

# EIN PRAXISNAHER ANSATZ ZUR INTERVALLTHEORETISCHEN BETRACHTUNG VON MODELLIERUNGSUNSICHERHEITEN BEI DER FLATTERANALYSE VON FLUGZEUGEN

J. Schwochow

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Institut für Aeroelastik,  
Göttingen, D-37073  
e-mail: jan.schwochow@dlr.de

## Zusammenfassung

Die Untersuchung des dynamischen aeroelastischen Stabilitätsverhaltens von Flugzeugen erfordert sehr komplexe Rechenmodelle, welche die wesentlichen elastomechanischen und instationären aerodynamischen Eigenschaften der Konstruktion wiedergeben sollen. Bei der Modellbildung müssen einerseits Vereinfachungen und Idealisierungen zur Anwendung der Finite-Element-Methode und der aerodynamischen Theorie vorgenommen werden, deren Auswirkungen auf das Simulationsergebnis zu bewerten sind. Andererseits können die strukturdynamischen Kenngrößen durch den Standschwingungsversuch identifiziert werden, wobei die Ergebnisse Messungenauigkeiten enthalten. Für eine robuste Flatteruntersuchung müssen die identifizierten Unwägbarkeiten in allen Prozessschritten über die Festlegung von unteren und oberen Schranken konservativ ermittelt werden, um für alle Flugzustände eine ausreichende Flatterstabilität sicherzustellen. Zu diesem Zweck wird ein Rechenverfahren vorgestellt, welches die klassische Flatteranalyse mit den Methoden der Fuzzy- und Intervallarithmetik verbindet. Die effektive Untersuchung des unscharfen Parameterraums erfolgt mit der Transformationsmethode, mit der eine effektive Auswertung von Fuzzy-Mengen in der aeroelastischen Simulation durch eine Kombination von deterministischen Datenfeldern erfolgt, um einschließende Unschärfeintervalle für die aeroelastischen Dämpfungs- und Frequenzverläufe zu berechnen.

## FORMELZEICHEN

$[AIC]$	aerodynamische Einflusskoeffizientenmatrix
$[D]$	viskose Dämpfungsmatrix der physikalischen Freiheitsgrade (global)
$\{h_{1/4}\}, \{h_{3/4}\}, \left\{\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$	Vektor des Abwinds am $1/4, 3/4$ -Punkt, Anstellwinkel der aerodyn. Elemente
$[K]$	Steifigkeitsmatrix
$[M]$	Massenmatrix
$[Q_K]$	generalisierte (modale) Luftkraftsteifigkeitsmatrix
$[Q_D]$	generalisierte (modale) Luftkraftdämpfungsmatrix
$\{q_h\}$	Vektor der modalen Verschiebungen
$[T_{1/4}], [T_{3/4}], \frac{\partial [T_{3/4}]}{\partial x}$	Transformationsmatrix von globalen Freiheitsgraden zur Verschiebung in Normalenrichtung bzw. Drehung um Querachse
$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \dots \{\phi\}_h]$	Modalmatrix
$l_{ref}$	Referenzlänge
$M_\infty$	Machzahl
$V_\infty$	Anströmgeschwindigkeit
$p = \frac{l_{ref}}{V_\infty} s = g + ik$	komplexe reduzierte Frequenz
$s = \sigma + i\omega$	komplexe Frequenz, Laplacevariable
$\rho_\infty$	Luftdichte
Fuzzy-/ Intervallarithmetik	

$[\bar{A}], [\underline{A}], [A^C], [\Delta A]$	untere, obere Schranke, Zentrum, Radius einer Intervallmatrix
$\tilde{p}$	Fuzzy-Parameter
$u$	normierter Unschärfeparameter
Indizes	
$g$	physikalischen Freiheitsgrade
$h$	generalisierte modale Freiheitsgrade

## 1. EINLEITUNG

In dem sehr umfangreichen und vielschichtigen Prozess der Auslegung einer Flugzeugkonstruktion sind aeroelastische Fragestellungen von großer Bedeutung. Zum einen betreffen sie die Gewährleistung eines sicheren Betriebs, zum anderen die Optimierung der Flugleistung. Für einen effizienten und zuverlässigen aeroelastischen Zertifizierungsprozess ist es notwendig, in jedem Prozessschritt die noch vorhandenen Unwägbarkeiten in der aero- und strukturdynamischen Modellierung abzuschätzen, um sie dann durch gezielte Untersuchungen zu verringern und schließlich unter einen unkritischen Schwellwert zu drücken.

Ein besonderes Augenmerk liegt hierbei auf dem Phänomen des sogenannten Flatterns. Dabei handelt es sich um eine dynamische Instabilität, die bei angeströmten elastischen Körpern auftreten kann, deren Formgebung der Auftriebserzeugung dient, wie es bei einem Flugzeug der Fall ist. Somit beschreibt dieses Phänomen eine selbst erregte aeroelastische Schwingung, die bei dem Zusammenspiel von elastischen Auslenkungen und den

durch die Bewegung hervorgerufenen Luftkräften Energie aus der Strömung in die Struktur überträgt. Im ungünstigsten Fall können hierbei so starke Kräfte wirken, dass die schwingende Struktur massiv beschädigt oder sogar zerstört werden kann.

Um dieses zu vermeiden, erfordert die Untersuchung der dynamischen Stabilität die möglichst genaue Bestimmung des elastomechanischen Schwingungsverhaltens, der Strukturdämpfung, der Trägheitskräfte und der aerodynamischen Kräfte in Abhängigkeit der Strömungsparameter für die auftretenden Strukturbewegungen. Bei der Analyse muss nach der ungünstigsten Zusammensetzung der Einflussparameter (engl. *worst case*) gesucht werden, um einen sicheren Betrieb im gesamten Einsatzbereich zu gewährleisten. Hier kommen rechnerische Verfahren zum Einsatz, die ihrerseits wiederum ein Fehlerpotenzial in sich bergen können. So müssen bei der theoretischen aeroelastischen Modellbildung, wie bei der Finite Elemente Methode FEM, aus Praktikabilitätsgründen Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorgenommen werden, während bei dem anderen zur Anwendung kommenden Verfahren, dem Schwingungsexperiment, mit Messungenauigkeiten gerechnet werden muss.

Die verwendeten Modelle und ihre Parameter können also Unsicherheiten enthalten, welche die exakte Feststellung der Flutterstabilität erschweren. Eine Verfolgung der Auswirkungen von Unsicherheiten auf aeroelastische Stabilitätsaussagen während des gesamten Entwicklungsprozesses erscheint daher notwendig. Hierbei interessiert sich der Flatteringenieur insbesondere dafür, auf welche Weise und mit welcher Stärke sich die elastomechanischen oder aerodynamischen Unsicherheiten in der numerischen Lösung des aeroelastischen Stabilitätsproblems und den daraus berechneten Größen bemerkbar machen. Als Grundlage der klassischen Verfahren zur Bestimmung der Flutterstabilität dient ein deterministisches aeroelastisches Modell, das lediglich eine punktuelle und somit jeweils begrenzte Aussage erlaubt. Um dem Problem der Unschärfe Rechnung zu tragen, muss der Ingenieur mit großem Aufwand zahlreiche Sensitivitätsrechnungen durchführen und eine enorme Datenmasse auswerten.

Nachfolgend wird ein Verfahren vorgestellt, die sog. *c-int*-Methode (wobei „c“ für engl. continuation und „int“ für „Intervall“ steht), das die mathematische Methode der numerischen Fortsetzung zur Lösung des parameterabhängigen Systems der Flatterbewegungsgleichungen mit den Ansätzen aus der Fuzzy- und Intervallarithmetik verknüpft, um die Unschärfe von strukturellen Eingabeparameter auf eine Aussage zur aeroelastischen Stabilität abzubilden.

## 2. DIE AEROELASTISCHE PROBLEMSTELLUNG IM ÜBERBLICK

Bei einer konventionellen Flugzeugkonstruktion mit Tragflügel und Leitwerk wird der Flattermechanismus meist durch die Kopplung zweier gedämpfter Eigenschwingungsformen über die induzierten Luftkräfte möglich. Prinzipiell sind entweder alle symmetrischen oder alle antisymmetrischen Freiheitsgrade beteiligt. Zwei in der Frequenz enger benachbarte Freiheitsgrade werden dann jedoch vorherrschen, während die weiteren zur Dämpfung

und seltener zur Anfachung Beiträge leisten. In der Praxis häufig auftretende Flatterformen sind das klassische Biege-Torsions-Flattern eines Flügels und das Ruderflattern, an dem die Biegeschwingung eines Flügels und die Auslenkung einer vorhandenen Steuerfläche beteiligt sind. Bei der Auslegung von Trag- und Leitwerken muss somit darauf geachtet werden, dass koppelgefährdete Eigenbewegungen in ihrem Frequenzbereich weit genug auseinander liegen oder durch geeignete strukturelle Modifikationen die Schwingungsformen so verändert werden, dass die anfachende Wirkung der Kopplung über die Luftkräfte reduziert wird.

Das eigentliche Ziel der Flatteranalyse ist daher die Suche nach der kritischen Flattergeschwindigkeit, bei der die Flutterstabilitätsgrenze erreicht wird. In der Flatterrechnung werden im Allgemeinen die beiden dynamischen aeroelastischen Kenngrößen *Dämpfung* und *Frequenz* als Funktion der Fluggeschwindigkeit bestimmt, um die Entwicklung möglicher Instabilitäten darzustellen. Die Flattergleichungen erhält man aus dem Gleichgewicht der beteiligten Massenträgheitskräfte der Struktur  $I$ , den elastischen Rückstellkräften  $E$ , welche bei der Verformung entstehen, und den aerodynamischen Kräften  $A$ , die durch die statische oder dynamische Deformation der Struktur induziert werden:

$$(1) \quad I + E + A = 0 .$$

Die schwingende Bewegung eines Flugzeugs kann über dessen Eigenschwingungsformen und Eigenfrequenzen beschrieben werden. Einerseits können sie analytisch durch eine geeignete Idealisierung der bekannten Steifigkeits- und Masseneigenschaften der Flugzeugstruktur berechnet werden. Andererseits können diese modalen Eigenschaften auch im Experiment am Flugzeug bestimmt werden, das als *Standschwingungsversuch* bezeichnet wird. Hier werden die Beschleunigungsantworten der am Boden stehenden weich gestützten Flugzeugstruktur auf eine äußere Kraftanregung gemessen und die Eigenfrequenzen, die Strukturdämpfungen und die räumlichen Auslenkungsverteilungen identifiziert. Die Analyse der dynamischen Stabilität, die *Flutterstabilität*, beginnt mit der Aufstellung der strukturdynamischen Steifigkeitsmatrix  $[K]$  und Massenmatrix  $[M]$ , welche im Allgemeinen mithilfe der Methode der Finiten Elemente FEM bestimmt werden. Der instationäre Luftkraftvektor  $\{A(t)\}$ , der über die Anströmgeschwindigkeit  $V_\infty$  und die Luftdichte  $\rho_\infty$  skaliert ist, wird durch die Systemauslenkungen induziert. Seine Bestimmung erfordert die Kenntnis der im Fluge existierenden gedämpften Schwingungsbewegungen. Eine gute Näherung stellen die harmonischen Eigenschwingungsformen des frei schwingenden ungedämpften Systems ohne Luftkräfteinfluss dar, welche aus den FEM-Systemmatrizen als ein Eigenwertproblem berechnet werden können. Die aeroelastische Schwingungsbewegung des fliegenden Flugzeugs soll nun durch eine Kombination der identifizierten Eigenschwingungsformen, die spaltenweise in der Modalmatrix  $[\Phi_{gh}]$  aufgestellt sind, ausgedrückt werden:

$$(2) \quad \left( s^2 [M_{hh}] + s [D_{hh}] + [K_{hh}] - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 [Q_{hh}] \right) \{q_h\} = \{0\}$$

- $[M_{hh}] = [\Phi_{gh}]^T [M_{gg}] [\Phi_{gh}]$  gen. Massenmatrix,
- $[D_{hh}] = [\Phi_{gh}]^T [D_{gg}] [\Phi_{gh}]$  gen. Dämpfungsmatrix,
- $[K_{hh}] = [\Phi_{gh}]^T [K_{gg}] [\Phi_{gh}]$  gen. Steifigkeitsmatrix,
- $[Q_{hh}] = [\Phi_{gh}]^T [AIC(k, M_\infty)] [\Phi_{gh}]$  gen. Luftkraftmatrix,
- $[\Phi_{gh}]$  Modalmatrix,
- $\{q_h\}$  komplexe Beteiligungskoeffizienten,
- $s$  Laplacevariable.

Dabei entspricht der Übergang von den  $g$  physikalischen zu den  $h$  generalisierten (modalen) Freiheitsgraden in der Betrachtungsweise einem Übergang von einem Kräftegleichgewicht zu einem Energiegleichgewicht. Wenn die nun im Laplacebereich energetisch formulierten Flattergleichungen aufgestellt sind, kann für den interessierenden Geschwindigkeitsbereich durch Anwendung geeigneter numerischer Eigenwertlöungsverfahren der komplexe Eigenwert bestimmt werden. Für nicht-triviale Lösungen muss die Determinante der Koeffizientenmatrix aus Gl. (2) verschwinden. Der Realteil des zu bestimmenden Eigenwerts  $s = \sigma + i\omega$  gibt Auskunft über das Dämpfungsverhalten, während der Imaginärteil für die sich einstellende gedämpfte Schwingungsfrequenz in Abhängigkeit der Anströmungsparameter  $\rho_\infty$ ,  $V_\infty$  und  $M_\infty$  steht. Da das aeroelastische System  $h$  modale Freiheitsgrade umfasst, gibt es ebenso viele Eigenlösungen, die sukzessiv berechnet werden müssen.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht durch die nichtlineare Abhängigkeit der Luftkraftmatrix vom resultierenden Eigenwert über die reduzierte Frequenz und über die Machzahl. Eine Lösung kann deshalb nur iterativ erfolgen. Durch Einsetzen des ermittelten Eigenwerts ergibt sich der modale Eigenvektor  $\{q_h\}$ , welcher die komplexen Beteiligungskoeffizienten der modalen Freiheitsgrade an der sich einstellenden Schwingungsbewegung des aeroelastischen Systems beinhaltet. Aus den Beteiligungen lässt sich die Kopplungscharakteristik mehrerer Freiheitsgrade beim Flattern ablesen. Die rein numerisch durchgeführte Flatteruntersuchung setzt sich demnach aus den folgenden Teilprozessen zusammen:

- 1) Numerische Behandlung des dynamischen elastomechanischen Teilproblems:
  - a) Aufstellung der globalen Systemmatrizen  $[M]$  und  $[K]$  mit FEM,
  - b) Berechnung einer Auswahl interessierender Eigenschwingungen mit Eigenfrequenzen,
  - c) Modale Transformation der Systemmatrizen.
- 2) Alternativ: experimentelle Behandlung des dynamischen elastomechanischen Teilproblems:
  - a) Messung der Eigenschwingungen mit Eigenfrequenzen, Dämpfungen und modalen Massen im Standschwingungsversuch,
  - b) Aufstellung der modalen Systemmatrizen.
- 3) Behandlung des instationären aerodynamischen Teilproblems:
  - a) Aufbau des aerodynamischen Modells entsprechend der gewählten instationären Theorie,
  - b) Berechnung der instationären Luftkräfte in Ab-

hängigkeit der reduzierten Frequenz und Machzahl,

- c) modale Transformation der Luftkraftvektoren.
- 4) Räumliche Interpolation der Schwingungsbewegung auf das aerodynamische Gitter:
  - a) Bereitstellung der Transformationsmatrizen für Translationen und Rotationen zur Bestimmung der modalen Luftkraftmatrizen.
- 5) Lösung der Flattergleichungen:
  - a) Formulierung der Flattergleichungen als Energiegleichgewicht in modalen Freiheitsgraden,
  - b) iterative Lösung des komplexen aeroelastischen Eigenwertproblems,
  - c) Interpretation des Ergebnisses bzgl. der Flatterstabilität,
  - d) Identifikation von aeroelastischen Kopplungsmechanismen.

Der gesamte Prozessablauf ist in BILD 1 im Überblick dargestellt, wobei auf der linken Seite das analytische und auf der rechten Seite das experimentelle Vorgehen erkennbar ist.

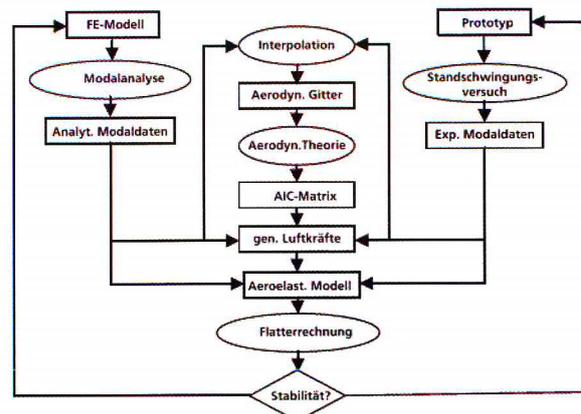


BILD 1. Prozessablauf für die Untersuchung der aeroelastischen Stabilität

### 3. UNSICHERHEITEN BEI DER SIMULATION TECHNISCHER SYSTEME

Aus der Aufschlüsselung der einzelnen Schritte zur Lösung des Flatterproblems im vorherigen Abschnitt wird deutlich, dass an vielen Stellen Unsicherheiten in den Prozess einfließen, welche sowohl bei der numerischen Modellbildung als auch im Experiment auftreten können. So entstehen die strukturdynamischen Systemmatrizen aus der Idealisierung und Diskretisierung der tatsächlichen Struktur als ein numerisches Modell, bei dem Annahmen über die Geometrie, kinematische Zusammenhänge, Werkstoffe usw. getroffen werden müssen. Auf der anderen Seite sind die experimentell bestimmten modalen Datensätze mit Messfehlern behaftet, die systematisch oder stochastisch bedingt sein können. Es ist daher sinnvoll, die daraus entstehenden Unsicherheiten in jedem Teilschritt zu analysieren, welche dann als Intervalle mit oberen und unteren Schranken eingegrenzt werden sollen, um sie im Gesamtprozess verfolgen zu können. Demzufolge wird für jeden Teilprozess ein Verfahren zur Verfolgung von Unsicherheiten vorgestellt, in dem vorgegebene Intervalle der Eingabeparameter durch den jeweiligen Teilprozess geschleust werden, um sie an-

schließlich als Ausgabeintervalle für eine weitere Analyse bereitzustellen.

Für die Prognosequalität von Simulationsmodellen ist eine Bewertung des Einflusses unscharfer Fuzzy-Eingangsgrößen wünschenswert. Dabei stellt sich die Frage nach den Werkzeugen, mit denen diese Unsicherheiten modelliert und quantifiziert werden können. Weiterhin ist zu klären, mit welchen Größen sich der Einfluss der modellierten Unsicherheiten aussagekräftig bewerten lässt und welchen Einfluss der Abstraktionsgrad der Modellierung auf die gewünschte Aussagekraft besitzt. Zur Identifikation von Systemunsicherheiten ist es nötig, die Begriffe „Variabilität“, „Unsicherheit“ und „Fehler“ klar voneinander abzugrenzen. In [2] und [3] werden mehrere Möglichkeiten der Begriffsfestlegung beschrieben. Nachfolgend sollen die Definitionen von Oberkampf aus [6] vorgestellt werden, die zwischen Variabilität, Unsicherheit und Fehler unterscheiden:

*Variabilität* bezeichnet die Abweichung, die ein physikalisches System oder seine Umgebung beinhaltet und die sich nicht verringern lässt. Sie wird daher als *aleatorische*, unreduzierbare, inhärente, stochastische oder zufällige Unsicherheit bezeichnet. Beispiele für Variabilität sind Schwankungen in der Strukturdämpfung oder in der Steifigkeit mechanischer Verbindungen. Sie kann aber auch Parameter betreffen, die sich über einen Zeitraum, z. B. durch Alterung, verändern oder die von Bauteil zu Bauteil einer Serie variieren.

*Unsicherheit* ist in jeder Phase des Modellierungsprozesses stets auf eine unzureichende Kenntnis über das System oder seine Parameter zurückzuführen. Sie wird auch als *epistemische* oder reduzierbare Unsicherheit bezeichnet. Beispiele können nicht festgelegte Fertigungsmaße, Eigenschaften noch nicht festgelegter Materialien oder Randbedingungen sein. Mit wachsender Kenntnis des Systems lässt sich der Anteil der Unsicherheit eines Modells verringern.

*Fehler* stellen ein erkennbares Defizit im Modellierungs- und Simulationsprozess für das System dar. Dabei liegt kein Mangel von Wissen vor, sondern es werden zur Reduktion des Simulationsaufwands bewusst Fehler in Kauf genommen, deren Auswirkungen abgeschätzt werden können.

Zur numerischen Einbeziehung von Unsicherheiten und Variabilitäten in die Simulation eines Systems werden in der Regel zwei verschiedene Ansätze verfolgt:

- die probabilistischen (wahrscheinlichkeitsbasierten) Methoden und
- die possibilistischen (möglichkeitsbasierten) Methoden.

Das wohl am weitesten verbreitete probabilistische Verfahren ist die Monte-Carlo-Methode. Hier werden unsichere Modellparameter durch Zufallsvariablen repräsentiert und durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion quantifiziert. Eine wiederholte Auswertung mit zufälligen Parametern, die über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ausgewählt werden, führt auf eine stochastische Verteilung der Ausgangsgrößen, welche zur Bestimmung von Vertrauensintervallen mit statistischen Verfahren auszuwerten sind.

Klassische Unsicherheiten, die durch eine Wissenslücke oder mangelnde Kenntnisse des Systems hervorgerufen werden, lassen sich am besten durch einen possibilistischen Ansatz beschreiben. Dabei wird jeder Parameter durch eine Menge von Parameterwerten ausgedrückt, die eine definierte Zugehörigkeit zu dieser Menge besitzen. Die Menge der Parameterwerte kann mit einem Intervall oder einer Fuzzy-Zahl ausgedrückt werden. Possibilistische Methoden beruhen auf intervall- oder fuzzy-arithmetischen Konzepten. Wenn keine Verteilungsfunktionen explizit zugeordnet werden können, ist es oftmals recht schwierig, für unscharfe Systemparameter gut begründete Annahmen zu treffen, insbesondere dann, wenn vielleicht überhaupt keine versuchstechnischen Messungen vorliegen. Auch die zu einem frühen Zeitpunkt in der Entwicklung eines Produktes noch nicht endgültig festgelegte Werkstoffauswahl oder sogar das numerische Simulationsverfahren selbst können zu mehr oder minder ausgeprägten Unsicherheiten im Hinblick auf den Wertebereich und dessen Verteilung führen.

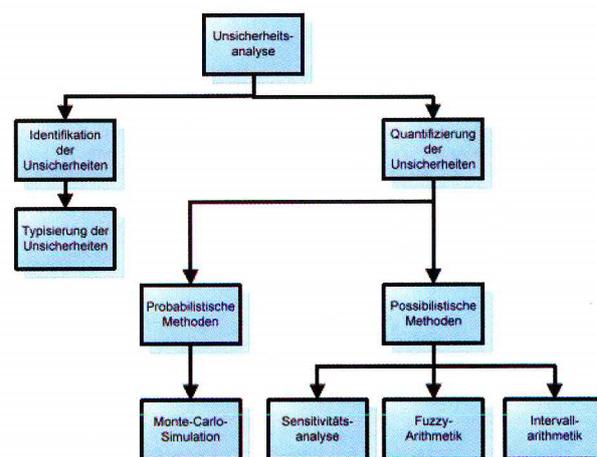


BILD 2. Analyse der Unsicherheit - Identifizierung und Quantifizierung

### 3.1. Angewandte Fuzzy-Arithmetik

Das Konzept der Fuzzy-Mengen wurde 1965 von L. Zadeh vorgeschlagen [1]. Es stellt zunächst eine Erweiterung der klassischen Mengentheorie auf die Theorie der unscharfen (engl. fuzzy) Mengen dar. Die Fuzzy-Arithmetik ergab sich aus dem Bedarf, mit unscharfen Zahlen grundlegende arithmetische Operationen, wie die vier Grundrechenarten, durchzuführen. Hierfür wurden verschiedene klassische Konzepte erarbeitet, die mehr oder weniger praktikabel sind. Für eine ausführliche Behandlung dieses Themas sei auf [3] und [4] verwiesen.

Der Gedanke der Fuzzy-Menge (engl. Fuzzy Set) als Erweiterung oder Verallgemeinerung einer Menge der klassischen Mengenlehre wird besonders deutlich, wenn man zunächst eine klassische oder scharfe Menge (engl. crisp set) betrachtet. Durch eine Fuzzy-Menge wird eine nur teilweise Zugehörigkeit eines Elements zu einer bestimmten Menge beschrieben. In einer scharfen Menge gilt für die Zugehörigkeitsfunktion:

$$(3) \mu_A = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{wenn } x \notin A \end{cases}$$

Diese Definition wird auf eine unscharfe Menge erweitert, indem die Zugehörigkeitsfunktion beliebige positive Werte annehmen kann:

$$(4) \mu_B = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in B \\ 0 & \text{wenn } x \notin B \\ p, 0 < p < 1 & \text{wenn } x \text{ teilweise in } B \end{cases}$$

Die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_B$  stellt den Grad der Zugehörigkeit oder den Zugehörigkeitswert eines Elements  $x$  zu der Fuzzy-Menge  $B$  dar. Beispielsweise gibt die Zugehörigkeitsfunktion für den gemessenen Wert eines Parameters den Grad der Zugehörigkeit mit *klein* oder *groß* an. Dieser Wert wird als *Möglichkeit* bezeichnet, welche nicht mit der *Wahrscheinlichkeit* bei statistischen Betrachtungen zu verwechseln ist. Die Fuzzy-Zugehörigkeit steht für die nur ungenau festlegbaren Eigenschaften eines Objekts. Im Gegensatz dazu beschreibt die Wahrscheinlichkeit die Häufigkeit des Auftretens dieser Eigenschaften. Die Zugehörigkeitsfunktionen von Fuzzy-Mengen können häufig durch dreiecks-, trapez- oder glockenförmige Normalverteilungen angenähert werden, wie sie in BILD 3 dargestellt sind.

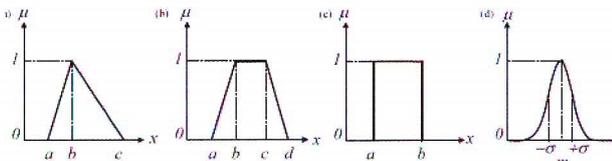


BILD 3. Prozessablauf für die Untersuchung der aeroelastischen Stabilität

### 3.2. Die Transformationsmethode

Die Transformationsmethode nach [4] reduziert das Rechnen mit Fuzzy-Zahlen auf Funktionsauswertungen mit scharfen Zahlen. Aus diesem Grund eignet sich die Transformationsmethode ganz besonders für die Berechnung komplexer Systeme mit unscharfen Parametern, die durch Fuzzy-Zahlen ausgedrückt werden. Zusätzlich bietet sie ein Werkzeug zur Ergebnisanalyse an, das Rückschlüsse der unsicheren Parameter auf das Ergebnis zulässt. Der Gesamtprozess der Transformationsmethode kann in fünf Schritte zusammengefasst werden:

- 1) Zerlegung der Fuzzy-Eingabeparameter  $\tilde{x}_i$  in Intervallmengen für jeden Schnitt der gewählten Zugehörigkeitsfunktionen (vgl. BILD 4),
- 2) Transformation der Intervalle in Datenfelder, welche sämtliche Kombinationen aller Schranken der Intervallmengen enthalten,

$$\hat{X}_i^{(j)} = \overbrace{(\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}, \alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}, \dots, \alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)})}^{2^{j-1} \text{ Paare}}, j = 0, 1, \dots, m,$$

- 3) Auswertung aller Datenfeldkombinationen mit der deterministischen Funktionsvorschrift für scharfe Zahlen,
- 4) Rücktransformation der Ergebnisdatenfelder in Intervalle für jeden Schnitt

$$Z^{(j)} = [a^{(j)}, b^{(j)}], j = 0, 1, \dots, m.$$

- 5) Zusammenfügen aller Intervallergebnisschnitte zu einer Zugehörigkeitsfunktion für den Fuzzy-Ausgabefunktionswert  $\tilde{y}$ .

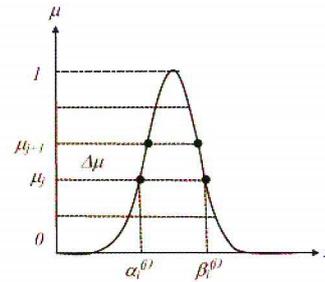


BILD 4. Implementierung eines unscharfen Parameters als eine in Intervalle zerlegte Fuzzy-Zahl

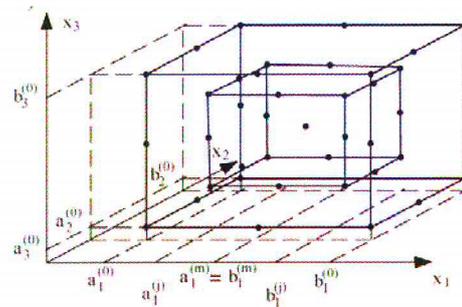


BILD 5. Auswertungsstützstellen für die allgemeine Transformationsmethode

Die Implementierung der Fuzzy-Arithmetik auf Basis der Transformationsmethode kann bei geometrischer Betrachtung als eine wiederholte Auswertung einer Funktion für Parameterkombinationen interpretiert werden, die auf einer  $n-1$ -dimensionalen Hyperfläche eines  $(m+1)$ -dimensionalen Hyperkubus liegen. Dabei wird jeder Kubus im  $n$ -dimensionalen Raum durch Intervalle aufgespannt, die den  $n$  Eingangsparametern zugeordnet sind. Für eine von drei Fuzzy-Parametern abhängige Funktion  $F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$  ist dieser Zusammenhang in BILD 5 dargestellt. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, werden für die Untersuchung von Modellierungsunsicherheiten bei der aeroelastischen Stabilitätsanalyse nur einfache Intervallunsicherheiten verwendet. Aus diesem Grund müssen alle unscharfen generalisierten Systemmatrizen der Flattergleichungen jeweils als Intervallmatrix mit Zentrum und Radius

$$(5) \begin{aligned} [X^c] &= \frac{[\bar{X}] + [X]}{2}, & x_{ij}^c &= \frac{\bar{x}_{ij} + x_{ij}}{2} \\ [\Delta X] &= \frac{[\bar{X}] - [X]}{2}, & \Delta x_{ij} &= \frac{\bar{x}_{ij} - x_{ij}}{2} \end{aligned}$$

vorliegen, wobei  $x_{ij}$  und  $\bar{x}_{ij}$  jeweils die untere bzw. obere Schranke jedes Elements der Matrix darstellen.

### 4. DIE INTERVALL FINITE ELEMENTE METHODE - IFEM

Die numerische Idealisierung mit der FEM bietet eine Punktvorhersage in dem Sinne, dass sie für eine deterministische Eingabe nur eine deterministische Systemantwort bereitstellen kann. In der praktischen Anwendung wird die Modellunschärfe durch Variation ausgewählter Modellparameter in mehrfachen Sensitivitätsuntersuchungen berücksichtigt. Hier ergibt sich die Problem-

stellung, welche Systemparameter mit welchen unteren und oberen Grenzen die Unschärfe eines Modells möglichst gut beschreiben. Für die Modellierung der Flugzeugstruktur mit FEM kann die Modellunschärfe bereits auf der Ebene der finiten Elemente ausgedrückt werden, z. B. durch Variation der Materialeigenschaften und der lokalen Geometrie. Es ist jedoch in der Praxis kaum möglich, die Vielfalt der Toleranzen bei Materialien, Formen, Größen und Fertigungen zu berücksichtigen.

Für die Flutteranalyse werden die Eigenschwingungsformen mit Eigenfrequenzen benötigt, deren Charakteristik von globalen Eigenschaften bestimmt wird. Sie hängen direkt von den Steifigkeits- und Massenverteilungen in den Einzelkomponenten des Flugzeugs ab. Für die Berücksichtigung von Unschärfeintervallen in der elastomechanischen Modellierung kann die Finite Elemente Methode FEM zur Intervall Finite Elemente Methode IFEM weiterentwickelt werden. Dazu ist es notwendig, die Zusammensetzung der Gesamtsystemmatrizen parametrisch zu formulieren. Die als unsicher identifizierten Strukturparameter werden als Vorfaktoren vor die einzelnen Elementmatrizen herausgezogen und erhalten eine Zugehörigkeitsfunktion gemäß der bereits in Abschnitt 3.1 eingeführten Definitionen der Fuzzy-Arithmetik. Der Einfachheit halber soll hier nur eine Rechteckverteilung als Zugehörigkeitsfunktion angenommen werden, welche durch die Angabe einer unteren und oberen Grenze vollständig festgelegt ist. Diese Definition führt auf die Intervall Faktor Methode, die in [7] ausführlich vorgestellt wird. Der nominale Wert liegt genau im Zentrum des Bereichs, so dass für das Intervall gilt:

$$(6) \quad 1 - \Delta u_j \leq \tilde{u}_j \leq 1 + \Delta u_j$$

Die unscharfen Massen- und Steifigkeitsmatrizen aller  $j$  finiten Elemente  $[M_{ss}^j]$  und  $[K_{ss}^j]$  werden mit der Transformationsmatrix  $[T_{sg}]$  in das Gesamtsystem eingeordnet. Der Aufbau der globalen Massen- und Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Summe über alle Elemente:

$$(7) \quad \begin{aligned} [M_{ss}^I] &= \sum_{j=1}^n [T_{sg}^j]^T [M_{ss}^j] [T_{sg}^j] (1 \pm \Delta u_{M,j}) \\ [K_{ss}^I] &= \sum_{j=1}^n [T_{sg}^j]^T [K_{ss}^j] [T_{sg}^j] (1 \pm \Delta u_{K,j}) \end{aligned}$$

Die Matrizen können jetzt in das Zentrum und den von den Intervallparametern abhängigen Radiusanteil zerlegt werden:

$$(8) \quad \begin{aligned} [M_{ss}^I] &= [M_{ss}^0] \pm \sum_{j=1}^n [M] \Delta u_{M,j} = [M_{ss}^C] \pm [\Delta M_{ss}^I] \\ [K_{ss}^I] &= [K_{ss}^0] \pm \sum_{j=1}^n [K_{ss}^j] \Delta u_{K,j} = [K_{ss}^C] \pm [\Delta K_{ss}^I] \end{aligned}$$

Die unscharfen Parameterbereiche bewirken über die parametrisch formulierten Massen- und Steifigkeitsmatrizen einen Variationsbereich der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen. Für die aeroelastische Analyse muss nun das Ziel lauten, die Grenzen der Eigenwerte und Eigenvektoren so zu bestimmen, dass der gesamte Variationsbereich der modalen Eigenschaften eingeschlossen wird. Die Einhüllende des Eigenwertproblems wird durch die folgende Gleichung angeben:

$$(9) \quad \left( \left( [K_{ss}^C] \pm [\Delta K_{ss}^I] \right) - (\omega^C \pm \Delta \omega)^2 \left( [M_{ss}^C] \pm [\Delta M_{ss}^I] \right) \right) \times \left( \{\phi_{\varepsilon}^C\} \pm \{\Delta \phi_{\varepsilon}^I\} \right)_r = \{0\}$$

#### 4.1. Das elastomechanische Intervalleigenwertproblem

Das nachfolgend vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der Intervallgrenzen der Eigenfrequenzen einer Flugzeugstruktur beruht auf den Untersuchungen zum Intervalleigenwertproblem von Deif [9]. Die rein mathematische Methode wurde für die Anwendung bei der strukturdynamischen Modalanalyse weiterentwickelt, wie z. B. in [5] und [8] nachzulesen ist. Die mit Intervallparametern formulierte Massen- und Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems nach Gl. (8) lässt sich an den vorgegebenen unteren und oberen Grenzen für alle möglichen Parameterkombinationen auswerten, so dass jeweils eine Einhüllende beider Matrizen im Parameterraum gefunden wird. Die parameterabhängigen Matrizen werden auf diese Weise in Intervallmatrizen überführt. Zugunsten der Übersichtlichkeit wird nachfolgend der Index für die physikalischen Freiheitsgrade  $g$  vernachlässigt. Zuerst wird das Eigenwertproblem für die Zentrumsmatrizen gelöst:

$$(10) \quad [K^C] \{\phi^C\}_r = \lambda_r^C [M^C] \{\phi^C\}_r$$

Da beide Matrizen über Gl. (8) deterministisch festgelegt sind, kann die Lösung mit konventionellen Eigenwertlösern erfolgen. Der zentrale Eigenwert  $\lambda_r^C$  und der Eigenvektor  $\{\phi^C\}_r$  sind anschließend bekannt. Um die untere und obere Schranke eines bestimmten Eigenwerts zu berechnen, wird die in [9] begründete Annahme zugrunde gelegt, dass sich die Vorzeichen aller Elemente des zugehörigen Eigenvektors innerhalb der Intervallgrenzen der Systemmatrizen  $[K^I]$  und  $[M^I]$  nicht ändern. Diese Bedingung lässt sich über eine Matrix einbringen, auf deren Diagonalen die Vorzeichen des Zentrumseigenvektors  $\{\phi^C\}_r$  angeordnet sind:

$$(11) \quad [S]_r = \text{diag}(\text{sgn}(\{\phi^C\}_r))$$

Mit dieser Vorzeichenmatrix kann jeweils eine Bedingung für die untere und obere Schranke des Eigenwerts aufgestellt werden, wobei für die Steifigkeits- und Massenmatrixänderung umgekehrte Vorzeichen anzusetzen sind:

$$(12) \quad \begin{aligned} ([K^C] + [S]_r^T [\Delta K] [S]_r) \{\bar{\phi}\}_r &= \bar{\lambda}_r ([M^C] - [S]_r^T [\Delta M] [S]_r) \{\bar{\phi}\}_r \\ ([K^C] - [S]_r^T [\Delta K] [S]_r) \{\underline{\phi}\}_r &= \underline{\lambda}_r ([M^C] + [S]_r^T [\Delta M] [S]_r) \{\underline{\phi}\}_r \end{aligned}$$

Dabei sind  $\{\bar{\phi}\}_r$  und  $\{\underline{\phi}\}_r$  die zu den eingrenzenden Eigenwerten zugehörigen Eigenvektoren. Nachdem die beiden Eigenwertprobleme aus Gl. (12) mit der Diagonalmatrix  $[S]_r$  gelöst worden sind, kann das Intervall der Eigenkreisfrequenz nun ausgewertet werden:

$$(13) \quad \omega_r^I = \omega_r^C \pm \Delta \omega_r = \frac{1}{2} (\sqrt{\bar{\lambda}_r} + \sqrt{\underline{\lambda}_r}) \pm \frac{1}{2} (\sqrt{\bar{\lambda}_r} - \sqrt{\underline{\lambda}_r})$$

Der Zentrumsvektor  $\{\phi^c\}_r$  einer Eigenschwingungsform ist das Ergebnis der Auswertung des Eigenwertproblems mit Zentrumsmatrizen aus Gl. (10). Den Radius des Eigenvektors kann man über eine Störungsrechnung durch Superposition aller Zentrumsvektoren approximieren [10]. Das Intervall für den Eigenvektor lautet dann:

$$(14) \quad \{\phi^r\}_r = \{\phi^c\}_r \pm \{\Delta\phi\}_r = \{\phi^c\}_r \pm \sum_{s=1}^h \psi_{rs} \{\phi^c\}_s$$

$$\psi_{rs} = \begin{cases} \frac{\{\phi^c\}_s^T (([S]_r [\Delta K] [S]_r) - \lambda_r^c ([S]_r [\Delta M] [S]_r)) \{\phi^c\}_r}{\lambda_s^c - \lambda_r^c}, & r \neq s \\ -\frac{1}{2} \{\phi^c\}_r^T ([S]_r [\Delta M] [S]_r) \{\phi^c\}_r, & r = s \end{cases}$$

Für die Bestimmung der Intervallgrenzen müssen die beiden Gleichungen nach Gl. (12) für jeden Eigenvektor ausgewertet und jeweils dem Zentrumsvektor bzw. dem Zentrumseigenwert zugeordnet werden. Verfügbare Eigenwertlöser ordnen im Allgemeinen die gefundenen Lösungen mit dem Betrag des Eigenwerts aufsteigend an. Da sich aber die Intervalle mehrerer dicht beieinanderliegender Eigenfrequenzen überschneiden können, treten Vertauschungen in der Ausgabereihenfolge auf. Für die Paarung von Eigenlösungen wird das MAC-Kriterium (engl. Modal Assurance Criteria) herangezogen. Die bereitgestellten Intervalle der Eigenfrequenzen finden über die generalisierte Steifigkeitsmatrix Eingang in die Flattergleichungen. Die Intervalle der Eigenschwingungsformen werden zur Berechnung der generalisierten Luftkraftmatrix benötigt, welche auf diese Weise ebenfalls Intervalleigenschaften erhält.

## 5. MODELLIERUNG VON UNSCHÄRFEN DER INSTATIONÄREN AERODYNAMIK

Ein praktisches numerisches Verfahren zur Lösung der instationären subsonischen Tragflächentheorie ist die Doublet Lattice Methode DLM, welche in [11] erstmals veröffentlicht wurde. Dabei wird das kontinuierliche Auftriebssystem aerodynamisch diskretisiert, indem die Fläche streifenweise parallel zur freien Anströmung jeweils in eine Anzahl von diskreten trapezförmigen aerodynamischen Elementen derart zerlegt wird, dass die Ränder des Auftriebssystems bzw. die Ruderdrehsachsen mit den Begrenzungslinien der elementaren Auftriebsflächen zusammenfallen. Die Aufteilung eines Auftriebssystems in einzelne Elementarflächen ist in BILD 6 dargestellt. Hier wird jede Auftriebsfläche in kleine trapezförmige Auftriebselemente unterteilt, deren Seitenkanten parallel zur freien Anströmung verlaufen. Um die Druckdifferenz zu modellieren, wird auf der  $1/4$ -Linie jedes Auftriebselements ein Dipolliniensegment angenommen. Diese Modellierung entspricht im stationären Zustand einem Hufeisenwirbel, dessen gebundener Teil mit der Dipolstrecke auf der  $1/4$ -Linie zusammenfällt. In der spannungswichtigen Mitte des gebundenen Dipols liegt der Sendepunkt, von dem ausgehend der Abwind einfluss auf die umgebenden Auftriebselemente ausgesendet wird. Die Auswertung des Abwinds erfolgt am jeweiligen Abwindkollokationspunkt, der sich bei  $3/4$  der jeweiligen Elementtiefe auf der Halbspannweite befindet. Durch die Diskretisierung und die Verwendung des Beschleunigungspotenzials kann ein algebraischer Zusammenhang zwischen dem instationären Abwind

$$(15) \quad \{w\} = \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_a} + i \frac{k}{l_{ref}} h_{3/4} \right\},$$

der sich aus dem dynamischen Anstellwinkel infolge der Rotation und der Hubgeschwindigkeit an jedem Element zusammensetzt, und dem dadurch induzierten Drucksprung  $\{\Delta c_p\}$  hergestellt werden:

$$(16) \quad \{\Delta c_p\} = [AIC(k, M_\infty)]^{-1} \{w\}.$$

Die Flattergleichungen sind als Energiegleichgewicht in modalen Freiheitsgraden formuliert. Die instationären Luftkräfte werden dazu nicht als Druckverteilungen berücksichtigt sondern als generalisierte Kräfte, d. h. als Integral des Drucks über alle Auftriebsflächen in Abhängigkeit der aufgeprägten harmonisch schwingenden Bewegungen. Der Differenzdruck innerhalb jedes aerodynamischen Elements wird zu einer Einzelkraft integriert, die mit der Hubauslenkung am  $1/4$ -Punkt multipliziert wird:

$$(17) \quad Q_{rs} = \int_A h_{1/4,r} \Delta c_{p,s} dA.$$

Dabei ist  $h_{1/4,r}$  die Auslenkungsverteilung der r-ten Eigenschwingungsform senkrecht zur Auftriebsfläche und  $\Delta c_{p,s}$  die Differenzdruckverteilung der s-ten Eigenschwingungsform. Für die Darstellung von gedämpften Schwingungen bietet es sich an, die Luftkräfte infolge der Anstellwinkeländerung sowie der Hubauslenkung getrennt voneinander zu behandeln. Über den Phasenversatz von  $\pi/2$  nach Gl. (15) kann die generalisierte Luftkraftmatrix in einen auslenkungs- und einen geschwindigkeitsabhängigen Anteil aufgespalten werden, was zu einer aerodynamischen Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix führt:

$$(18) \quad \begin{aligned} [Q_D(M_\infty, k)] &= [\Phi]^T [T_{1/4}]^T [A] [AIC(M_\infty, k)]^{-1} [T_{3/4}] [\Phi] \\ [Q_X(M_\infty, k)] &= [\Phi]^T [T_{1/4}]^T [A] [AIC(M_\infty, k)]^{-1} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] [\Phi] \end{aligned}$$

Für die Berechnung müssen die Hub- und Anstellwinkelamplituden am  $3/4$ -Kontrollpunkt und die Schlagamplitude am  $1/4$ -Punkt jedes Elementarflügels für jede Schwingungsform bereitgestellt werden. Sie können über die räumliche Interpolationsvorschrift aus der Amplitudenverteilung der Eigenschwingungsformen des elastomechanischen Teilproblems gewonnen werden.

Die lineare räumliche Transformation wird jeweils in einer Matrix zusammengestellt, welche die Stützstellen der Strukturmodellierung mit den Kontrollpunkten des aerodynamischen Modells über eine Flächen- oder Volumensplinefunktion verknüpft ([12] bzw. [13]). Durch die vorgeschlagene Aufspaltung können die durch die Bewegung induzierten Luftkräfte bei auf- und abklingenden Schwingungen besser approximiert werden, weil der Dämpfungsanteil in den Flattergleichungen statt mit der harmonischen reduzierten Frequenz  $k$  mit der komplexen reduzierten Laplacevariablen  $p$  multipliziert werden kann. Die Gültigkeit der generalisierten Luftkraftmatrix nach Gl. (18) kann auf diese Weise auf den gesamten Laplacebereich näherungsweise ausgedehnt werden:

$$(19) [Q(M_\infty, p)] \approx \frac{p}{l_{ref}} [Q_D(M_\infty, k)] + [Q_K(M_\infty, k)]$$

mit der dimensionslosen Laplacevariable

$$(20) p = g + ik = \frac{s l_{ref}}{V_\infty}$$

Die Einführung der transienten Luftkräfte in die im Laplacebereich formulierten Flattergleichungen nach Gl. (2) lautet dann:

$$(21) \left( [M_{hh}]s^2 + [D_{hh}]s + [K_{hh}] - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 [Q_{hh}(M_\infty, p)] \right) \{q\} = \{0\}$$

Eine Lösung dieser Flattergleichungen kann, ausgehend von einer Startschätzung, nur iterativ erfolgen, weil beide generalisierten Luftkraftmatrizen von der reduzierten Frequenz abhängen. Diese sind aber wiederum durch den komplexen Eigenwert bestimmt, der jedoch erst als Ergebnis der Eigenwertlösung vorliegt. Daher werden die beiden generalisierten Luftkraftmatrizen im Vorhinein für eine Auswahl von Stützpunkten der reduzierten Frequenzen und Machzahlen für die in der Flatteranalyse zu erwartenden Bereiche berechnet. Während der Lösung des nichtlinearen komplexen Eigenwertproblems werden die jeweils benötigten Luftkraftmatrizen zwischen diesen Stützstellen über Lagrangepolynome interpoliert.

### 5.1. Intervallluftkräfte infolge unscharfer Eigenschwingungsformen

Bei der Lösung des elastomechanischen Problems mit Unschärfen wurde mit Gl. (13) und Gl. (14) eine Intervallbeschreibung der Eigenschwingungsformen eingeführt. Durch Einsetzen des Zentrums und des Radius der in der Modalmatrix zusammengestellten Eigenschwingungsformen in die Bestimmungsgleichung der beiden generalisierten Luftkraftmatrizen nach Gl. (18) setzt sich die Unschärfe fort:

$$(22) \begin{aligned} [Q_D^c \pm \Delta Q_D] &= [\Phi^c \pm \Delta\Phi]^T [AIC^*] [T_{3/4}] [\Phi^c \pm \Delta\Phi] \\ [Q_K^c \pm \Delta Q_K] &= [\Phi^c \pm \Delta\Phi]^T [AIC^*] \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] [\Phi^c \pm \Delta\Phi] \end{aligned}$$

$$\text{mit } [AIC^*] = [T_{1/4}]^T [A] [AIC(M_\infty, k)]$$

Die Ausmultiplikation und Aufteilung von Gl. (22) führt auf das Zentrum der beiden aerodynamischen Matrizen für Dämpfung und Steifigkeit

$$(23) \begin{aligned} [Q_D^c] &= [\Phi^c]^T [AIC^*] [T_{3/4}] [\Phi^c] + [\Delta\Phi]^T [AIC^*] [T_{3/4}] [\Delta\Phi] \\ [Q_K^c] &= [\Phi^c]^T [AIC^*] \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] [\Phi^c] + [\Delta\Phi]^T [AIC^*] \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] [\Delta\Phi] \end{aligned}$$

und auf den Radiusanteil

$$(24) \begin{aligned} [\Delta Q_D] &= [\Phi^c]^T [AIC^*] [T_{3/4}] [\Delta\Phi] + [\Delta\Phi]^T [AIC^*] [T_{3/4}] [\Phi^c] \\ [\Delta Q_K] &= [\Phi^c]^T [AIC^*] \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] [\Delta\Phi] + [\Delta\Phi]^T [AIC^*] \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] [\Phi^c] \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gl. (21) werden die Flattergleichungen in eine Intervallformulierung überführt. Das Zentrum der Eigenschwingungsformen soll dabei massennormiert vorliegen:

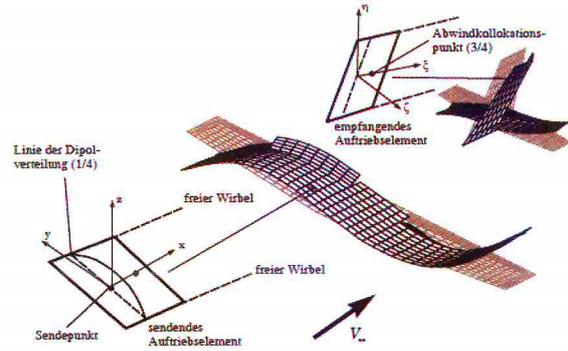


BILD 6. Aufteilung des Auftriebssystems in sendende und empfangende aerodynamische DLM Elemente

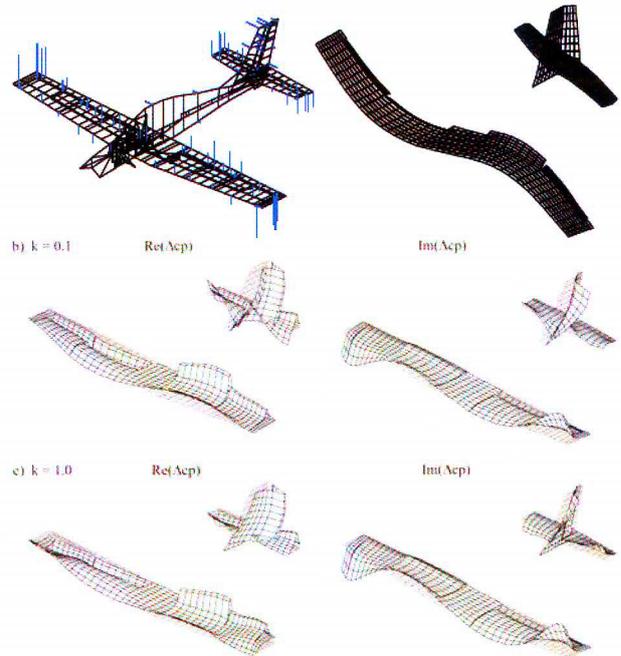


BILD 1. Interpolation der FE-Auslenkungen auf das aerodynamische Gitter (a) und die resultierenden komplexen Differenzdruckverteilungen für die reduzierten Frequenzen (b) k=0.1 und (c) k=1.0

$$(25) [I] = [\Phi^c]^T [M] [\Phi^c]$$

Mit dieser Formulierung wird erreicht, dass die Unschärfe nur bei den Luftkräften und nicht zusätzlich in der generalisierten Massenmatrix bzw. Steifigkeitsmatrix berücksichtigt werden muss. Wenn die strukturelle Dämpfung vernachlässigt wird, lassen sich nun die Flattergleichungen unter Ausnutzung von Gl. (23) und Gl. (24) mit Unschärfeintervallen formulieren:

$$(26) \left( [I](s^t)^2 - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 [Q_D^c \pm \Delta Q_D](s^t) + \text{diag} \left( \left\{ (\omega^c \pm \Delta\omega)^2 \right\} \right) - \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 [Q_K^c \pm \Delta Q_K] \right) \{q^t\} = \{0\}$$

Nachfolgend wird die Lösung der so aufgestellten parameterabhängigen nichtlinearen Intervallflattergleichungen durch Anwendung der Methode der numerischen Fortsetzung beschrieben.

## 5.2. Lösung der unscharfen Flattergleichungen – die *c-int*-Methode

Die allgemein verwendeten und bewährten Verfahren zur Lösung der Flattergleichungen, wie die *k*-Methode [14], die *pk*-Methode [15] oder *g*-Methode [16] besitzen den Nachteil, dass für die jeweilige Iteration nur der Eigenwert verwendet wird. Darum wird dieses Vorgehen auch als *Determinanteniteration* bezeichnet. Wenn die Geschwindigkeitsschrittweite zwischen zwei Lösungsstützstellen zu groß gewählt wird und Lösungswurzeln einzelner Freiheitsgrade dicht beieinanderliegen, kann es vorkommen, dass sich Lösungsäste zwischen einzelnen Geschwindigkeitsschritten vertauschen. Beim Einführen von Intervallmatrizen zur Beschreibung der Unschärfe entsteht ein noch viel größeres Vertauschungsrisiko, weil hier nicht nur diskrete Lösungen, sondern ganze Lösungsintervalle mit möglichen Überschneidungen der Lösungsbereiche berechnet und zugeordnet werden müssen. Zusätzliche Informationen für eine Zuordnung erhält man durch die gleichzeitige Auswertung des beteiligten Eigenvektors.

Zur Lösung eines parameterabhängigen nichtlinearen Gleichungssystems, wie es mit den Flattergleichungen nach Gl. (26) vorliegt, wurden in der Vergangenheit sogenannte inkrementelle Fortsetzungsmethoden, Einbettungs- oder Homotopieverfahren entwickelt, die ausgehend von einer Startlösung Lösungsäste durch Auswertung ihrer Ableitungen in Richtung des veränderlichen Parameters verfolgen können. In [17], [18] und [19] sind diese Fortsetzungsverfahren zur Lösung der Flattergleichungen bereits erfolgreich zum Einsatz gekommen. Allerdings entsteht im Vergleich zu den vorgestellten Methoden der Determinanteniteration ein deutlich erhöhter Rechenaufwand. Die hier vorgestellte *c-int*-Methode (engl. Continuation Interval Method) nutzt die verfügbaren Verfahren zur numerischen Fortsetzung der MATCONT-Toolbox [20] für das Programmsystem MATLAB, wobei in einem ein Prädiktorschritt eine neue Lösung der Gleichungen extrapoliert wird. Im nachfolgenden Korrektorschritt wird durch Anwendung eines modifizierten Newtonverfahren die tatsächliche neue Lösung berechnet.

Wenn zunächst die Flattergleichungen aus Gl. (26) im Zentrum betrachtet werden, kann der Ausdruck in der Klammer als parameterabhängige Koeffizientenmatrix  $[F^C]$  für den Lösungsvektor  $\{q^C\}$  aufgefasst werden:

$$(27) \quad [F^C(s, V_\infty, M_\infty, \rho_\infty)] \{q^C\} = \{0\} .$$

Ausgehend von der bekannten Startlösung des rein elastomechanischen Systems soll die Fortsetzung nun in konstanter Flughöhe mit ansteigender Fluggeschwindigkeit erfolgen. Die Luftdichte ist somit über die Definition der Standardatmosphäre als konstant vorgegeben. Die Machzahl wird über die vorherrschende Schallgeschwindigkeit und die Fluggeschwindigkeit konsistent festgelegt. Die reduzierte Frequenz ist mit dem Imaginärteil des Eigenwerts  $s$  verknüpft:

$$(28) \quad s^{\text{Im}} - \frac{V_\infty}{l_{\text{ref}}} k = 0 .$$

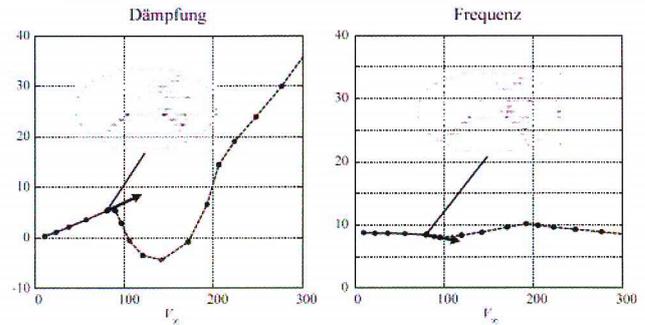


BILD 7. Fortsetzungsschritt in Richtung der Fluggeschwindigkeit, dargestellt im Dämpfungs- und Frequenzdiagramm

Der komplexe Eigenvektor ist in seiner absoluten Amplitude und seiner Ausrichtung in der komplexen Zahlenebene nicht festgelegt, was zu einer unendlichen Anzahl an Lösungen führt. Lediglich die Verhältnisse der einzelnen Elemente untereinander sind eindeutig. Sein Betrag und seine Phasenlage können jedoch durch Einführung von Zusatzbedingungen festgelegt und somit eine eindeutige Lösung der Gl. (27) angegeben werden. Dazu soll der komplexe Eigenvektor immer einheitsnormiert werden:

$$(29) \quad \{q^C\}^T \{q^C\} - 1 = 0 .$$

Alle drei Bedingungen werden zu einem Gleichungssystem zusammengefasst:

$$(30) \quad \{y\} = \begin{cases} \{r\} = [F(s, V_\infty, M_\infty, \rho_\infty)] \{q\} = \{0\} \\ N_q = \{q\}^T \{q\} - 1 = 0 \\ N_k = s^{\text{Im}} - \frac{V_\infty}{l_{\text{ref}}} k = 0 \end{cases} .$$

Damit besitzt das Gleichungssystem  $2n+4$  noch unbekannte Parameter

$$(31) \quad \{x\}^T = \{q_1^{\text{Re}}, \dots, q_m^{\text{Re}}, q_1^{\text{Im}}, \dots, q_m^{\text{Im}}, \sigma, \omega, k, V_\infty\}$$

aber nur  $2n+3$  Gleichungen. Als freier Parameter wird nun die Fluggeschwindigkeit  $V_\infty$  gewählt. Das Gleichungssystem wird bezüglich dieses freien Parameters differenziert und als eine Matrixgleichung aufgestellt:

$$(32) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \{y\}}{\partial \{x\}} \\ \frac{\partial \{y\}}{\partial V_\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d \{x\}}{d V_\infty} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \{y\}}{\partial V_\infty} \\ \frac{\partial \{y\}}{\partial V_\infty} \end{bmatrix} = \{0\} ,$$

so dass eine Beschreibung mit Jacobimatrix  $\begin{bmatrix} \frac{\partial \{y\}}{\partial \{x\}} \\ \frac{\partial \{y\}}{\partial V_\infty} \end{bmatrix}$ ,

Tangentenvektor  $\begin{bmatrix} \frac{d \{x\}}{d V_\infty} \\ 1 \end{bmatrix}$  und partieller Ableitung in

Richtung des freien Parameters  $\begin{bmatrix} \frac{\partial \{y\}}{\partial V_\infty} \\ \frac{\partial \{y\}}{\partial V_\infty} \end{bmatrix}$  vorliegt. Die Inhalte

dieser Terme ergeben sich aus den Flattergleichungen und sind in [20] zusammengestellt. Wenn die Jacobimatrix nicht singulär auftritt, kann sie invertiert werden, so dass der Tangentenvektor der Gesamtlösung berechnet werden kann:

$$(33) \quad \left\{ \frac{d\{x\}}{dV_\infty} \right\} = \left[ \frac{\partial\{y\}}{\partial\{x\}} \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial\{y\}}{\partial V_\infty} \right\}.$$

Im Prädiktorschritt der numerischen Fortsetzung wird mit dem Tangentenvektor aus Gl. (33) eine neue Lösung mit einer automatisch gewählten Geschwindigkeitsschrittweite  $\Delta V_\infty$  vorhergesagt. Anschließend wird im Korrektorschritt durch Anwendung des Newtonverfahrens auf Gl. (32) ein neuer Punkt entlang des Lösungsasts gefunden, welcher wiederum als Startlösung im nächsten Schritt benutzt wird. In BILD 7 ist der Tangentenvektor beispielhaft im Dämpfungs- und Frequenzdiagramm dargestellt.

Zur Lösung der Flattergleichungen mit Unschärfeintervallen soll jetzt die Transformationsmethode von Hanss [4] zum Einsatz kommen (vgl. Abschnitt 3.2). Um das Minimum und Maximum des komplexen Eigenwerts, also der sich einstellenden aeroelastischen Dämpfung und Frequenz, zu finden, müssen die Flattergleichungen nach Gl. (26) für alle Kombinationen an der unteren und oberen Schranke der einzelnen modalen Freiheitsgrade gelöst werden. Zunächst wird die in der Fuzzy-Arithmetik vorherrschende Annahme getroffen, dass alle eingeführten Intervalle als Fuzzy-Mengen unabhängig voneinander vorliegen und nicht miteinander korrelieren. Sie weisen eine rechteckige Zugehörigkeitsfunktion  $\mu$  auf, die über die Festlegung der unteren und oberen Grenze definiert ist (vgl. Abschnitt 3.1). Während die Radiusmatrix der generalisierten Steifigkeit nur auf der Hauptdiagonalen besetzt ist, sind die beiden aerodynamischen Luftkraftmatrizen immer voll besetzt. Dabei findet sich die Perturbation infolge der r-ten Eigenschwingungsform in der r-ten Zeile und Spalte. Es ist also erforderlich, dass jede Zeile und Spalte einer Radiusmatrix unabhängig voneinander mit einem Fuzzy-Parameter  $\tilde{p}_{K,i}$  für das Steifigkeitsintervall bzw.  $\tilde{p}_{Q,i}$  für das Luftkraftintervall multipliziert wird. Der gesamte unscharfe Radius der Flatterkoeffizientenmatrix setzt sich dann aus der Summe aller unscharfen Teilmatrizen über alle  $h$  modalen Freiheitsgrade zusammen:

$$(34) \quad \begin{aligned} [\Delta \tilde{F}] &= \sum_{i=1}^h \tilde{p}_{K,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta k_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \\ &- \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{i=1}^h \tilde{p}_{Q,i} \left( \frac{1}{2V_\infty} \begin{bmatrix} 0 & \Delta q_{D,li} & 0 \\ \Delta q_{D,i1} & 2\Delta q_{D,ii} & \Delta q_{D,ih} \\ 0 & \Delta q_{D,hi} & 0 \end{bmatrix} s \right) \\ &- \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{i=1}^h \tilde{p}_{Q,i} \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Delta q_{K,li} & 0 \\ \Delta q_{K,i1} & 2\Delta q_{K,ii} & \Delta q_{K,ih} \\ 0 & \Delta q_{K,hi} & 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Diese Fuzzy-Matrix soll nun über Anwendung der Transformationsmethode durch eine Anzahl von deterministischen Kombinationen ausgedrückt werden.

Im ersten Schritt werden die bereits normiert vorliegenden unscharfen Eingabeparameter  $\tilde{p}_{K,i}$  und  $\tilde{p}_{Q,i}$  in Fuzzy-Mengen zerlegt, wobei nur der Schnitt  $[-1,1]$  betrachtet werden soll. Im nächsten Schritt erfolgt die Transformation der Eingabeintervalle in Datenfelder. Gemäß den Definitionen aus Abschnitt 3.2 werden alle Faktoren einer

Kombination  $k$  des Hyperkubus in den normierten Datenfeldern  $(\hat{U}_K)_k$  und  $(\hat{U}_Q)_k$  zusammengestellt. Beide Felder enthalten eine Abfolge von  $-1$  und  $+1$  als eine der  $k$  möglichen Kombinationen aller Eckpunkte des Hyperkubus, der in BILD 5 für eine dreidimensionale Problemstellung dargestellt ist. Wenn die Flattergleichungen  $h$  modale Freiheitsgrade umfassen, dann hat jedes Kombinationsfeld  $2^h$  Permutationen. Für das gesamte System ergeben sich mit  $\tilde{p}_{K,i}$  und  $\tilde{p}_{Q,i}$  dann  $2 \cdot h$  unscharfe Intervallparameter, so dass insgesamt  $2^{2h}$  Kombinationen vorliegen, die alle im Schritt 3 im Ablauf der Transformationsmethode auszuwerten sind. Je nach Anzahl der Freiheitsgrade  $h$  ist es daher wegen des hohen Rechenaufwands zu empfehlen, die möglichen Kombinationen einzuschränken.

Wenn die Intervalle für Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des strukturdynamischen Systems über die Lösung des Intervalleigenwertproblems nach Abschnitt 5 bereitgestellt worden sind, liegen die unscharfen strukturdynamischen Kenngrößen  $\{\omega^f\}$  und  $[\Phi_{gh}^f]$  korreliert vor.

Die Verknüpfung erfolgt über die physikalischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen. Alle Eigenfrequenzen und Eigenvektoren befinden sich entweder an der unteren oder an der oberen Intervallgrenze. Zur Berücksichtigung in den Flattergleichungen wird jeder Kombinationsvektor auf der Hauptdiagonalen einer Unschärfematrix einsortiert, die wiederum vor die jeweiligen Radiusmatrizen multipliziert wird. Der Radius der Flatterkoeffizientenmatrix für die  $k$ -te Kombination lautet dann:

$$(35) \quad \begin{aligned} [\Delta F]_k &= \sum_{i=1}^h (\hat{U}_K)_{k,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta k_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \\ &- \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{i=1}^h (\hat{U}_Q)_{k,i} \left( \frac{1}{2V_\infty} \begin{bmatrix} 0 & \Delta q_{D,li} & 0 \\ \Delta q_{D,i1} & 2\Delta q_{D,ii} & \Delta q_{D,ih} \\ 0 & \Delta q_{D,hi} & 0 \end{bmatrix} s \right) \\ &- \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{i=1}^h (\hat{U}_Q)_{k,i} \left( \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Delta q_{K,li} & 0 \\ \Delta q_{K,i1} & 2\Delta q_{K,ii} & \Delta q_{K,ih} \\ 0 & \Delta q_{K,hi} & 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Die Flattergleichungen werden jetzt ausgehend von der bereits bekannten Zentrumslösung in Richtung einer der durch Gl. (35) definierten Permutationen fortgesetzt. Dazu wird der Korrektorschritt der c-Methode wiederholt für jede Permutation  $[\Delta F]_k$  des modifizierten Gleichungssystems angewendet. Die Änderung der Gesamtlösung wird in Abhängigkeit des normierten Intervallparameters  $u$  bis an die Intervallgrenze  $u=1$  verfolgt. Der vorher freie

Parameter Fluggeschwindigkeit wird dabei konstant gehalten. Die Intervallflattergleichungen lauten somit:

$$(36) \quad \left( [F^C(s)] + u[\Delta F(s)]_k \right) \{q\} = \{0\}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Die Formulierung als Matrixgleichung ergibt sich dann analog zu Gl. (32):

$$(37) \begin{bmatrix} \frac{\partial \{y\}}{\partial \{x\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\{x\} \\ du \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \{y\}}{\partial u} \end{bmatrix} = \{0\} .$$

Dabei ist die numerische Ableitung der Flattergleichungen in Richtung des normierten Parameters  $u$  bereits als Radiusmatrix  $[\Delta F]$  aus Gl. (35) bekannt:

$$(38) \frac{\partial [F]}{\partial u} \approx \frac{[\Delta F]}{\Delta u} .$$

Alle Terme für die Anwendung des Newtonverfahrens sind damit verfügbar, so dass die Lösungen  $\{x\}_k$  für alle Eckpunkte des Hyperkubus erzeugt werden können. Danach ist der dritte Schritt der Transformationsmethode in der reduzierten Form abgeschlossen.

Nun folgt im vierten Schritt die Rücktransformation der Ergebnisdatenfelder  $(\hat{X})_k^j$  des  $j$ -ten Geschwindigkeits-schritts in die zwei Intervalle, welche den Lösungsbereich für Dämpfung und Frequenz einschließen. In BILD 8 ist die Suche nach den Intervallgrenzen im Flatterdiagramm dargestellt. Beide stehen im Lösungsvektor an der Position  $2h+1$  bzw.  $2h+2$ . Die Minima und Maxima werden herausgesucht und als Lösungsintervall für Dämpfung und Frequenz des komplexen Eigenwertproblems der Flattergleichungen angegeben:

$$(39) \begin{aligned} \min(\sigma^j) &\leq x_{2h+1,k}^j \leq \max(\sigma^j) \\ \min(\omega^j) &\leq x_{2h+2,k}^j \leq \max(\omega^j) \end{aligned} .$$

Der fünfte Schritt der Transformationsmethode, in dem man die Intervallergebnisse zu einer Zugehörigkeitsfunktion zusammenfügt, vereinfacht sich, weil im Sinne einer robusten Stabilitätsaussage nur das jeweils gesamte einhüllende Minimum und Maximum von Interesse ist.

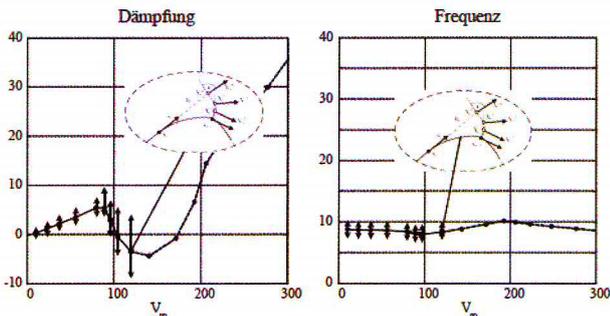


BILD 8. Fortsetzungsschritt in Richtung der unscharfen Systemparameter zur Eingrenzung der Intervalle von Dämpfung und Frequenz mit der *c-int*-Methode

## 6. BEISPIELRECHNUNGEN

### 6.1. Flügel-Ruder-System

Die Lösung der Flattergleichungen mit Unschärfeintervallen soll am Beispiel eines einzelnen ebenen Flügel-segments, an das ein Ruder angeschlossen ist, mit der *c-int*-Methode erfolgen. Das in BILD 9 dargestellte aeroelastische System nach [23] beinhaltet einen Schlagfreiheitsgrad  $h$  und einen Drehfreiheitsgrad  $\alpha$ , die beide

über eine Federsteifigkeit mit der Umgebung verbunden sind, sowie einen Ruderfreiheitsgrad  $\beta$ , der mit einer Drehfeder an die Flosse angeschlossen ist. Das Flügel-Ruder-System besitzt eine voll besetzte Massenmatrix, weil die Schwerpunkte von Flügel und Ruder jeweils nicht im Drehpunkt der Drehfedern liegen, so dass Massenkopplungen über die jeweiligen Abstände entstehen. Die strukturmechanische Steifigkeits- und Massenmatrix lauten:

$$(40) \quad [K] = \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & I_\alpha & (b(c_\beta - e)S_\beta + I_\beta) \\ S_\beta & (b(c_\beta - e)S_\beta + I_\beta) & I_\beta \end{bmatrix} .$$

Die Zahlenwerte für Federsteifigkeiten, Massen und Abstände sind in BILD 9 zusammengestellt. Die strukturelle Dämpfung soll im Weiteren vernachlässigt werden, weil sie für die Darstellung der hier interessierenden Zusammenhänge nicht maßgeblich ist. Infolge einer Nichtlinearität der mechanischen Steuerung oder durch Variation der Aktuatorsteifigkeit kann die Anschlusssteifigkeit des Ruderdrehfreiheitsgrads nicht genau festgelegt werden. Zur Modellierung wird als obere Grenze die doppelte Federsteifigkeit der nominalen Drehfeder angenommen, während als untere Grenze lediglich die Hälfte auftreten soll. Diese Rechteckverteilung führt auf eine Intervallbeschreibung der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit folgenden Einträgen:

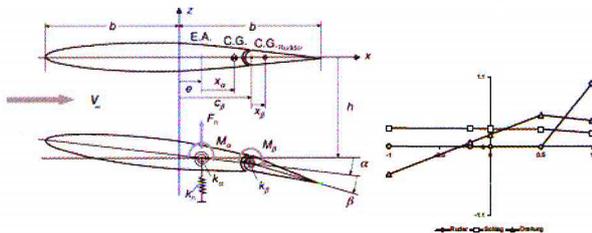
$$(41) \quad [K^C] \pm [\Delta K] = \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1.25k_\beta \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0.75k_\beta \end{bmatrix} .$$

Der Dämpfungs- und Frequenzverlauf der drei resultierenden Schwingungsformen ist in BILD 10 dargestellt, wobei die durchgezogenen Linien für das Flügel-Ruder-System im Zentrum gelten. Die Frequenz für den Flügelschlag  $h$  verläuft dabei nahezu konstant über der Geschwindigkeit, während die Dämpfungskurve einen deutlichen Knick mit anschließendem Bogen in den instabilen Bereich vollführt. Dabei tritt eine instabile Kopplung mit der Ruderrotation  $\beta$  auf, die eine mit dem Staudruck ansteigende Frequenz aufweist. Wenn sich beide Frequenzen annähern, kann das System zwischen 98 m/s und 175 m/s instabil werden. Bei einer höheren Geschwindigkeit ist der Frequenzabstand so groß, dass der Flügelschlag wieder in den stabilen Bereich zurückkehrt. Es handelt sich daher um sogenanntes *Hump-Mode Flattern*.

Bei Berücksichtigung des Intervalls der Ruderdrehfeder entstehen Lösungsgebiete für die einzelnen Freiheitsgrade, die mit unterschiedlichen Graustufen in BILD 10 schraffiert sind. Die einzelnen Punkte in den Bereichen stellen jeweils eine auskonvergierte Lösung der Flattergleichungen dar, die sich im Verlauf der Lösungsverfolgung mit der Fortsetzungsmethode ausgehend von der Zentrumslösung bis zum Rand des Intervalls ergeben. Während sich das Frequenzintervall des Ruderfreiheitsgrads hauptsächlich als breites ansteigendes Unschärfe-

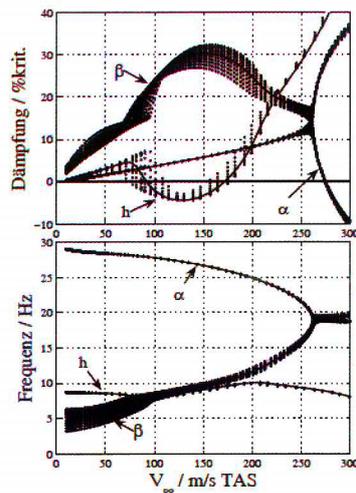
band im Frequenzdiagramm zeigt, werden bei den Dämpfungen die Verläufe aller drei Freiheitsgrade durch die Frequenzunschärfe beeinflusst. Für den Fall, dass sich die Ruderfrequenz am oberen Rand des Intervalls befindet, ist der Frequenzabstand zum Schlagfreiheitsgrad geringer, so dass die aeroelastische Kopplung zwischen Schlag- und Ruderfreiheitsgrad schon bei einer niedrigeren Geschwindigkeit eintritt. Für den entgegengesetzten Fall liegt der Dämpfungsnulldurchgang höher, so dass ein Intervall für die kritische Flattergeschwindigkeit zwischen 73 - 112 m/s entsteht. Die Instabilität zwischen Dreh- und Ruderfreiheitsgrad bleibt vom Drehfederintervall nahezu unbeeinflusst.

Am Intervalldämpfungsverlauf des Schlagfreiheitsgrads fällt auf, dass die Zentrumslösung in bestimmten Geschwindigkeitsbereichen auch das Lösungsgebiet begrenzen kann. Daran wird deutlich, dass wegen des nichtlinearen Antwortverhaltens der komplexen Eigenwertproblemstellung eine vereinfachte Betrachtung der Unschärfebänder über die Auswertung von Sensitivitäten und anschließende Extrapolation in Richtung der Intervallgrenzen nicht möglich ist. In diesem Fall würde die Zentrumslösung immer in der Mitte des Intervalls liegen. Für eine zuverlässige Aussage zur robusten Stabilität ist es erforderlich, die Flattergleichungen auch an ihren Intervallgrenzen zu lösen, um die korrekten Ränder des Lösungsgebiets aufzufinden.



halbe Flügeltiefe:	$b = 1.0 \text{ m}$
Rücklage der elastischen Achse:	$e = -0.2 \text{ m}$
Rücklage des Rudergelenks:	$c_\beta = 0.5 \text{ m}$
Rücklage Gesamtschwerpunkts:	$x_\alpha = 0.1 \text{ m}$
Rücklage Ruderschwerpunkts:	$x_\alpha = 0.005 \text{ m}$
Schlagfedersteifigkeit:	$k_h = 38373 \text{ N/m}$
Drehfedersteifigkeit:	$k_\alpha = 86339 \text{ Nm}$
Ruderdrehfedersteifigkeit:	$k_\beta = 195.7 \text{ Nm}$
Gesamtmasse:	$m = 12.0 \text{ kg}$
Drehträgheit:	$I_\alpha = 3.0 \text{ kgm}^2$
Ruderdrehträgheit:	$I_\beta = 0.2448 \text{ kgm}^2$

BILD 9. Flügel-Ruder-System nach [23] mit Schwingungsformen



h - Flügelschlag  
 $\alpha$  - Flügeldrehung  
 $\beta$  - Ruderdrehung

BILD 10. Flügel-Ruder-System mit Intervall der Ruderdrehfeder

## 6.2. Beispielflugzeug

Bei dem Beispielflugzeug handelt es sich um ein Hochleistungssegelflugzeug mit einer Flügelspannweite von 18 m und einem Leitwerk in T-Ausführung. Die Primärstruktur des Flugzeugs besteht vollständig aus Kohlefaserverbundwerkstoffen und weist zur aerodynamischen Leistungssteigerung einen sehr schlanken Leitwerksträger auf. Somit sind dessen Biege- und Torsionssteifigkeitseigenschaften gegenüber konventionellen Auslegungen von Segelflugzeugrümpfen deutlich reduziert. Dieser Umstand führte bei ersten Flatteruntersuchungen zu einer aeroelastischen Instabilität im nachzuweisenden Geschwindigkeitsbereich bis zum 1,2-fachen der Dimensionierungsgeschwindigkeit  $1,2V_D = 372 \text{ km/h EAS}$ . Dabei tritt eine instabile Kopplung zwischen der Flügelbiegeschwingung mit zwei Knoten pro Halbspannweite (Eigenschwingungsform S2) und der symmetrischen Rumpfbiegung (Eigenschwingungsform SR2) auf, deren Amplitudenverteilungen sich sehr ähneln und deren Eigenfrequenzen mit  $f_{S2} = 7.25 \text{ Hz}$  bzw.  $f_{SR2} = 9.14 \text{ Hz}$  benachbart sind (vgl. BILD 11).

Zur aeroelastischen Nachweisführung wurde ein FE-Modell aus den vorhandenen Konstruktionsdaten zusammengestellt. Das Flugzeug mit schlanken balkenartigen Strukturen von Tragflügel, Rumpf und Leitwerk kann mit hinreichender Genauigkeit durch ein FE-Modell unter weitgehender Verwendung von Balkenelementen idealisiert werden. Die Massenverteilung wird durch konzentrierte Punktmassen mit Drehträgheiten vorgesehen, welche an den jeweiligen Knotenpunkten entlang der Spannweite angebracht sind. Die Verbindungen zwischen den einzelnen Flugzeugkomponenten sind bei der Modellierung nicht als starr anzusehen.

Für die Verbindung zwischen Tragflügel und Rumpf bzw. zwischen Seitenleitwerk und Höhenleitwerk sind Feder-elemente vorzusehen. Dies gilt insbesondere für das zum Transport in seine Komponenten demontierbare Segelflugzeug. Die Balkenmodellierung des Beispielflugzeugs wurde für die OpenFEM-Toolbox [24] innerhalb MATLAB aufbereitet. Das IFEM-Verfahren nach Kapitel 4 inklusive der Intervallmodalanalyse wurde ebenfalls mit OpenFEM

programmtechnisch umgesetzt. Bei der Modellierung der Verstärkung soll für die Biegesteifigkeit der zugehörigen Balkenelemente das IFEM-Verfahren ein Unschärfeintervall von  $\bar{p} = 1.5 \pm 0.5$  angenommen werden. Die Zentrums- und Radiusmatrizen für die Gesamtsteifigkeitsmatrix können somit nach Gl. (8) zusammengestellt werden. Anschließend kommt die Intervallmodalanalyse zur Bestimmung der einschließenden Intervalle für Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen zur Anwendung (vgl. BILD 11).

a)  $f_{S2}^I = 7.469 \pm 0.128 \text{ Hz}$     b)  $f_{SR2}^I = 9.586 \pm 0.569 \text{ Hz}$

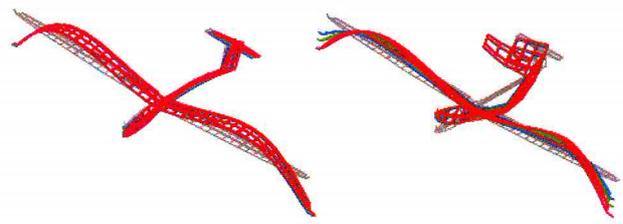


BILD 11. a) Intervalle der Schwingungsformen der symmetrischen Flügelbiegung S2 und b) der Rumpfbiegung SR2

Mit dieser modalen Intervallmodellierung des Beispielflugzeugs wird eine Flutteruntersuchung mit der *c-int*-Methode durchgeführt. Das Verfahren hat den Vorteil, dass nur die zwei an der instabilen Kopplung beteiligten modalen Freiheitsgrade S2 und SR2 als interessierende Lösungen verfolgt werden müssen. Interaktionen oder Kopplungen mit weiteren Schwingungsformen werden nicht vernachlässigt, weil das modale Modell nicht reduziert wird, sondern nur einzelne Lösungsäste verfolgt werden. Um die Notwendigkeit der Berücksichtigung der unscharfen Schwingungsform und der daraus resultierenden Unsicherheiten in den generalisierten Luftkräften zu verdeutlichen, sind in BILD 12 die aus der Unsicherheitsfortpflanzung resultierenden Dämpfungs- und Frequenzverläufe dargestellt. Auf der linken Seite sind in der Intervallflutterrechnung nur die Frequenzintervalle der beiden Schwingungsformen berücksichtigt worden. Zusätzlich sind zum Vergleich die diskreten Kurvenverläufe eingetragen, die sich für die deterministische Flugzeugmodellierung im ursprünglichen Zustand und mit der angesprochenen nachträglichen Versteifung des Leitwerksträgers ergeben. Während für den Verlauf beider Frequenzen über der Fluggeschwindigkeit der Unschärfbereich von der Lösung der *c-int*-Methode vollständig ausgefüllt wird, wird bei den Dämpfungen nur ein Teilbereich abgedeckt.

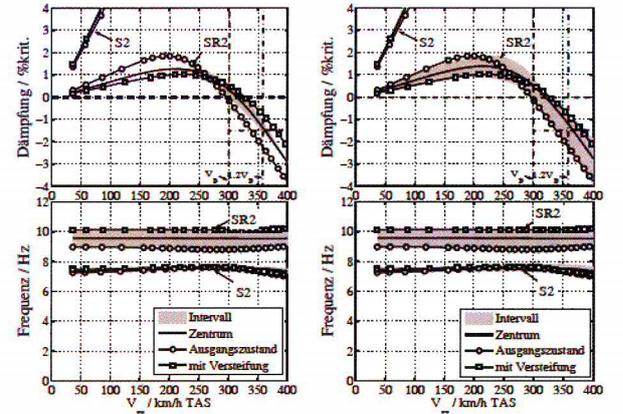


BILD 12. Intervallflutterrechnung a) bei alleiniger Berücksichtigung der Frequenzintervalle und b) bei Berücksichtigung der Frequenz- und Schwingungsformintervalle

Wenn neben der Intervallsteifigkeit zusätzlich die Intervallluftkräfte Berücksichtigung finden, erhält man mit der *c-int*-Methode ein Lösungsgebiet, das die Kurven an der oberen und unteren Grenze vollständig einschließt, wie aus BILD 12 b) ersichtlich wird. Es ergeben sich die folgenden kritischen Flattergeschwindigkeiten:

- Flugzeug ohne Versteifung:  $V_{\infty, krit} = 297 \text{ km/h}$ ,
- Flugzeug mit Versteifung:  $V_{\infty, krit} = 328 \text{ km/h}$ ,
- Intervalllösung mit Eigenfrequenzintervall:  $V_{\infty, krit} = 301\text{-}327 \text{ km/h}$ ,
- Intervalllösung mit Eigenfrequenz- und Eigenschwingungsformintervall:  $V_{\infty, krit} = 294\text{-}330 \text{ km/h}$ .

Anhand dieses Beispiels konnte gezeigt werden, wie sich der Einfluss der unscharfen Schwingungsformen in den instationären Luftkräften fortsetzt, die sich wiederum auf den aeroelastischen Kopplungsmechanismus auswirken und die kritische Flattergeschwindigkeit reduzieren können. Damit ist der in Kapitel 5 durchgeführte Aufwand für die Bereitstellung der Intervallluftkräfte gerechtfertigt, welche bei vielen anderen Betrachtungen zur Flutterstabilität in der verfügbaren Fachliteratur bisher vernachlässigt worden sind.

## 7. ZUSAMMENFASSUNG

In Ergänzung der herkömmlichen Verfahren zur aeroelastischen Stabilitätsuntersuchung von Flugzeugkonstruktionen untersucht die hier vorgestellte *c-int*-Methode den Einfluss von Ungenauigkeiten bei der strukturdynamischen Modellbildung. Das rechnerische Vorgehen formuliert die Flattergleichungen mit einer Intervallbeschreibung der generalisierten Steifigkeits-, Dämpfungs-, Massen- und Luftkraftmatrizen. Diese Intervalle identifizierter elastomechanischer und aerodynamischer Einflussparameter werden über eine Betrachtung der Fortpflanzung der Unsicherheit durch den gesamten Prozess der aeroelastischen Modellbildung automatisch verfolgt, wodurch dem Flatteringenieur die aufwendigen Vergleichsuntersuchungen und zahlreichen Sensitivitätsstudien erspart bleiben. Eine praktische Umsetzung der Einbeziehung von Unsicherheiten in die Simulation des aeroelastischen Systems auf Basis der Fuzzy-Arithmetik stellt die implementierte Transformationsmethode nach Hanss dar.

Abschließend kann festgestellt werden, dass mit der entwickelten Prozesskette für die Berechnung der aeroelastischen Stabilität ein Werkzeug vorliegt, mit dem das Flutterproblem unter Berücksichtigung von Intervallunsicherheiten bei der Modellierung in einem Rechendurchlauf untersucht werden kann.

## SCHRIFTTUM

- [1] Zadeh, L.A.: Fuzzy Sets. *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [2] Dubois D.; Prade H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Academic Press, NewYork, 1980.
- [3] Möller, B.; Beer, M.: *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil engineering and Computational Mechanics*. Springer, 2004.
- [4] Hanss, M.: *Applied Fuzzy Arithmetic – An Introduction with Engineering Applications*. Springer, 2005.
- [5] Moens, D.; Vandepitte, D.: Recent Advances in non-probabilistic Approaches for non-deterministic Dynamic Finite Element Analysis. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, Vol. 13, No. 3, pp. 389-464, 2006.
- [6] Oberkampf, W. L. et al: Error and Uncertainty in Modelling and Simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 75, No. 3, March 2002, pp. 333-357, 2002.
- [7] Gao, W.: Interval Finite Element Analysis using Interval Factor Method. *Comput. Mech.*, Vol. 39, pp. 709-717, 2007.
- [8] Sim, J.; Qiu, Z.; Wang, X.: Modal Analysis of Structures with uncertain-but-bounded Parameters via Interval Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 303, No. 1-2, 5 June 2007, pp. 29-45, 2007.
- [9] Deif, A.S.: The Interval Eigenvalue Problem. *ZAMM Zeitschrift angew. Math. Mech.* 71, pp. 61-64, 1991.
- [10] Fox, R.L.; Kapoor, M.P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 12, pp. 2426-2429, 1968.
- [11] Rodden, W.P.; Albano, E.: A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on oscillating Surfaces in subsonic Flows. *AIAA Journal*. Vol. 7, No. 2, pp. 279-285, 1969.
- [12] Harder, R.L.; Desmarais, R.N.: Interpolation using Surface Spline. *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 2, pp. 189-191, 1972.
- [13] Beckert, A.: Ein Beitrag zur Strömungs-Struktur-Kopplung für die Berechnung des aeroelastischen Gleichgewichts. *Forschungsbericht DLR-FB 97-42*, Köln, 1997.
- [14] Scanlan, R.H.; Rosenbaum, R.: *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*. The Macmillan Company, 1951.
- [15] Hassig, H.J.: An approximate true Damping Solution of the Flutter Equation by Determinant Iteration. *Journal of Aircraft*, Vol. 8, pp. 885-889, 1971.
- [16] Chen, P.C.: Damping Perturbation Method for Flutter Solution: The g-Method. *AIAA Journal*, Vol.38, No.9, September 2000, 2000.
- [17] Cardani, C.; Mantegazza, P.: Continuation and Direct Solution of the Flutter Equation. *Computers & Structures*, Vol. 8, No. 3, pp. 185-192, 1978.
- [18] Meyer, E.E.: Application of a New Continuation Method to Flutter Equations. 29th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 18-20, Williamsburg, VA, Part 3, pp. 1118-1123, 1988.
- [19] Kießling, F.; Potkanski W.: Nonlinear Flutter Analysis by a Continuation Method. *Proc. 2nd International Conference EAHE Engineering Aero-Hydroelasticity*, Pilsen, June 6.-10., pp. 221-226, 1994.
- [20] Schwochow, J.; Kießling, F.: Ein Verfahren zur robusten Bewertung der Flatterstabilität. *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*, September 2008, Darmstadt, 2008.
- [21] Schwochow, J.: Robust Flutter Analysis using Interval Modal Analysis and Continuation Method. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, June 21-25, Seattle, 2009.
- [22] Dhooge, A.; Govaerts, W.; Kuznetsov, Y.A.; Mestrom, W., Riet, A.M.; Sautois, B.: *MATCONT: A Continuation Toolbox in Matlab*. <http://www.matcont.ugent.be>, December 2006, 2006.
- [23] Schulze, S.: *Numerische Simulation des Flatterverhaltens eines nichtlinearen 2D-Flügel-Ruder-Systems in subsonischer Strömung*. DLR Forschungsbericht 1999-23, Köln: DLR, 1999.
- [24] N.N.: *OpenFEM - A Finite Element Toolbox for Matlab and Scilab*. Available on: <http://www-rocq.inria.fr/OpenFEM>, release 2006a, 2006.