4	17,4	21,7

TAB 2. Kanalströmung - Nusselt-Zahl

In Tabelle 2 werden die Nusselt-Zahlen für die unterschiedlichen Reynoldszahlen verglichen. Kawamura et al. [6] haben bereits den Einfluss der Reynoldszahl auf die Nusselt-Zahl für Temperaturrandbedingungen mit konstanten Wärmeströmen untersucht. Bei dieser Art von Randbedingung ist die Nusselt-Zahl unabhängig von der Reynoldszahl. Im Gegensatz dazu nimmt die Nusselt-Zahl für die hier untersuchte isotherme Randbedingungen mit steigender Reynoldszahl zu.

4.5. Wärmetransportmodellierung

Das Wärmetransportmodell wurde für unterschiedliche Randbedingungen von Temperatur und Geschwindigkeit untersucht. Dadurch ist die in der Reynolds-Analogie angenommene Ähnlichkeit von Temperatur- und Strömungsfeld nicht gegeben.

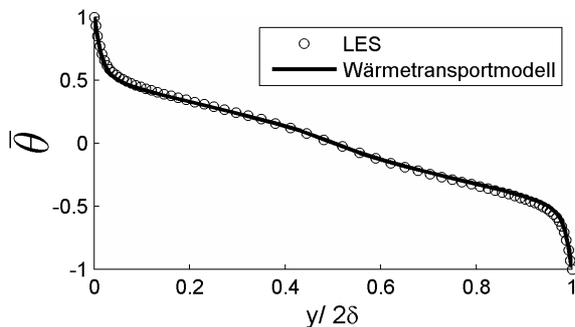


BILD 8. Kanalströmung - Mittleres Temperaturprofil der Modellierung

Zur Modellierung des Wärmetransports wurde das gemittelte Geschwindigkeitsfeld der LES verwendet (Kapitel 3.2). Die Ergebnisse der Wärmetransportmodellierung wurden mit den Temperaturdaten der LES verglichen. Im Allgemeinen stimmen die Ergebnisse der Wärmetransportmodellierung sehr gut mit denen der LES-Rechnung überein. Somit kann das Wärmetransportmodell mit konstanter Prandtl-Zahl gut auf turbulente Kanalströmungen angewendet werden, selbst wenn die Randbedingungen für das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld nicht ähnlich sind.

5. ERGEBNISSE ZUR STUFENSTRÖMUNG

5.1. Eigenschaften

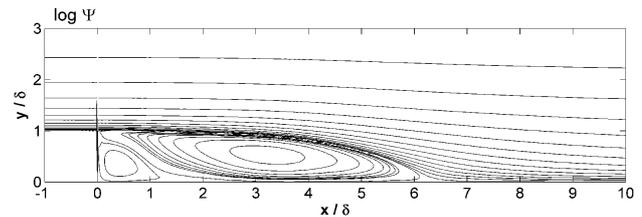


BILD 9. Stufenströmung - Stromlinien

Im Folgenden wird die Strömung über eine rückwärts-gewandte Stufe untersucht. Vor der Stufe liegt eine voll-entwickelte turbulente Kanalströmung vor. An der Stufe löst die Strömung ab und es bildet sich ein Rückströmgebiet hinter der Stufe aus. Ähnlich wie bei der Kanalströmung wird angenommen, dass die Ausdehnung in z -Richtung sehr groß sei. Die statistischen Mittelwerte sind somit ebenfalls konstant in z -Richtung und die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} ist gleich null. Da in x -Richtung eine Querschnittserweiterung auftritt, ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{u} , im Gegensatz zur Kanalströmung, nicht konstant über x . Ebenso tritt hinter der Stufe eine Ausgleichsströmung in y -Richtung auf. Im zeitlichen Mittel ist die Stufenströmung dementsprechend zweidimensional. Die Vereinfachungen der Kanalströmung (Gleichungen 9-11) gelten hier nicht mehr. Die turbulente Viskosität ν_t und Temperaturleitfähigkeit α_t können genaue genommen nicht als skalare Größen betrachtet werden. In diesem Kapitel wird untersucht wie sich das Wärmetransportmodell verhält, wenn das Strömungsfeld mehrdimensional ist.

5.2. Literaturüberblick

In der Literatur sind Messungen und Strömungssimulationen zu zwei verschiedenen Konfigurationen rückwärts-gewandter Stufenströmungen mit Wärmetransport veröffentlicht. Die Grundlage bilden jeweils die experimentellen Untersuchungen von Vogel und Eaton [14] sowie Kasagi und Matsunaga [4]. Bei Kasagi und Matsunaga [4] wurde die Strömung zwar ohne Wärmetransport vermessen, allerdings wurden für die entsprechende Konfiguration LES-Rechnungen mit Wärmetransport von Avancha und Pletcher [1] durchgeführt. Auch zur Konfiguration von Vogel und Eaton [14] wurden Ergebnisse einer LES-Simulation mit Wärmetransport von Keating et al. [7] veröffentlicht.

Bei Vogel und Eaton [14] besteht die Randbedingung am Kanaleintritt aus zwei noch nicht voll-ausgebildeten Grenzschichten, die durch eine nahezu ungestörte Kernströmung getrennt sind. Kasagi und Matsunaga [4] verwenden hingegen eine voll-turbulente Kanalströmung als Eintrittsbedingung. Da es wesentlich verlässlicher ist, eine bereits voll-entwickelte Kanalströmung in der Simulation als Randbedingung nachzubilden, orientiert sich die in dieser Arbeit durchgeführte Simulation an den Konfigurationen von Kasagi und Matsunaga [4] und Avancha und Pletcher [1].

5.3. Konfiguration

Kasagi und Matsuga [4] verwenden eine Reynoldszahl von $Re=4800$ im Einstromkanal. Diese wird mit der mittleren Geschwindigkeit vor der Stufe (u) und der Stufenhöhe δ gebildet.

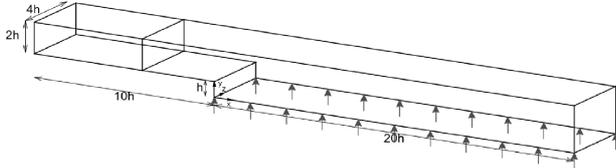


BILD 10. Stufenströmung - Konfiguration

Der Kanal vor der Stufe hat eine Höhe von 2δ . An der Stelle $x=0$ befindet sich die Querschnittserweiterung von 2δ auf 3δ hinter der Stufe. Vom Beginn der Ablösung bei $x=0$ wird die Strömung über eine Länge von 20δ berechnet, so dass sich eine Gesamtlänge der Geometrie von 30δ ergibt. In z-Richtung beträgt die Breite 4δ .

Das numerische Gitter besteht aus rund 1,6 Mio. Gitterzellen. In Spannweitenrichtung ist das Gitter äquidistant mit $\Delta z \approx 0,07\delta$. Im Bereich der Stufe wurde das Gitter in Hauptströmungsrichtung verfeinert, um die hohen Gradienten in der Scherschicht auflösen zu können. Die kleinste Gitterweite in Strömungsrichtung beträgt $\Delta x_{min} \approx 0,03\delta$. Ebenso ist das Gitter in y-Richtung im Bereich der Scherschicht höher aufgelöst. Da an den Wänden bei angelegter Strömungen ebenfalls hohe Gradienten in y-Richtung auftreten, ist das Gitter zusätzlich in den wandnahen Bereichen höher aufgelöst. Die höchste Auflösung in y-Richtung beträgt $\Delta y_{min} = 0,01\delta$. Der Wiederanlegepunkt der Strömung liegt in den Arbeiten von Kasagi und Matsunaga [4] und Avancha und Pletcher [1] im Bereich $x \approx 6\delta - 7\delta$. Dahinter sind die Gradienten in x-Richtung wieder relativ gering. Somit ist das Gitter hinter dem Rückströmgebiet in x-Richtung etwas gröber.

Die Stufe ist in y-Richtung durch Wände begrenzt. Um sicherzustellen, dass die turbulente Strömung vor der Stufe voll-entwickelt ist, wird ein periodischer Kanal der Stufenströmung vorgeschaltet. Am Einlass bei $x=-10\delta$ sowie an der Stelle $x=-4\delta$ wurden periodische Randbedingungen verwendet. Die Stelle $x=-4\delta$ wirkt somit zum einen als Einlass für die Stufenströmung, zum anderen werden die Daten an die Stelle $x=-10\delta$ übergeben. In z-Richtung wurden ebenfalls periodische Randbedingungen verwendet. Die Stufenströmung wird im Bereich der unteren Wand für $x > 0$ beheizt (Bild 10). Die Temperaturrandbedingung orientiert sich an der Konfiguration von Avancha und Pletcher [1] ($Q_w = 2 \text{ kW/m}^2$). Alle anderen Wände sind adiabatisch.

5.4. Large-Eddy-Simulation

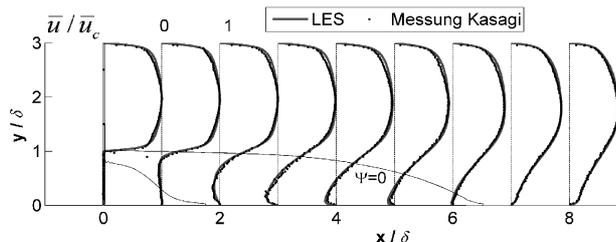


BILD 11. Stufenströmung - Mittlere Geschwindigkeit in Strömungsrichtung

Die Strömungsdaten, der in dieser Arbeit durchgeführten LES-Rechnung werden mit den Messwerten von Kasagi und Matsunaga [4] verglichen. Kasagi und Matsunaga [4] haben die Strömung mit Particle-Tracking Velocimetry (PTV) vermessen. In Bild 11 ist die Strömungsgeschwindigkeit normiert mit der Geschwindigkeit in der Kanalmitte vor der Stufe dargestellt. Die entsprechende Messunsicherheit der PTV-Ergebnisse beträgt ungefähr 5%. Es liegt eine sehr gute Übereinstimmung der LES-Ergebnisse mit den Referenzdaten vor.

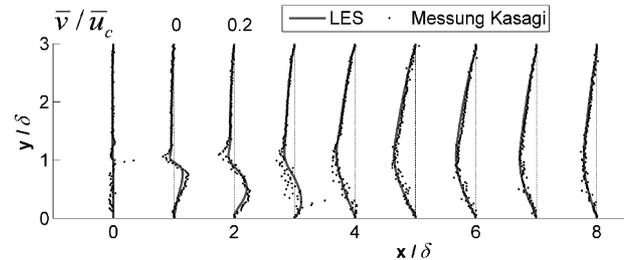


BILD 12. Stufenströmung - Mittlere Geschwindigkeit in y-Richtung

Die Messunsicherheit der PTV-Daten ist für die mittlere Geschwindigkeit in y-Richtung mit etwa 50% relativ groß. Für die Autokorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen beträgt sie etwa 10% und für $u'v'$ bis zu 25%.

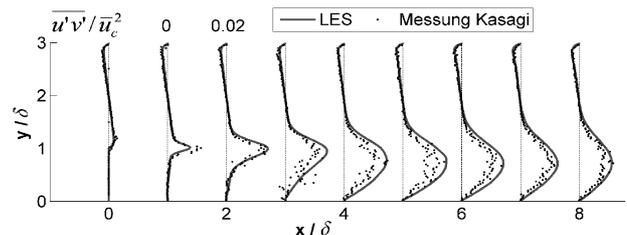
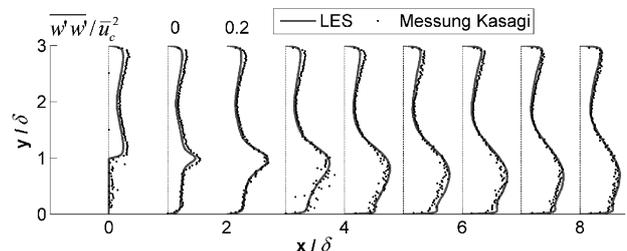
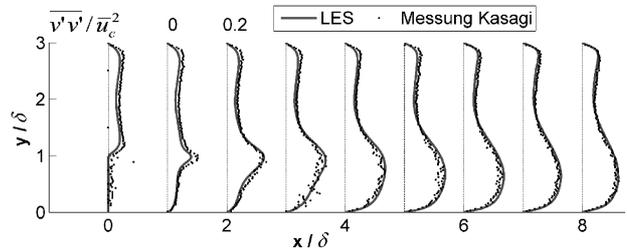
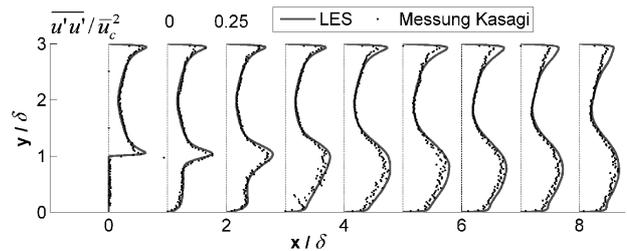


BILD 13. Stufenströmung - Reynoldsspannungen

In Bild 13 sind die turbulenten Schubspannungen dargestellt. Die Verteilung der Reynoldsspannung in Strömungsrichtung $\overline{u'u'}$ entspricht an der Stelle $x=0$ der Verteilung in einer Kanalströmung mit einem Maximum in Wandnähe. Hinter dem Ablösepunkt nimmt das untere Maximum zu, bis bei $x=1,6\delta$ und $y=1,0\delta$ das globale Maximum von $\overline{u'u'}_{\max}=0,2u_c^2$ erreicht wird. Kasagi und Matsunaga [4] haben für das Maximum ebenfalls einen Wert von $\overline{u'u'}=0,2u_c^2$ an der Stelle $x=1,5\delta$; $y=1,0\delta$ bestimmt. Stromabwärts wandert das Maximum in Richtung der unteren Wand. Der geringste Wandabstand des Maximums liegt bei $x=4,6\delta$ und $y=0,8\delta$. Dieser Punkt ist sehr nahe an der von Kasagi und Matsunaga [4] ermittelten Stelle bei $x=4,5\delta$ und $y=0,8\delta$. In direkter Wandnähe bildet sich zudem ein neues lokales Maximum der Reynoldsspannung $\overline{u'u'}$ aus. Die Verteilungen von $\overline{v'v'}$ und $\overline{w'w'}$ verhalten sich in der Scherschicht qualitativ sehr ähnlich zu der von $\overline{u'u'}$. Allerdings sind die Amplituden im Allgemeinen etwas geringer.

Beim Vergleich der Strömungsdaten der LES-Rechnung mit den Messwerten von Kasagi und Matsunaga [4] zeigt sich, dass die Werte im Rahmen der Messunsicherheit der PTV-Daten sehr gut übereinstimmen. Somit eignen sich die Ergebnisse der LES-Strömungssimulation für die spätere Modellierung des Wärmetransports. Da das zur Modellierung verwendete Strömungsfeld der LES-Rechnung der realen Verteilung entspricht, sollte der Fehler durch das Strömungsfeld klein genug sein (Kapitel 3.2).

Kasagi und Matsunaga [4] haben eine Stufenströmung ohne Wärmetransport untersucht. Zur Validierung der thermischen Daten wurden die Ergebnisse der LES-Rechnung von Avancha und Pletcher [1] verwendet. Dabei ist zu beachten, dass die in dieser Arbeit durchgeführte Rechnung mit demselben Simulationsverfahren (LES) durchgeführt wurde wie die zur Validierung verwendete Simulation von Avancha und Pletcher [1]. Demzufolge ist davon auszugehen, dass die Ergebnisse beider Rechnungen von ähnlicher Qualität sind. Zudem ist die Gitterauflösung bei Avancha und Pletcher [1] mit etwa 0,16 Mio. Zellen stromabwärts der Stufe wesentlich geringer als die in dieser Arbeit verwendete Auflösung von 1,25 Mio. Gitterzellen. Je höher die Auflösung einer LES-Rechnungen ist, umso kleiner wird der Modellierungsanteil für die Turbulenz. Somit ist bei höherer Auflösung eine bessere Genauigkeit zu erwarten. Zudem wurden bei Avancha und Pletcher [1] Dichteänderungen durch die Temperatur berücksichtigt, wohingegen in dieser Arbeit das Fluid als inkompressibel angenommen wurde. Aus diesem Grund lassen sich die Daten für die Temperaturen nur qualitativ vergleichen. Eine Aussage über die Genauigkeit der Rechnung ist jedoch nicht möglich.

Die Temperatur wurde nach Gleichung 16 entdimensionalisiert. Die Referenztemperatur T_{ref} entspricht der Temperatur am Strömungseinlass.

$$(16) \quad \theta = \frac{T - T_{ref}}{T_{ref}}$$

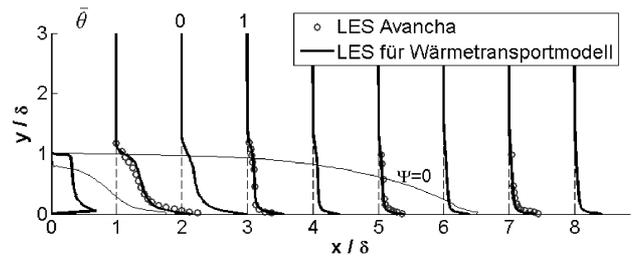


BILD 14. Stufenströmung - Verteilung der mittleren Temperatur $\bar{\theta}$

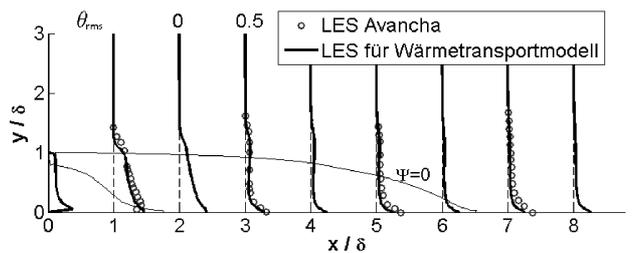


BILD 15. Stufenströmung - Verteilung der mittleren Temperaturfluktuation

Unter Berücksichtigung oben genannter Einschränkungen stimmen die thermischen Größen der LES von Avancha und Pletcher [1] gut mit denen der in dieser Arbeit durchgeführten LES überein.

5.5. Wärmetransportmodellierung

Der turbulente Wärmetransport wird in der Transportgleichung für die gemittelte Temperatur durch die Gradienten der turbulenten Wärmeströme beschrieben (Gleichung 2). Diese sind in Bild 16 dargestellt.

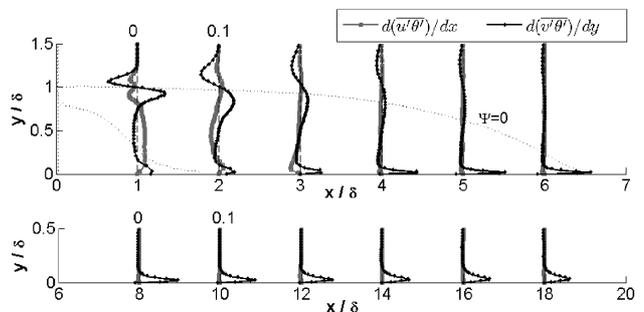


BILD 16. Stufenströmung - Gradienten der turbulenten Wärmeströme

In der Kanalströmung sind die turbulenten Wärmeströme in Hauptströmungs- und Spannweitenrichtung konstant. Somit muss bei diesem Strömungsfall nur der turbulente Wärmestrom $\overline{v'\theta'}$ in y-Richtung berücksichtigt werden. Bei der Stufenströmung ist der Wärmestrom in x-Richtung jedoch nicht konstant. In Bild 16 sind die Gradienten der turbulenten Wärmeströme in ihre jeweilige Strömungsrichtung dargestellt. Dies sind die relevanten Größen, die den turbulenten Wärmetransport in der Transportgleichung der gemittelten Temperatur (Gleichung 2) beschreiben. Für $x \leq 3\delta$ ist der Wärmetransport in x- und y-Richtung von gleicher Größenordnung. Somit ist der turbulente Wärmetransport in diesem Bereich von beiden Termen abhängig. Ab $x > 4\delta$ ist der turbulente Wärmetransport in y-Richtung wesentlich größer als in x-Richtung.

Im Wärmetransportmodell wird die turbulente Temperaturleitfähigkeit α_t als eine skalare Größe aus turbulenter Viskosität ν_t und der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t bestimmt (Gleichung 8). Die turbulente Temperaturleitfähigkeit α_t ist durch den Temperaturgradienten und die turbulenten Wärmeströme definiert (Gleichung 7). Auf Grund der Zweidimensionalität des mittleren Strömungsfeldes müssen jedoch zwei turbulente Wärmeströme bestimmt werden. Diese sind jeweils unterschiedlich definiert (Gleichung 17). Somit ist die turbulente Temperaturleitfähigkeit abhängig von der Raumrichtung. Dasselbe gilt für die turbulente Viskosität ν_t (Gleichungen 18 und 19).

$$(17) \quad \overline{u'\theta'} = \alpha_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \overline{v'\theta'} = \alpha_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$$

$$(18) \quad \overline{u'v'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$$

$$(19) \quad \overline{u'u'} = 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \overline{v'v'} = 2\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$$

Die Definition der turbulenten Viskosität ν_t basiert auf der Turbulenzmodellierung von Strömungen. Hierbei wird auch ein Skalar für die turbulente Viskosität bestimmt. Dementsprechend musste für die Wärmetransportmodellierung ebenfalls eine skalare turbulente Viskosität aus den LES-Daten bestimmt werden. Dies wurde durch Gleichsetzung der exakten und modellierten Produktion der turbulenten kinetischen Energie k realisiert. Die skalare turbulente Viskosität wird durch folgende Funktion aus den LES-Daten ermittelt.

$$(20) \quad \nu_t = \frac{-\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$$

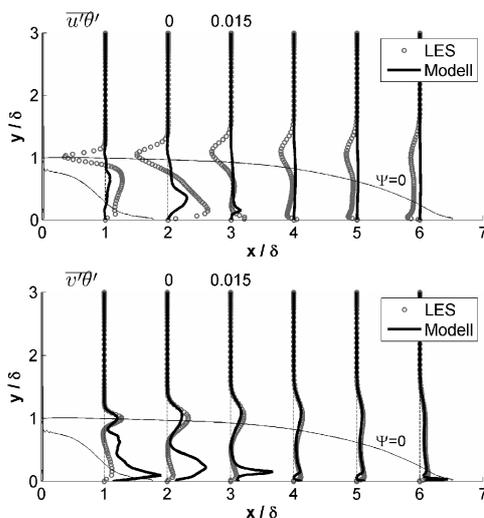


BILD 17. Stufenströmung - Turbulente Wärmeströme im Rezirkulationsgebiet

In Bild 17 werden die turbulenten Wärmeströme der LES mit den entsprechenden, durch Gleichungen 8, 17 und 20 modellierten Wärmeströmen verglichen. Aus Bild 16 ist ersichtlich, dass hauptsächlich für $x \leq 3\delta$ beide Wärmeströme relevant sind, stromabwärts dieses Bereichs ist überwiegend $\overline{v'\theta'}$ für den turbulenten Transport verantwortlich. Im Folgenden wird aus diesem Grund hauptsächlich der Bereich $x \leq 3\delta$ untersucht.

Nahe der Wand, für $y < 0,5\delta$, wird der turbulente Wärmestrom $\overline{v'\theta'}$ stark überschätzt. Die maximalen Beträge sind etwa 7 mal größer als die durch LES ermittelten Werte. Zwar wird im Gegensatz dazu der turbulente Wärmestrom $\overline{u'\theta'}$ etwa um die Hälfte unterschätzt, jedoch ist die relative Abweichung geringer. Zudem ist der Einfluss des turbulenten Transports dieser Größe für $y < 0,1\delta$ geringer als der Transport von $\overline{v'\theta'}$ (Bild 16). Somit wird der turbulente Wärmetransport hinter der Stufe an der unteren Wand stark überschätzt.

In der Scherschicht direkt hinter der Stufe wird der turbulente Wärmestrom $\overline{v'\theta'}$ relativ gut modelliert. Allerdings vernachlässigt das Modell den in diesem Bereich sehr hohen turbulenten Wärmestrom $\overline{u'\theta'}$.

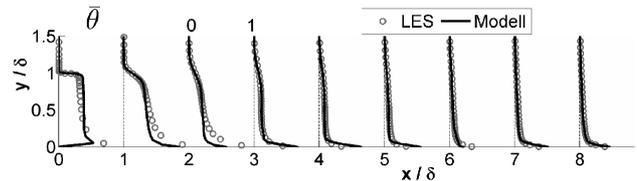


BILD 18. Stufenströmung - Mittlere Temperaturverteilung der Modellierung

Je höher der Wärmetransport ist, umso stärker werden Temperaturgradienten abgebaut (Bild 18). Da der turbulente Wärmetransport in Wandnähe hinter der Stufe stark überschätzt wird, wird dementsprechend bei der Modellierung zu viel Wärme von der Wand weg transportiert wodurch sich eine geringere Temperatur an der Wand ergibt.

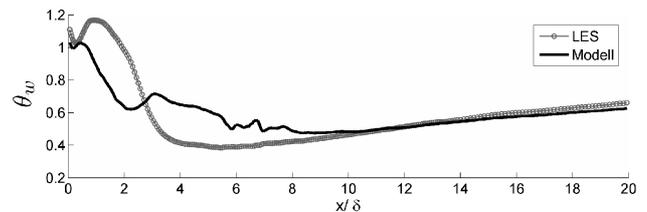


BILD 19. Stufenströmung - Wandtemperatur Modellierung

Für technische Anwendungen ist häufig die Wandtemperatur von gekühlten oder erwärmten Bauteilen relevant. Im Bereich der maximalen Wandtemperaturen ($x < 3\delta$) werden mit dem Wärmetransportmodell viel zu geringe Temperaturen berechnet (Bild 19). Bei technischen Anwendungen ist jedoch oft die möglichst genaue Vorhersage der maximal auftretenden Wandtemperatur entscheidend. Das Wärmetransportmodell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl kann im Fall einer turbulenten Stufenströmung die maximale Wandtemperatur nicht ausreichend genau wiedergeben. Im Bereich der angelegten Strömungen ($x > 7\delta$) stimmt die Temperaturverteilung der Modellierung wiederum sehr gut mit den Referenzdaten der LES-Rechnung überein (Bild 18 und 19). In diesem Bereich dominiert der turbulente Wärmetransport in y-Richtung (Bild 16), ähnlich wie bei der Kanalströmung.

6. SCHLUSSFOLGERUNGEN UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurde das Wärmetransportmodell mit konstanter turbulenter Prandtl-Zahl in Kanal- und Stufenströmungen untersucht. Es wurden zunächst Referenzdaten mittels Large-Eddy-Simulation erstellt. Die Ergebnisse wurden mit Vergleichsdaten aus der Literatur validiert.

Da die Strömung als inkompressibel angenommen wurde, konnte das gemittelte Geschwindigkeitsfeld der Referenzdaten eingefroren und für die Modellierung des Wärmetransports verwendet werden. Dadurch konnte der Einfluss von Modellierungsfehlern bei der Berechnung des turbulenten Wärmetransports auf das Wärmetransportmodell reduziert werden.

Die Untersuchung der Kanalströmung hat gezeigt, dass das Modell sehr gute Ergebnisse für angelegte Strömungen liefert. Der Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen für Geschwindigkeit und Temperatur ist relativ gering. Im Bereich abgelöster Strömungen kann das Modell, auf Grund der Zweidimensionalität des gemittelten Strömungs- und Temperaturfeldes, keine ausreichend genauen Resultate liefern. In diesem Fall muss ein erweitertes Wärmetransportmodell verwendet werden bei dem die turbulente Prandtl-Zahl variabel bestimmt wird. Dazu ist das Lösen einer empirischen Funktion oder weiterer Transportgleichungen nötig. Ist auch diese Modellierung nicht ausreichend, dann müssten die turbulenten Wärmeströme direkt durch Transportgleichungen berechnet werden.

7. LITERATUR

- [1] Avancha, R.V.R. (2001): A study of the heat transfer and fluid mechanics of the turbulent separating and reattaching flow past a backward facing step using large eddy simulation. Dissertation, Iowa State University.
- [2] Iida, O., Kasagi, N. und Nagano, Y. (2002): Direct numerical simulation of turbulent channel flow under stable density stratification. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Bd. 45, S. 1693–1703.
- [3] Johansson, A. und Wikström, P.M. (1999): DNS and modelling of passive scalar transport in turbulent channel flow with focus on scalar dissipation rate modelling. *Flow, Turbulence and Combustion*, Bd. 63, S. 223–245.
- [4] Kasagi, N. und Matsunaga, A. (1995): Three-dimensional particle-tracking velocimetry measurements of turbulence statistics and energy budget in backward facing step flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Bd. 16, S. 477–485.
- [5] Kays, W.M. (1992): Turbulent Prandtl number - Where are we?. *Journal of Heat Transfer*, Bd. 116, S. 284–295.
- [6] Kawamura, H., Abe, H. und Matsuo, Y. (1999): DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Bd. 20, S. 196–207.
- [7] Keating, A., Piomelli, U., Bremhorst, K. und Nesic, S. (2004): Large-eddy simulation of heat transfer downstream of a backward-facing step. *Journal of Turbulence*, Bd. 5.
- [8] Kim, J. und Moin, P. (1989): Transport of Passive Scalars in a Turbulent Channel Flow. *Turbulent Shear Flow 6*, S. 85–96. Springer, Berlin.
- [9] Kozuka, M., Seki, Y. und Kawamura, H. (2009): DNS of turbulent heat transfer in channel flow with a high spatial resolution. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Bd. 30, S. 514–524.
- [10] Page jr., F., Schlinger, W.G., Breaux, D.K. und Sage, B.H. (1952): Point Values of Eddy Conductivity and Viscosity in uniform flow between parallel plates. *Industrial and Engineering Chemistry*. Bd. 44, S. 424–430.
- [11] Smagorinsky, J. (1963): General Circulation Experiments with the Primitive Equations, *Monthly Weather Review* 91. Bd. 3, S. 99–164.
- [12] Speziale, C.G. und So, R.M.C. (1998): Turbulence Modeling and Simulation. In: Johnson, R.W. (Hrsg.), *Handbook of Fluid Dynamics*. CRC Press.
- [13] Teitel, M. und Antonia, R.A. (1993): Heat transfer in fully developed turbulent channel flow: comparison between experiment and direct numerical simulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Bd. 36, S. 1701–1706.
- [14] Vogel, J.C. und Eaton, J.K. (1985): Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step. *Journal of Heat Transfer*, Bd. 107, S. 922–929.