

GRUNDLEGENDE CHARAKTERISIERUNG DES EIGENSCHWINGVERHALTENS EINES ZYKLISCH SYMMETRISCHEN MEHRMASSENSCHWINGERS MITTELS ANALYTISCHER METHODEN

T. Maywald, LS Strukturmechanik und Fahrzeugschwingungen,
 BTU Cottbus, Siemens-Halske-Ring 14, 03046 Cottbus, Deutschland

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Eigenschwingverhalten des mittels Mehrkörpermechanik diskretisierten Ersatzmodells eines integral gefertigten Axialverdichterlaufrades. Eine Modellierung entsprechend dieses Ansatzes eignet sich in besonderem Maß für qualitative Untersuchungen eines schwingenden Systems hinsichtlich der bei verstimmtten Laufrädern auftretenden Schwingungserscheinungen. Das dieser Arbeit zugrunde liegende äquivalente Bliskmodell besitzt zwei Freiheitsgraden je Modellsektor, wobei je ein Freiheitsgrad der Schaufel- beziehungsweise Scheibenmasse zugeordnet wird. Es wird eine Methodik vorgestellt, welche es ermöglicht, die Eigenfrequenzen und deren zugehörige Eigenformen für ein unverstimmttes, äquivalentes Bliskmodell mit beliebiger Sektorenanzahl analytisch zu bestimmen. Hierfür ist die zyklische Struktur der Systemmatrizen von zentraler Bedeutung. Das Ergebnis kann anschließend als Verifizierungsgrundlage für die, bei verstimmtten Systemen, verwendeten numerischen Modelle herangezogen werden.

1. NOMENKLATUR

1.1. Abkürzungen

EBM	equivalent blisk model
FHG	Freiheitsgrad
KD	Knotendurchmesserlinie

1.2. Lateinische Symbole

A	[-]	Konstante
F	[N]	Kraft
j	[-]	Imaginäre Einheit
k_b	[N/m]	Schaufelsteifigkeit
k_c	[N/m]	Koppelsteifigkeit
k_{sec}	[N/m]	Scheibensektorsteifigkeit
m	[kg]	Masse
N	[-]	Schaufelanzahl
t	[s]	Variable der Zeit
x	[m]	Verschiebungsordinate
\dot{x}	[m/s]	Erste Zeitableitung der Verschiebungsordinate
\ddot{x}	[m/s ²]	Zweite Zeitableitung der Verschiebungsordinate

1.3. Griechische Symbole

β	[-]	Substitutionsvariable
ε_k	[-]	n-te Einheitswurzel
π	[-]	Kreiszahl
ω	[rad/s]	Eigenkreisfrequenz

1.4. Indizes

B	Schaufel
D	Scheibe
i	Schaufelindex
sec	Sektor

1.5. Vektoren und Matrizen

$\mathbf{0}$	Nullmatrix
\mathbf{E}	Einheitsmatrix
\mathbf{EW}	Eigenwertproblem in Blockmatrizen-

\mathbf{D}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{M}	Massenmatrix
$\mathbf{0}$	Nullvektor
$\underline{\mathbf{x}}$	Vektor der Verschiebungskoordinaten
$\hat{\underline{\mathbf{x}}}$	Eigenvektor

2. EINLEITUNG

Reale Bauteile müssen aufgrund ihrer Komplexität stark vereinfacht werden, um sie für strukturmechanische Untersuchungen beherrschbar zu machen. Im Rahmen der Modellbildung wird dabei mit Hilfe von Idealisierungen und Vereinfachungen ein abstraktes Abbild der Wirklichkeit geschaffen, welches stellvertretend für das ursprüngliche System zu analysieren ist. Grundsätzlich unterscheidet man bei der Modellierung zwischen Mehrkörpermodellen, Finite-Elemente-Modellen und kontinuierlichen Modellen, wobei die Wahl des Modells maßgeblich von der Fragestellung der Untersuchung abhängig ist.

Das reale Axialverdichterlaufrad stellt ein kontinuierliches Schwingungssystem dar und besitzt somit eine unendliche Zahl von Freiheitsgraden. Soll dieses Bauteil zum Beispiel in Hinblick auf sein Eigenschwingverhalten untersucht werden, ist es notwendig die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren, da Kontinua nur für sehr einfache geometrische Formen (z.B. Balken, Platte) eine analytische Lösung liefern [1].

Im Fall des äquivalenten Bliskmodells¹ wird ein Axialverdichterlaufrad als Mehrkörpersystem diskretisiert. Zentrale Elemente eines Mehrkörpersystems bilden starre, massebehaftete Körper, masselose Koppellelemente und starre, reibungsfreie Bindungselemente. Für die Überführung des realen Systems in das abstrakte Mehrkörpersystem ist es erforderlich schrittweise alle notwendigen Modellparameter zu ermitteln und sie anschließend zu quanti-

¹ Der Begriff Blisk (englisch für blade integrated disk) beschreibt ein integral gefertigtes Axialverdichterlaufrad.

fizieren. Dieser Prozess der Parameterentwicklung wird ausführlich in [2] beschrieben. Nach der Reduktion stehen jedem Scheiben- beziehungsweise Schaufelsektor der zyklisch rotationssymmetrischen Struktur ein Freiheitsgrad zur Verfügung.

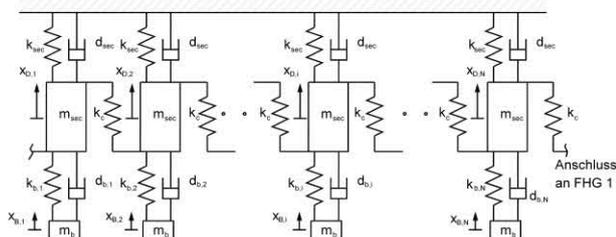


BILD 1. Äquivalentes Bliskmodell (EBM) nach [2]

Das äquivalente Bliskmodell (EBM) nach [2] wird hinsichtlich einer Möglichkeit untersucht, die Systemeigenwerte und Eigenformen für Systeme auf analytischem Weg zu ermitteln. Bedient man sich im Rahmen dieser Aufgabenstellung der konventionellen Methode, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu bestimmen stößt man bereits bei der für praktische Belange uninteressanten Anzahl von 2 Sektoren, was einer Anzahl von 4 Freiheitsgraden entspricht, an die Grenze der analytischen Lösbarkeit. Um die Lösbarkeit umfangreicherer Systeme zu gewährleisten, ist es notwendig, die hier vorliegende zyklische Rotationssymmetrie in die Überlegungen mit einzu- beziehen.

3. DEFINITION DES MODELLSPEZIFISCHEN EIGENWERTPROBLEMS

Das EBM besitzt eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden, welche untereinander durch Federn und Dämpfer gekoppelt sind. Durch Freischneiden der Mehrkörperelemente (BILD 1) und Anwendung des Impulssatzes lässt sich das Differentialgleichungssystem herleiten (1), welches als Grundlage für die Ermittlung der Eigenschwingungsgrößen des EBM benötigt wird. Jedem Massenelement des EBM steht nur ein translatorischer Freiheitsgrad zur Verfügung.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Werden die Systemfreiheitsgrade nach Schaufel- beziehungsweise Scheibenzugehörigkeit geordnet, ergeben sich der Freiheitsgradvektor (\mathbf{x}) sowie die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix ($\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$) wie folgt:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{D,1} \\ \vdots \\ x_{D,N} \\ x_{B,1} \\ \vdots \\ x_{B,N} \end{bmatrix}_{(2N \times 1)} \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{sec} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 0 & m_{sec} & & & \\ & & & m_b & 0 & 0 \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}_{(2N \times 2N)} \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{b,1} + d_{sec} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 0 & d_{b,N} + d_{sec} & & & \\ -d_{b,1} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -d_{b,N} & & \\ & & & & & \\ -d_{b,1} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -d_{b,N} & & \\ \dots & & & & & \\ d_{b,1} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_{b,N} & & \end{bmatrix}_{(2N \times 2N)} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & -k_c & 0 & \dots & 0 & -k_c \\ -k_c & \bar{k}_2 & -k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_c & \bar{k}_{N-1} & -k_c \\ -k_c & 0 & \dots & 0 & -k_c & \bar{k}_N \\ -k_{b,1} & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & -k_{b,N} \\ & & & & & \\ -k_{b,1} & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \dots & & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & -k_{b,N} \\ k_{b,1} & 0 & \dots & & & \\ 0 & \dots & & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & k_{b,N} \end{bmatrix}_{(2N \times 2N)} \quad (5)$$

wobei $\bar{k}_i = k_{sec} + 2 \cdot k_c + k_{b,i}$

Im hier vorliegenden Fall werden freie Schwingungen betrachtet, weshalb die rechte Seite des Gleichungssystems gleich dem Nullvektor ist. Das so beschriebene homogene, gewöhnliche, lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung berücksichtigt sowohl Kopplungs- als auch Dämpfungserscheinungen zwischen den einzelnen Freiheitsgraden. Für die Formulierung des Eigenwertproblems aus der Bewegungsgleichung heraus werden weitere Vereinbarungen getroffen. Da sich die Dämpfung des Systems ausschließlich aus Materialdämpfungstermen zusammensetzt ($d_{b,i}, d_{sec} \approx 10^{-4}$) und somit keinen signifikanten Einfluss auf das Eigenschwingungsverhalten des Schwingers hat, wird diese vernachlässigt [2]. Die Linearität und Homogenität der Differentialgleichungen rechtfertigen die Verwendung des Exponentialansatzes für die Funktion der Zustandsgröße:

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{2N} \hat{x}_k e^{-j\omega_k t}. \quad (6)$$

Das Eigenwertproblem ergibt sich somit zu:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})\underline{x} = \underline{0}. \quad (7)$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung:

$$\det(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) = 0. \quad (8)$$

Eine Umstrukturierung der Systemmatrizen und des daraus resultierenden Eigenwertproblems in Blockmatrixschreibweise birgt Rechenvorteile, welche man beim späteren Lösen des Eigenwertproblems benötigt. Hierbei werden Systemmatrizen der Dimension 2×2 gebildet, deren Glieder wiederum aus Matrizen der Dimension $N \times N$ bestehen (9)(10).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad (10)$$

Die Besetzung der Untermatrizen $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ sowie $\mathbf{K}_1 \dots \mathbf{K}_4$ stimmt dabei mit dem jeweiligen Quadranten der ursprünglichen Systemmatrix überein.

Den letzten Arbeitsschritt bei der Definition des Eigenwertproblems bildet die Zusammenfassung der Summe aus (7) in eine Blockmatrix \mathbf{EW} .

$$\mathbf{EW} \underline{x} = \underline{0} \quad (11)$$

$$\text{mit } \mathbf{EW} = \begin{bmatrix} \mathbf{EW}_1 & \mathbf{EW}_2 \\ \mathbf{EW}_3 & \mathbf{EW}_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{EW}_1 = \dots \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} -m_{\text{sec}}\omega^2 + \bar{k}_1 & -k_c & 0 & \dots & 0 & -k_c \\ -k_c & -m_{\text{sec}}\omega^2 + \bar{k}_2 & -k_c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_c & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \vdots \end{bmatrix}_{(N \times N)}$$

$$\mathbf{EW}_2 = \mathbf{EW}_3 = \begin{bmatrix} -k_{b,1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k_{b,N} \end{bmatrix}_{(N \times N)} \quad (13)$$

$$\mathbf{EW}_4 = \begin{bmatrix} -m_b\omega^2 + k_{b,1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -m_b\omega^2 + k_{b,N} \end{bmatrix}_{(N \times N)} \quad (14)$$

4. ANALYTISCHE LÖSUNG DES MODELL-SPEZIFISCHEN EIGENWERTPROBLEMS

Der Abschnitt beschreibt eine Methodik, welche es ermöglicht, die Eigenwerte und Eigenformen eines zyklisch symmetrischen Koppelschwingers beliebigen Systemumfangs auf analytischem Weg zu ermitteln. Grundlage für die folgenden Betrachtungen bildet das Eigenwertproblem aus (11). Nach der Formulierung des Eigenwertproblems muss im nächsten Schritt das charakteristische Polynom, welches sich aus der Determinante von (11) ergibt, bestimmt werden. Gemäß [3] erhält man die Determinante einer voll besetzten Blockmatrix durch die multiplikative Verknüpfung der Determinanten ihrer Hauptdiagonalglieder (15), wenn gilt: \mathbf{B} oder $\mathbf{C} = \mathbf{0}$.

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{D} \quad (15)$$

Jedoch sind in der aktuellen Formulierung weder \mathbf{B} beziehungsweise \mathbf{EW}_2 noch \mathbf{C} beziehungsweise \mathbf{EW}_4 gleich der Nullmatrix, sodass das Eigenwertproblem an dieser Stelle zunächst in eine obere und unter Dreiecksform zerlegt wird:

$$\mathbf{EW} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{EW}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{EW}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{EW}_1 - \mathbf{EW}_2\mathbf{EW}_4^{-1}\mathbf{EW}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{EW}_4^{-1}\mathbf{EW}_3 & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Weiter gilt die Produktregel für Determinanten [3], welche besagt, dass die Determinante einer Matrix dem Produkt der Determinanten ihrer zerlegten Teilmatrizen entspricht:

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \det \mathbf{B} \det \mathbf{C} \quad (17)$$

mit $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

Durch Anwendung von (17) auf (16) erhält man schließlich:

$$\det(\mathbf{EW}) = \dots$$

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{EW}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{EW}_4 \end{bmatrix}}_{D1} \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} \mathbf{EW}_1 - \mathbf{EW}_2\mathbf{EW}_4^{-1}\mathbf{EW}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{EW}_4^{-1}\mathbf{EW}_3 & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{D2} \quad (18)$$

Was unter Ausnutzung von (15) auf folgende Ausdrücke führt:

$$D1 = \det \mathbf{E} \det \mathbf{EW}_4 = \det \mathbf{EW}_4 \quad (19)$$

$$D2 = \det(\mathbf{EW}_1 - \mathbf{EW}_2\mathbf{EW}_4^{-1}\mathbf{EW}_3) \det \mathbf{E} \quad (20)$$

$$= \det(\mathbf{EW}_{1,\text{red}})$$

wobei $\mathbf{EW}_{1,\text{red}} = \mathbf{EW}_1 - \mathbf{EW}_2\mathbf{EW}_4^{-1}\mathbf{EW}_3$.

Der Ausdruck (19) lässt sich ohne großen Aufwand auswerten und liefert als Ergebnis ein Polynom N-ter Ordnung:

$$D1 = (-m_b \omega^2 + k_b)^N \quad (21)$$

Die Auswertung der Determinante aus (20) gestaltet sich ungleich schwieriger, da hier zusätzlich zu den Hauptdiagonalgliedern Nebendiagonalglieder auftauchen. Bei näherer Betrachtung wird deutlich, dass die zu Matrix eine zyklische Struktur aufweist:

$$EW_{1_red} = \begin{bmatrix} H & N & 0 & \dots & 0 & N \\ N & H & N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & & \\ \dots & & & & & \dots \\ N & 0 & \dots & 0 & N & H \end{bmatrix}_{(N \times N)} \quad (22)$$

$$\text{mit } H = -m_{sec} \omega^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2}$$

$$\text{und } N = -k_c$$

Nach [4] ist es möglich die Determinante einer beliebig dimensionierten zyklischen Matrix **A** über den Algorithmus (23) zu bestimmen:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{k=0}^{N-1} (a_0 + \varepsilon_k a_1 + \varepsilon_k^2 a_2 + \dots + \varepsilon_k^{N-1} a_{N-1})$$

$$\text{wobei } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{bmatrix}_{(N \times N)} \quad (23)$$

$$\text{und } \varepsilon_k = e^{\frac{zjk\pi}{N}}$$

Übertragen auf die in (22) beschriebene Matrix ergibt sich für deren Determinante ein Polynom der Form:

$$D2 = \prod_{k=0}^{N-1} \left(-m_{sec} \omega^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} + \varepsilon_k (-k_c) + \varepsilon_k^{N-1} (-k_c) \right) \quad (24)$$

$$\text{wobei } \varepsilon_k = e^{\frac{zjk\pi}{N}}$$

$$\text{und } a_2 \dots a_{N-2} = 0$$

Setzt man die beiden Teildeterminanten D1 und D2 gemäß (18) zusammen, ergibt sich das charakteristische Polynom des Ersatzmodells:

$$(-m_b \omega^2 + k_b)^N \cdot \prod_{k=0}^{N-1} \left(-m_{sec} \omega^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} + \varepsilon_k (-k_c) + \varepsilon_k^{N-1} (-k_c) \right) \quad (25)$$

Es besteht nach wie vor die in (8) beschriebene Forderung nach Singularität der Matrix **EW**, um eine nichttriviale Lösung für Eigenwerte und Eigenvektoren zu erzeugen. Ein direktes Auflösen, der durch Null setzen des charakteristischen Polynoms entstehenden charakteristischen Gleichung, ist an dieser Stelle nicht sinnvoll. Das Ergebnis wäre wiederum ein hochgradiges Polynom, welches analytisch nicht zu behandeln ist. Vielmehr sollte sich dem Vorteil bedient werden, welcher durch die hervorgegangene Produktschreibweise entstanden ist. So ist es hinreichend, dass dem Produktzeichen zugehörige Polynom auf Nullstellen zu untersuchen. Zuvor muss jedoch der Term $(-m_b \omega^2 + k_b)^N$ unter Verwendung der Produktregeln dem Produktzeichen zugeordnet werden. Es gilt:

$$b^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} a_k = \prod_{k=0}^{n-1} a_k b \quad (26)$$

Wie gerade erläutert, können die Nullstellen der charakteristischen Gleichung durch Null setzen des dem Produktzeichen zugehörigen Polynoms ermittelt werden:

$$\left[-m_{sec} \omega^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} - k_c e^{\frac{zjk\pi}{N}} \dots - k_c \left(e^{\frac{zjk\pi}{N}} \right)^{N-1} \right] (-m_b \omega^2 + k_b) = 0 \quad (27)$$

Vor dem Auflösen dieser charakteristischen Gleichung müssen zunächst die komplexen Euler'schen Terme der Gleichung (27) unter Zuhilfenahme der Exponentialgesetze in die trigonometrische Form überführt werden:

$$e^{\frac{zjk\pi}{N}} \rightarrow \cos \frac{2k\pi}{N} + j \sin \frac{2k\pi}{N} \quad (28)$$

$$\left(e^{\frac{zjk\pi}{N}} \right)^{N-1} \rightarrow \cos \frac{2k\pi}{N} - j \sin \frac{2k\pi}{N}$$

Substituiert man die komplexen Euler'schen Terme aus Gleichung (27) durch die in (28) beschriebenen gleichwertigen trigonometrischen Ausdrücke und löst die charakteristische Gleichung nach ω^2 auf, ergeben sich die konkreten Eigenwerte eines N Sektoren umfassenden Bliskmodells zu:

$$\omega_{\xi}^2(k) = \frac{\bar{k} m_b + k_b m_{sec} - 2k_c m_b \cos \frac{2k\pi}{N}}{2m_b m_{sec}} \mp \dots$$

$$\sqrt{\frac{4k_b m_{sec} m_b \left[k_b - \bar{k} + 2k_c \cos \frac{2k\pi}{N} \right] + \left[\bar{k} m_b + k_b m_{sec} - 2k_c m_b \cos \frac{2k\pi}{N} \right]^2}{2m_b m_{sec}}}$$
(29)

mit $k = 0, 1, \dots, N - 1$

und $\xi = 1, 2$

Unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs der Laufvariablen werden auf diesem Weg $2N$ Eigenkreisfrequenzen bestimmt.

Um die Systemeigenschwingungen vollständig charakterisieren zu können, muss wiederum Kenntnis über die Gestalt der Eigenformen erlangt werden. Die Eigenvektoren werden durch sukzessives Einsetzen der Eigenkreisfrequenzen in das Eigenwertproblem und anschließendes Auflösen des daraus resultierenden Gleichungssystems nach $\hat{\mathbf{x}}_{\xi}$ ermittelt (30). Diese Vorgehensweise führt im Falle großer Systemmatrizen jedoch auf entsprechend große Gleichungssysteme. Die Schwierigkeit besteht deshalb darin, einen allgemeingültigen Algorithmus für die Bestimmung der Eigenvektoren von beliebig großen Systemen formulieren zu können.

$$\mathbf{EW}(\omega_{\xi}^2(k)) \hat{\mathbf{x}}_{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{EW}_1 & \mathbf{EW}_2 \\ \mathbf{EW}_3 & \mathbf{EW}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\xi D} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\xi B} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

$$\text{I. } \mathbf{EW}_1 \hat{\mathbf{x}}_{\xi D} + \mathbf{EW}_2 \hat{\mathbf{x}}_{\xi B} = \mathbf{0} \quad (31)$$

$$\text{II. } \mathbf{EW}_3 \hat{\mathbf{x}}_{\xi D} + \mathbf{EW}_4 \hat{\mathbf{x}}_{\xi B} = \mathbf{0} \quad (32)$$

Das in Blockmatrizen formulierte Gleichungssystem aus (30) beinhaltet vier von Null verschiedene Untermatrizen (11). Um die Lösung dieses Systems möglichst einfach zu gestalten, bietet es sich an, ähnlich dem Vorgehen zur Determinantenberechnung, die Blockmatrix in eine obere Dreiecksform zu überführen (33). Dies gelingt, in dem man die mit $\mathbf{EW}_2 \mathbf{EW}_4^{-1}$ multiplizierte Gleichung (32) zur Gleichung (31) addiert. Die reduzierte Matrix $\mathbf{EW}_{1,red}$ wird auch als Schur Komplement² bezeichnet (20).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{EW}_{1,red} & \mathbf{0} \\ \mathbf{EW}_3 & \mathbf{EW}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\xi D} \\ \hat{\mathbf{x}}_{\xi B} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (33)$$

Das Schur Komplement in der hier vorliegenden Form fand bereits bei der Determinantenberechnung Verwendung (vgl. (16)). Durch die Umformung ist es nun möglich, aus der ersten Zeile des Gleichungssystems die Amplitu-

denverhältnisse für die Scheibenfreiheitsgrade zu bestimmen. Die zyklische Struktur des in diesem Beispiel entstehenden Schur Komplements, welche schon die Bestimmung der Determinante positiv beeinflusst hat, wird auch bei der Berechnung der N unbekanntenen Amplitudenverhältnisse $\hat{\mathbf{x}}_{\xi,1 \dots N}$ aus N Gleichungen von Vorteil sein.

Bei näherer Betrachtung der ersten Zeile des Blockmatrixgleichungssystems fällt auf, dass die einzelnen Gleichungen eine identische Struktur aufweisen. Sie unterscheiden sich lediglich zeilenweise in den verwendeten Indizes:

$$\text{I. (1) } \left(-m_{sec} \omega_{\xi}^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} \right) \hat{x}_{\xi D,1} - k_c \left(\hat{x}_{\xi D,2} + \hat{x}_{\xi D,N} \right) = 0,$$

$$\text{I. (2) } \left(-m_{sec} \omega_{\xi}^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} \right) \hat{x}_{\xi D,2} - k_c \left(\hat{x}_{\xi D,3} + \hat{x}_{\xi D,1} \right) = 0, \quad (34)$$

⋮

$$\text{I. (N) } \left(-m_{sec} \omega_{\xi}^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} \right) \hat{x}_{\xi D,N} - k_c \left(\hat{x}_{\xi D,1} + \hat{x}_{\xi D,N-1} \right) = 0,$$

was in verallgemeinerter Schreibweise auf eine Differenzgleichung der Form

$$\alpha(\omega_{\xi}) \cdot \hat{x}_{\xi D,i+1} - k_c \cdot \left(\hat{x}_{\xi D,i+2} + \hat{x}_{\xi D,i} \right) = 0$$

$$\text{mit } \alpha(\omega_{\xi}) = -m_{sec} \omega^2 + \bar{k} - \frac{k_b^2}{k_b - m_b \omega^2} \quad (35)$$

und $i = 0, 1, \dots, N - 1$

führt. Für die Spezialfälle $i = 0$ sowie $i = N - 1$ gilt aufgrund der Geschlossenheit der hier betrachteten Feder-schwinger-kette, dass $\hat{x}_{\xi D,0} = \hat{x}_{\xi D,N}$ und $\hat{x}_{\xi D,N+1} = \hat{x}_{\xi D,1}$. Bei der Lösung dieser homogenen linearen Differenzgleichung 2. Ordnung bedient man sich des Ansatzes³:

² Eine detaillierte Beschreibung zum Vorgehen beim Reduzieren von Gleichungssystemen in Blockmatrizen-schreibweise kann [5] S.297 ff. entnommen werden.

³ Die genaue Struktur einer Differenzgleichung, sowie Ansätze zu deren Lösung werden in [6] S.149-153 erläutert.

$$\hat{x}_{\xi D,i} = \tilde{A} \cdot \beta^i \quad (36)$$

Das Einsetzen in die Differenzgleichung ergibt:

$$-k_c \beta^{i+2} + \alpha(\omega_\xi) \beta^{i+1} - k_c \beta^i = 0 \quad (37)$$

Eine anschließende Division durch $-k_c \beta^i$ führt auf die charakteristische Gleichung:

$$\beta^2 - \frac{\alpha(\omega_\xi)}{k_c} \beta + 1 = 0 \quad (38)$$

Eine Berechnung der Nullstellen dieser charakteristischen Gleichung liefert für $\alpha(\omega_1)$ den Ausdruck:

$$\beta_{1,2} = \frac{\alpha(\omega_1)}{2k_c} \pm \sqrt{\frac{\alpha(\omega_1)^2}{4k_c^2} - 1} \quad (39)$$

mit (35), (29) folgt

$$\beta_{1,2} = \cos \frac{2k\pi}{N} \pm \sqrt{-\left(\sin \frac{2k\pi}{N}\right)^2} \quad (40)$$

und schließlich

$$\beta_{1,2} = \cos \frac{2k\pi}{N} \pm j \sin \frac{2k\pi}{N} \quad (41)$$

Das Auswerten der Nullstellen für $\alpha(\omega_2)$ liefert:

$$\beta_{1,2} = \cos \frac{2k\pi}{N} \pm j \sin \frac{2k\pi}{N} \quad (42)$$

Da die Nullstellen $\beta_{1,2}$ für $\alpha(\omega_1)$ identisch den Nullstellen $\beta_{1,2}$ für $\alpha(\omega_2)$ sind, kann die allgemeine Lösung für $\hat{x}_{\xi D,i}$ in Kombination mit dem in (36) bereitgestellten Ansatz durch folgende Aussage beschrieben werden:

$$\hat{x}_{\xi D,i}(k) = \tilde{A}_1 \left(\cos \frac{2k\pi}{N} + j \sin \frac{2k\pi}{N} \right)^i + \tilde{A}_2 \left(\cos \frac{2k\pi}{N} - j \sin \frac{2k\pi}{N} \right)^i \quad (43)$$

Bemüht man die Formel von de Moivre⁴, ergibt sich eine allgemeine Lösung für die Scheibenkomponenten der Eigenvektoren besonders vorteilhaft zu.

$$\hat{x}_{\xi D,i}(k) = A_1 \cos \frac{2k\pi i}{N} + A_2 j \sin \frac{2k\pi i}{N} \quad (44)$$

⁴ Nach [7], S.371 besagt die Formel von de Moivre, dass für ganzzahlige Exponenten i gilt: $(\cos x \pm j \sin x)^i = \cos ix \pm j \sin ix$.

$$A_1 = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$$

$$A_2 = \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2$$

$$N = \text{Anzahl der Sektoren} \quad (45)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\xi = 1, 2$$

Da im Rahmen dieses Kapitels ausschließlich die allgemeine Lösung des Eigenwertproblems betrachtet werden soll, können die Konstanten A_1 und A_2 frei gewählt werden. Die Beliebigkeit der Konstantenwahl begründet sich in der Tatsache, dass es sich bei Eigenvektoren per Definition um frei skalierbare Vektoren handelt. Die bestehende Forderung nach linearer Unabhängigkeit der verschiedenen Eigenvektoren wird durch die Konstantenwahl in keiner Weise beeinträchtigt. Aus Gründen der Vereinfachung werden beide Konstanten zu eins gesetzt.

$$A_1 = 1 \quad (46)$$

$$A_2 = 1$$

Mittels Umformung des Blockmatrizengleichungssystems in eine obere Dreiecksform ist es gelungen, eine Aussage über die Gestalt der Scheiben- Eigenvektorkomponenten zu treffen. Folglich besteht der nächste Schritt darin, die zugehörigen Schaufelkomponenten zu identifizieren. Entsprechend der Vorgehensweise zur Lösung von linearen Gleichungssystemen werden hierzu die jetzt bekannten Scheibenkomponenten der Eigenvektoren in die zweite Zeile des Blockmatrizengleichungssystems (32) eingesetzt. Es stehen damit N Gleichungen für N Unbekannte zur Verfügung. Bei genauer Analyse der N Gleichungen zeigt sich, dass die Möglichkeit besteht, jede einzelne Gleichung ohne weitere Umformschritte nach der gesuchten Schaufelkomponente des Eigenvektors aufzulösen:

$$\begin{aligned} \text{II.}(1) \quad & -k_b \hat{x}_{\xi D,1} + (-m_b \omega_\xi^2 + k_b) \hat{x}_{\xi B,1} = 0 \\ \text{II.}(2) \quad & -k_b \hat{x}_{\xi D,2} + (-m_b \omega_\xi^2 + k_b) \hat{x}_{\xi B,2} = 0 \\ & \vdots \\ \text{II.}(N) \quad & -k_b \hat{x}_{\xi D,N} + (-m_b \omega_\xi^2 + k_b) \hat{x}_{\xi B,N} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Resultierend aus diesem Sachverhalt ist festzustellen, dass sich die einzelnen Zeilen lediglich in den auftretenden Indizes unterscheiden. Das rechtfertigt eine verallgemeinerte Schreibweise der Form:

$$\text{II.}(1) \dots \text{II.}(N) \quad -k_b \hat{x}_{\xi D,i} + (-m_b \omega_\xi^2 + k_b) \hat{x}_{\xi B,i} = 0 \quad (48)$$

Nach $\hat{x}_{\xi B,i}$ aufgelöst ergeben sich die Schaufelkomponenten der Eigenvektoren zu:

$$\hat{x}_{\xi B,i}(k) = \frac{k_b \hat{x}_{\xi D,i}(k)}{(-m_b \omega_{\xi}^2 + k_b)} \quad (49)$$

Die Zielstellung der Arbeit wurde somit an dieser Stelle erreicht. Der Algorithmus ermöglicht es, die Eigenkreisfrequenzen (29) und Eigenvektoren (50) des äquivalenten Bliskmodells, mit den eingangs formulierten Voraussetzungen, auf analytischem Weg zu bestimmen.

$$\underline{\hat{x}}_{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{\xi D} \\ \hat{x}_{\xi B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ \cos \frac{2k\pi(N-1)}{N} + j \sin \frac{2k\pi(N-1)}{N} & & & \\ & k_b & & \\ & (-m_b \omega_{\xi}^2 + k_b) & & \\ & & \dots & \\ k_b \left(\cos \frac{2k\pi(N-1)}{N} + j \sin \frac{2k\pi(N-1)}{N} \right) & & & \\ & (-m_b \omega_{\xi}^2 + k_b) & & \end{bmatrix} \quad (50)$$

(2N×1)

5. ZUSAMMENFASSUNG

Um die Eigenwerte eines diskretisierten Systems zu ermitteln werden die Nullstellen der charakteristischen Gleichung bestimmt. Die zugehörigen Eigenformen können durch Einsetzen der Eigenwerte in das Eigenwertproblem und die anschließende Lösung des Gleichungssystems ermittelt werden. Inwiefern eine analytische Berechnung der Nullstellen der charakteristischen Gleichung möglich ist, hängt vom Grad des charakteristischen Polynoms ab. Ein beliebig dimensionierter Mehrmassenschwinger liefert für praxisrelevante Konfigurationen eine entsprechend hochgradige charakteristische Gleichung, deren Nullstellen nicht analytisch berechnet werden können.

Es wurde eine Methodik vorgestellt, welche es ermöglicht, die Eigenkenngrößen eines beliebig dimensionierten zyklisch symmetrischen Mehrmassenschwingers analytisch zu eruiieren. Dabei ist es unter Ausnutzung der Systemsymmetrie gelungen, die charakteristische Gleichung in eine Produktschreibweise zu überführen, aus der heraus die Nullstellen analytisch ausgewertet werden können. Aus dem Einsetzen dieser Nullstellen in das Eigenwertproblem resultiert das Gleichungssystem, dessen Lösung die Eigenvektoren liefert. Es wurde gezeigt, dass es, ebenfalls unter Ausnutzung der Systemsymmetrie, möglich ist, dieses Gleichungssystem für beliebig dimensionierte Federschwingerketten in Differenzgleichungen zu überführen und entsprechend der Theorie der Differenzgleichungen zu lösen.

6. REFERENZEN

- [1] Willumeit, H.P.: *Modelle und Modellierungsverfahren in der Fahrzeugdynamik*. 1.Auflage, Leipzig: Teubner Verlag, 1998
- [2] Beirow, B.: *Grundlegende Untersuchungen zum Schwingungsverhalten von Verdichterlaufrädern in Integralbauweise*. Aachen: Shaker Verlag, 2009
- [3] Weber, M.R.: *Matrizen und Determinanten*. [Online] 08.03.2010 (<http://www.math.tu-dresden.de/~kalauch/teach/determinanten.pdf>)
- [4] Reshetukha, I.V.: *Application of a cyclic determinant in the theory of cubic residues*. In: *Mathematical Notes*. (November 1983, Band 34) Heft 5, S.884-891
- [5] Zurmühl, F.: *Matrizen und ihre Anwendungen – Teil 1*. 5. Auflage, Berlin: Springer Verlag, 1984
- [6] Gohout, W.; Reimer, D.: *Formelsammlung Mathematik für Wirtschaft und Technik*. 3.Auflage, Frankfurt (a.M.): Verlag Harri Deutsch, 2005 S.149-153
- [7] Bartsch, H.J.: *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. 18. Auflage, Leipzig: Fachbuchverlag, 1999