

# OPTISCHE KORRELATIONSBASIERTE MESSTECHNIK MITTELS ZUFÄLLIGER PUNKTEMUSTER

F. Blumrich,  
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR),  
Linder Höhe, 51147 Köln, Deutschland  
[frederik.blumrich@dlr.de](mailto:frederik.blumrich@dlr.de)

## Zusammenfassung

Das Ziel dieses Beitrages ist die detaillierte Untersuchung des Fehlerverhaltens bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung in den verschiedenen Auswertetechniken der experimentellen Aerodynamik. Es wird gezeigt, dass ein systematischer Fehler auftritt, falls eindimensionale Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung von beliebig geformten Kreuzkorrelationsmaxima angewendet werden. Zunächst wird eine analytische Beschreibung des Fehlerverhaltens bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung hergeleitet. Diese Beschreibung erlaubt Parameterstudien, aus denen sich ergibt, dass der systematische Fehler teilweise Werte größer als einen Pixel annehmen kann. Zusätzlich wird eine zweidimensionale lineare Lösung für die Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung auf Basis der Methode der kleinsten Quadrate vorgestellt. Es kann gezeigt werden, dass mit dieser neuen Methode eine Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen von beliebig geformten Kreuzkorrelationsmaxima ohne einen signifikanten systematischen Fehler möglich ist. Mittels künstlich berechneter Bildpaare wird die Leistungsfähigkeit der hier vorgestellten Algorithmen getestet und auch mit den Ergebnissen aus kommerziellen Softwarepaketen zur Auswertung von Bilddaten der experimentellen Aerodynamik verglichen.

## 1. EINLEITUNG

Seit mehr als 25 Jahren wird die Methode der Particle Image Velocimetry (PIV) in Wissenschaft und Forschung angewendet. Die Bezeichnung *particle image velocimetry* wurde erstmals im Jahre 1984 von R. J. Adrian vorgeschlagen. Heutzutage ist die PIV-Methode ein Standardverfahren in der experimentellen Aerodynamik, das die berührungslose Bestimmung von Strömungen erlaubt. Dazu werden kleine Streupartikel in die Strömung eingebracht, die dieser schlupffrei folgen. Die Partikel werden mittels eines kurzen Laserpulses zweimal beleuchtet, wobei die durch den Laser beleuchtete Ebene der Messebene entspricht (siehe [1]). Das an den Partikeln gestreute Licht wird durch einen bildgebenden Sensor, typischerweise eine digitale Kamera, registriert. Unter Zuhilfenahme von Techniken der Bildanalyse können somit aus den beiden aufgenommenen Bildern instantane Vektorfelder der vorliegenden Strömung mit einer hohen räumlichen und zeitlichen Auflösung gewonnen werden. Das Messprinzip der PIV-Methode beruht dabei auf der physikalischen Definition der Geschwindigkeit als Differenzenquotient. Mittels CCD- oder CMOS-Kameras lassen sich die Trajektorien von vielen verschiedenen Streupartikeln, die der Strömung schlupffrei folgen, durch die Anwendung von zwei sehr kurzen Laserpulsen (typischerweise einige Nanosekunden, siehe [2]) innerhalb einer Zeitdifferenz von typischerweise einigen Mikrosekunden gleichzeitig messen. Die prinzipielle Messanordnung der PIV-Technik ist in BILD 1 grafisch dargestellt. Das aufgenommene Bildpaar wird durch die Anwendung von Kreuzkorrelationsalgorithmen jeweils innerhalb kleiner Auswertefenster zur Bestimmung der lokalen Verschiebung ausgewertet (siehe [3], [4]).

Verschiebung ausgewertet (siehe [3], [4]).

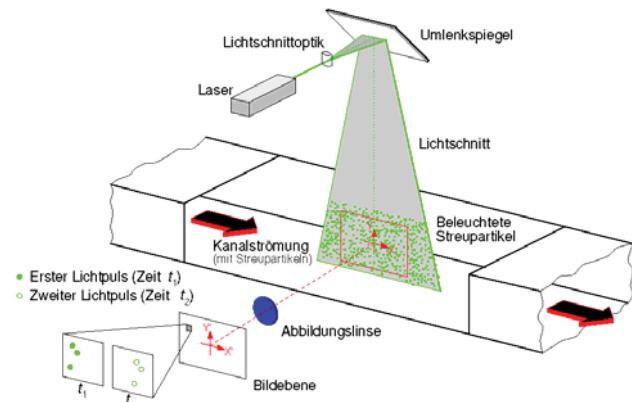


BILD 1. Prinzipielle Messanordnung für die PIV-Technik in einem Windkanal (nach [4]).

Typischerweise lassen sich mit dieser Methode mehr als 10.000 momentane Geschwindigkeitsvektoren des Strömungsfeldes innerhalb der Laserlichtschnittebene gleichzeitig aus einem Bildpaar bestimmen. Durch den Einsatz von herkömmlichen Verfahren zur Kamerakalibrierung und die Anwendung des Bildmaßstabes liegen quantitative Endergebnisse vor. Eine Erweiterung des bisher beschriebenen PIV-Messsystems um eine weitere Kamera, ein so genanntes Stereo PIV-System, ist problemlos möglich. Mit diesem Stereo-Ansatz kann die gleichzeitige Messung von dreidimensionalen Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Laserlichtschnittebene erzielt werden.

Der Übersichtsartikel *Twenty years of particle image velocimetry* [5] von R. J. Adrian fasst die fundamentalen Entwicklungen in der PIV-Technik während der letzten 20 Jahre zusammen. Das Buch *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide* [6] wurde erstmals im Jahre 1998 veröffentlicht und beschreibt die Grundlagen der PIV-Methode sowie einige Anwendungsbeispiele. Eine Übersicht über kürzlich erfolgte Entwicklungen und Anwendungen von PIV kann in [7] gefunden werden.

Neben PIV kommen auch andere optische Messverfahren, die auf Kreuzkorrelationsalgorithmen basieren, in der wissenschaftlichen Forschung zum Einsatz. Im Einzelnen sind das z.B. die digitale Bildkorrelation (digital image correlation, kurz DIC, siehe [8], [9], [10], [11], [12]), die Projected Pattern Correlation Methode (PROPAC, siehe [13], [14], [15]) und das Hintergrund-Schlieren-Verfahren (background oriented Schlieren, kurz BOS, siehe [16], [17]).

All diese Messtechniken haben eine Gemeinsamkeit: Ihre Genauigkeit wird durch die aufgrund der geometrischen Kalibrierung des Systems verursachten Rekonstruktionsfehler und durch Fehler, die während der Auswertung mittels Kreuzkorrelation auftreten limitiert (siehe [12]). Die hohe Sub-Pixel-Genauigkeit der Kreuzkorrelationsalgorithmen lässt sich durch den Einsatz von speziellen Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung erzielen (siehe [18]). Im Falle der Korrelation eines Auswertefensters von  $32 \times 32$  Pixel eines 8 bit Bildes kann nach [4] mit einer Sub-Pixel-Genauigkeit in der Größenordnung von 0,1 bis 0,05 Pixel gerechnet werden.

Zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung existieren verschiedene Ansätze. Meist kommen allerdings Algorithmen zum Einsatz, die aus zwei eindimensionalen Schätzungen durch den höchsten Wert der Kreuzkorrelationsfunktion und seine Nachbarn in horizontaler und vertikaler Richtung bestehen. Für den Fall, dass ausschließlich die direkten Nachbarwerte um das Maximum der Kreuzkorrelation in die Schätzung eingehen, spricht man von 3-Punkt Schätzern (three-point estimators, siehe [4]). Typischerweise wird durch die gemessenen Werte der Kreuzkorrelation eine Gaußfunktion (siehe [3], [19]) oder eine Parabel (siehe [20], [21]) geschätzt. Algorithmen auf Basis von Gradienteninformationen, wie sie von Blais und Rioux [22] vorgeschlagen wurden oder Algorithmen, die die sinc-Interpolation anwenden (siehe [23], [24], auch als Whittaker Rekonstruktion bezeichnet), sind allerdings deutlich allgemeiner vom Ansatz her, da sie keinerlei a priori Information bezüglich der Form des Kreuzkorrelationsmaximums voraussetzen. Die sinc-Interpolation stellt für ein ausreichend bandbegrenztes Signal den optimalen Interpolator dar. In experimentellen PIV-Anwendungen liegt allerdings leider eine Unterabtastung vor.

Die wohl einfachste Möglichkeit zur Sub-Pixel-genauen Berechnung der Position des Kreuzkorrelationsmaximums ist durch den Schwerpunktoperator gegeben. Er wurde von Alexander und Ng [25] eingesetzt, um die Position von projizierten Linien Sub-Pixel-genau zu bestimmen. Dieser Algorithmus lässt sich sowohl in einer eindimensionalen als auch in einer zweidimensionalen Version sehr einfach

implementieren.

Algorithmen zur Sub-Pixel-genauen Schätzung mittels einer zweidimensionalen Gaußfunktion wurden zum ersten Mal von Condon [26] für Anwendungen in der Astronomie und später von Nobach und Honkanen [27] für aerodynamische Anwendungen beschrieben. In [28] wird von Ronneberger ein zweidimensionaler nicht linearer iterativer Levenberg-Marquardt Ansatz vorgestellt, der die einzelnen Werte der Kreuzkorrelationsfunktion mittels der Fisher-Transformation gewichtet.

Es existieren verschiedene Arbeiten, die unterschiedliche Algorithmen zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen vergleichend untersuchen (siehe [18], [20], [21], [22], [29]) sowie Arbeiten, die sich mit systematischen Fehlern in der Kreuzkorrelation und bei der Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen beschäftigen (siehe [30]).

Aufgrund der perspektivischen Verzeichnung oder des Astigmatismus können runde Streupartikel auf dem Sensor als Ellipsen abgebildet werden und führen somit auch zu elliptischen Kreuzkorrelationsmaxima. Zusätzlich werden heutzutage bei der Auswertung von Messdaten in der experimentellen Aerodynamik meist Methoden der Bilddeformation [31] angewendet. Dadurch können sogar aus ursprünglich vor der Bilddeformation rund auf dem Sensor abgebildeten Streupartikeln elliptische Kreuzkorrelationsmaxima entstehen. In allen diesen Fällen wird durch die Anwendung eines eindimensionalen Algorithmus zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen ein systematischer Fehler eingeführt. Das Ziel der hier vorliegenden Arbeit soll es daher sein, das Fehlerverhalten bei der Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen und insbesondere mögliche systematische Fehler, die dabei entstehen können, zu untersuchen.

Das zu Grunde liegende Prinzip der verschiedenen Ansätze zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen wird in Abschnitt 2 vorgestellt. Zusätzlich zu den bisher bekannten Ansätzen wird auch ein allgemeiner linearer zweidimensionaler Algorithmus auf Basis der Gaußfunktion eingeführt. In Abschnitt 3 wird eine analytische Gleichung zur Beschreibung des systematischen Fehlers, der entsteht, wenn eindimensionale Algorithmen zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen auf Kreuzkorrelationsmaxima unbekannter Form angewandt werden, hergeleitet. Ein numerisches Experiment mit verschiedenen Ansätzen für die Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung wird in Abschnitt 4 auf künstliche Bilddaten angewendet und die dabei erzielten Ergebnisse werden sowohl mit der analytischen Lösung als auch mit den Ergebnissen aus kommerziellen Softwarepaketen, wie sie zur Auswertung von Bilddaten der experimentellen Aerodynamik verwendet werden, verglichen.

## 2. SCHÄTZUNG DER SUB-PIXEL-VERSCHIEBUNG

Mit Hilfe der beiden Intensitätsbilder  $I_A$  und  $I_B$  lässt sich die zweidimensionale diskrete Kreuzkorrelationsfunktion  $R_{r,c}$  wie folgt beschreiben

$$(1) \quad R_{r,c} = \frac{1}{N^2} \dots \\ \dots \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_A[i,j] - \bar{I}_A)(I_B[i+r, j+c] - \bar{I}_B),$$

wobei  $\bar{I}$  das gemittelte Intensitätsbild ist. Bereits in dieser diskreten Funktion lässt sich das Kreuzkorrelationsmaximum

$$(2) \quad R_{0,0} = \max(R_{r,c})$$

auf Integer-Level als das Maximum der Werte der Kreuzkorrelationsfunktion ablesen.

Ein entfernter Lichtpunkt, der von einer kreisförmigen Linse oder einer Öffnung (z.B. der Blende einer Kamera) endlicher Größe abgebildet wird, erscheint in der Bildebene aufgrund der Beugung als so genanntes Airy-Scheibchen, umgeben von konzentrischen Beugungsringen abnehmender Intensität. In der Praxis wird die Airy-Funktion aus Vereinfachungsgründen häufig durch eine geeignete skalierte Gaußfunktion approximiert. Da auch die Kreuzkorrelation zwischen zwei gaußförmigen kontinuierlichen Intensitätsverteilungen wieder eine Gaußfunktion ergibt, wird für die Bestimmung von Sub-Pixel-Verschiebungen häufig eine Gaußfunktion durch die gegebene Kreuzkorrelationsfunktion geschätzt.

## 2.1. Eindimensionale Algorithmen zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen

### 2.1.1. Eindimensionale Gaußsche Regression

Unter der Annahme, dass das Kreuzkorrelationsmaximum, das der Verschiebung zwischen den beiden Bildern  $I_A$  und  $I_B$  zugrunde liegt, ungefähr die Form einer eindimensionalen Gaußfunktion jeweils entlang des horizontalen und vertikalen Querschnitts besitzt, lässt sich

$$(3) \quad \delta = \frac{\ln R_{-1} - \ln R_{+1}}{2(\ln R_{-1} + \ln R_{+1} - 2 \ln R_0)}$$

als ein 3-Punkt Schätzer für die Sub-Pixel-Verschiebung in beiden Koordinatenrichtungen verwenden (siehe [3], [19]).

### 2.1.2. Blais-Rioux Methode

Die Methode zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen von Blais und Rioux [22] wurde ursprünglich für den Einsatz in Echtzeitanwendungen bei Lasertriangulationsensoren entwickelt. Dabei wurden FIR-Filter aufgrund ihrer einfachen Implementierung in integrierte Schaltkreise (ICs) verwendet. Das Signal wird wie folgt zunächst gemittelt und anschließend numerisch abgeleitet

$$(4) \quad BR(s) = -R_{-2} - R_{-1} + R_1 + R_2.$$

Es sollte erwähnt werden, dass der in Gl. (4) dargestellte Filter fünf Werte berücksichtigt, also eine Filterlänge von fünf besitzt, allerdings in der Literatur normalerweise als Blais-Rioux Operator vierter Ordnung zu finden ist. Selbstverständlich ist auch die Verwendung anderer Filterlängen möglich, die eine Mittelung und Ableitung miteinander kombinieren. Das resultierende Signal  $BR(s)$  hat in jedem Fall genau eine Nullstelle, wo  $R_i$  sein Maximum hat. Dadurch ergibt sich die Sub-Pixel-genaue Position des Maximums mittels Anwendung der linearen Interpolation

$$(5) \quad \delta = \frac{BR(s_0)}{BR(s_0) - BR(s_0 + 1)},$$

wobei  $BR(s_0) \geq 0$  und  $BR(s_0 + 1) < 0$  erfüllt sein muss. Die Blais-Rioux Methode benötigt im Gegensatz zur Gaußschen Regression keine a priori Information über die Form des Kreuzkorrelationsmaximums. In verschiedenen Studien (siehe [20], [21]) wurde gezeigt, dass die Blais-Rioux Methode aufgrund ihres Bandpass-Charakters sehr robust gegenüber verrauschten Messdaten ist.

## 2.2. Zweidimensionale Algorithmen zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen

### 2.2.1. Zweidimensionale Gaußsche Regression

Eine allgemeine zweidimensionale elliptische Gaußfunktion beschrieben mit sechs Parametern (siehe [26]) ist durch

$$(6) \quad G(x, y) = A \exp \left[ -\frac{(x - x_e)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\beta(x - x_e)(y - y_e)}{\sigma_x \sigma_y} - \frac{(y - y_e)^2}{2\sigma_y^2} \right]$$

gegeben. Dabei ist  $(x_e, y_e)$  der Mittelpunkt der Ellipse,  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  sind die  $1\sigma$ -Längen der Hauptachsen,  $A$  ist die Amplitude des Maximums und  $\beta$  beinhaltet die Information über die Drehung der Ellipse gegenüber den Koordinatenachsen  $(x, y)$ . Um die sechs Parameter der Ellipse zu bestimmen, wird Gl. (6) zunächst wie folgt umgeschrieben

$$(7) \quad \ln\{G(x, y)\} = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$$

Dies lässt sich auch in einem linearen Gleichungssystem ausdrücken

$$(8) \quad \mathbf{y} = \mathbf{Ax},$$

wobei sich die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$

$$(9) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^2 & y_n^2 & x_1 y_n & x_1 & y_n & 1 \\ x_2^2 & y_1^2 & x_2 y_1 & x_2 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^2 & y_n^2 & x_2 y_n & x_2 & y_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & y_1^2 & x_m y_1 & x_m & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & y_n^2 & x_m y_n & x_m & y_n & 1 \end{bmatrix}$$

und der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$  sowie der Vektor der Unbekannten  $\mathbf{x}$

$$(10) \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \ln\{G(x_1, y_1)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_1, y_n)\} \\ \ln\{G(x_2, y_1)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_2, y_n)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_m, y_1)\} \\ \vdots \\ \ln\{G(x_m, y_n)\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

wie dargestellt ergeben.

Gemäß dem Gauß-Markov Theorem und unter der Annahme von mittelwertsfreien und unkorrelierten Fehler gleicher Varianzen ergibt sich der beste lineare unverzerrte Schätzer (best linear unbiased estimator, kurz BLUE) von Gl. (8) zu

$$(11) \quad \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}.$$

Der gesuchte Sub-Pixel-genaue Mittelpunkt der Ellipse kann schließlich aus Gl. (7) - (11) wie folgt abgeleitet werden

$$(12) \quad x_e = \frac{ce - 2bd}{4ab - c^2},$$

$$(13) \quad y_e = \frac{cd - 2ae}{4ab - c^2}.$$

Nobach und Honkanen stellen in [27] eine explizite Lösung der zweidimensionalen Gaußschen Regression für den speziellen Fall vor, dass ausschließlich ein  $3 \times 3$  also neun Werte großer Bereich der Kreuzkorrelationsfunktion für die Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung verwendet wird. Die allgemeine hier vorgestellte Lösung ist für diesen speziellen Fall äquivalent zu der Lösung von Nobach und

Honkanen, kann aber auch auf beliebig ausgedehnte Wertebereiche der Kreuzkorrelationsfunktion angewendet werden und ist damit deutlich flexibler. Die einzige Anforderung ist, dass mindestens sechs Beobachtungen verwendet werden müssen, anderenfalls ist Gl. (11) unterbestimmt. Verglichen mit dem iterativen nicht linearen Levenberg-Marquardt Ansatz von Ronneberger (siehe [28]) lässt sich diese Lösung sehr einfach und damit effektiv und schnell implementieren.

### 3. SYSTEMATISCHER FEHLER BEIM EINSATZ EINDIMENSIONALER ALGORITHMEN ZUR SCHÄTZUNG DER SUB-PIXEL-VERSCHIEBUNG

Die Höhenlinien einer kontinuierlichen zweidimensionalen Gaußfunktion gemäß Gl. (6) in einem lokalen Koordinatensystem  $(x, y)$ , das im höchsten Wert der diskreten Kreuzkorrelationsfunktion gelagert ist, können mit den folgenden Parametern beschrieben werden: Die Sub-Pixel-genaue Position des Maximums  $(x_e, y_e)$  mit  $|x_e| \leq 0.5$  und  $|y_e| \leq 0.5$ , der Drehwinkel  $\alpha$  und die numerische Exzentrizität

$$(14) \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

wobei  $u$  und  $v$  für die Längen der großen und kleinen Halbachse der Ellipse stehen. Der Einsatz von eindimensionalen Algorithmen zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen ist in dieser Beschreibung gleichbedeutend mit der Suche des Maximums jeweils entlang der  $x$  und  $y$  Koordinatenachse.

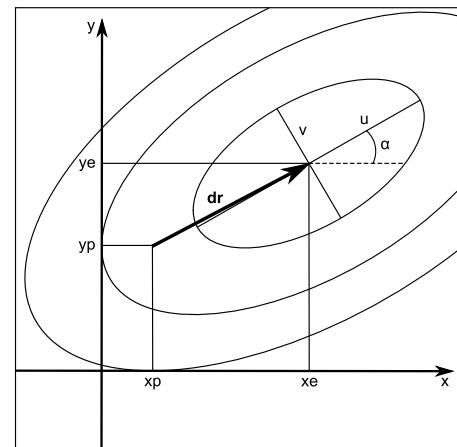


BILD 2. Veranschaulichung des systematischen Fehlers beim Einsatz eindimensionaler Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung im Falle eines allgemeinen ellipsenförmigen Kreuzkorrelationsmaximums.

Wie in BILD 2 zu sehen, ist dieses Maximum jeweils durch den Berührpunkt der Koordinatenachse mit der entsprechenden Höhenlinie gegeben. Somit führen eindimensionale Algorithmen zu einer verzerrten Position  $(x_p, y_p)$  des Kreuzkorrelationsmaximums mit

$$(15) x_p = x_e - \frac{y_e \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha},$$

$$(16) y_p = y_e - \frac{x_e \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}$$

oder als systematischer Fehlervektor dargestellt, also der Unterschied zwischen der wahren und der gemessenen Position  $(x_e, y_e)$  und  $(x_p, y_p)$ ,

$$(17) \mathbf{d}_r = -\varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha \begin{bmatrix} \frac{y_e}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha} \\ \frac{x_e}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha} \end{bmatrix}$$

und dessen absoluten Wert

$$\|\mathbf{d}_r\| = \varepsilon^2 \sin \alpha \cos \alpha \dots$$

$$(18) \dots \sqrt{\left( \frac{y_e}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \alpha} \right)^2 + \left( \frac{x_e}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha} \right)^2}.$$

BILD 3 zeigt den systematischen Fehler für verschiedene Ellipsentypen grafisch. Es muss beachtet werden, dass für einen festen Mittelpunkt  $(x_e, y_e)$  und eine gleichzeitige feste Exzentrizität  $\varepsilon$  der Ellipse der systematische Fehler dennoch mit verschiedenen Drehwinkeln  $\alpha$  der Ellipse variiert. Zusätzlich erhöht sich der systematische Fehler für höhere Exzentrizitäten und mit steigendem Abstand des Ellipsenmittelpunkts vom Koordinatenursprung. Der systematische Fehler verschwindet für Drehwinkel  $\alpha = 0$  (dies entspricht Ellipsen, die entlang der Koordinatenachsen ausgerichtet sind) oder für  $\varepsilon = 0$  (was einem Kreis entspricht).

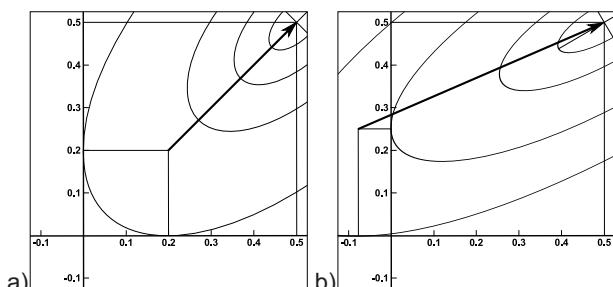
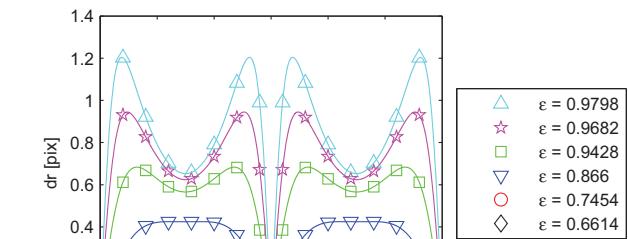


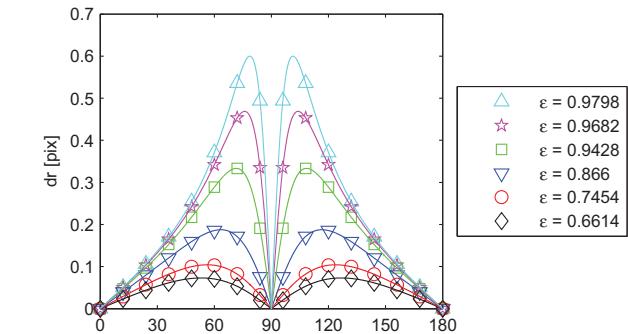
BILD 3. Zeichnerisches Beispiel für den systematischen Fehler bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei  $x_e = y_e = 0.5$  Pixel.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \varepsilon = 0.866 \text{ und } \alpha = 45^\circ, & \text{b) } \varepsilon = 0.9428 \text{ und } \alpha = 30^\circ. \end{array}$$

Die Variation des absoluten Wertes des systematischen Fehlervektors  $\|\mathbf{d}_r\|$  mit veränderlichem Drehwinkel  $\alpha$  ist in BILD 4 für unterschiedliche Ellipsentypen dargestellt. Wieder lässt sich beobachten, dass der systematische Fehler mit steigenden Exzentrizitäten wächst. In einigen Fällen übersteigt er sogar Werte von einem ganzen Pixel.



a)



b)

BILD 4. Betrag des systematischen Fehlers (in Pixel) bei der Anwendung von eindimensionalen Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung für verschiedene Drehwinkel und numerische Exzentrizitäten. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dabei (in Pixel): a)  $x_e = 0.5, y_e = 0.5$ , b)  $x_e = 0.25, y_e = 0.0$ .

#### 4. VERIFIKATION MITTELS EINER NUMERISCHEN SIMULATION

Um die bisherigen Ergebnisse zu verifizieren wurden künstliche Bilder mit zufälligen Punktemustern simuliert. Dazu wurde jeder einzelne Streupartikel mittels einer Gaußschen Intensitätsverteilung gemäß Gl. (6) modelliert. Somit war es möglich Bildpaare mit bekannter und konstanter Verschiebung zu generieren (siehe BILD 5 a) – b)) und die daraus resultierende Kreuzkorrelationsfunktion (siehe BILD 5 c)) gemäß Gl. (1) zu berechnen.

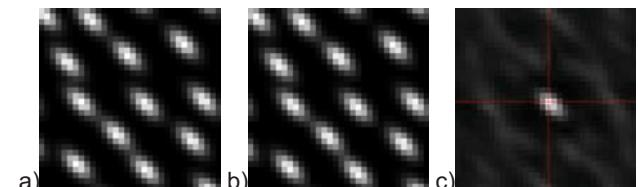


BILD 5. Kreuzkorrelation eines Bildpaares bekannter Verschiebung: (a) künstliches Bild mit zufälligem Punktemuster, (b) gleiches Bild um  $(\Delta x, \Delta y)$  verschoben, (c) resultierende Kreuzkorrelationsfunktion.

Es muss allerdings beachtet werden, dass die so erhaltene diskrete Kreuzkorrelationsfunktion nicht exakt gaußförmig ist, da die Abtastung des Bildes nur an

diskreten Pixelpositionen erfolgen kann. Werden Streupartikeldurchmesser von wenigen Pixel gewählt, wie sie in realen Anwendungen häufig vorkommen, so entsteht eine Unterabtastung.

Eine Simulation mit elliptisch geformten Streupartikeln wurde für verschiedene Verschiebungen  $(\Delta x, \Delta y)$  von -0,5 bis +0,5 Pixel jeweils in jede Koordinatenrichtung durchgeführt. Durch die Verwendung einer Schrittweite von 0,05 Pixel resultiert dies in 441 unterschiedlichen Verschiebungen. Für jede Verschiebung wurden 37 verschiedene Drehwinkel  $\alpha$  (von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$  mit einer Schrittweite von  $2,5^\circ$ ) und 121 verschiedene Sub-Pixel-Positionen für den Mittelpunkt der Streupartikel angewendet. Für jede Kombination von Verschiebung, Drehwinkel und Streupartikelmittelpunkt wurde die Kreuzkorrelationsfunktion des künstlichen Bildpaars berechnet und mittels der in Abschnitt 2 beschriebenen Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung ausgewertet. Daraus ergibt sich der Fehler der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung zu

$$(19) \left\| \mathbf{d}_r^{\text{sim}} \right\| = \sqrt{(\Delta x - x_p)^2 + (\Delta y - y_p)^2},$$

wobei  $(\Delta x, \Delta y)$  die bekannte Verschiebung und  $(x_p, y_p)$  die mittels des entsprechenden Algorithmus geschätzte Verschiebung ist. Werden eindimensionale Algorithmen zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung verwendet und nimmt man an, dass die Kreuzkorrelation an sich keinen systematischen Fehler besitzt, so sollte der auf diese Weise ermittelte Fehler dem aus Gl. (18) entsprechen, wobei dann die bekannte Verschiebung  $(\Delta x, \Delta y)$  der Sub-Pixel-Position  $(x_e, y_e)$  entspricht.

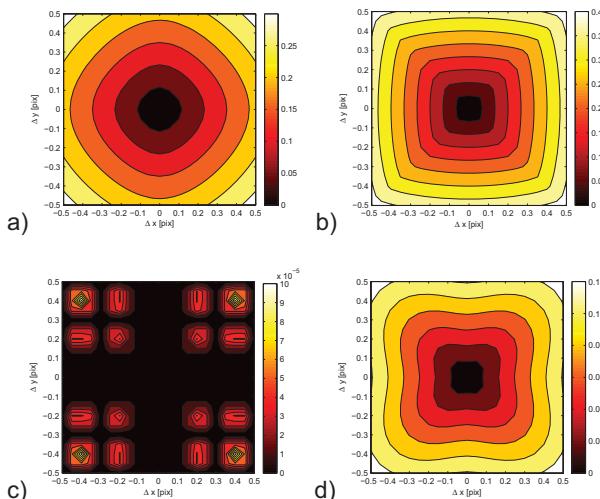


BILD 6. Fehler bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels der eindimensionalen Gaußschen Regression: a) Mittelwert, b) Maximum, c) Minimum, d) Standardabweichung.

Für jede Verschiebung wurde der Mittelwert, das Maximum, das Minimum und die Standardabweichung des Fehlers  $\left\| \mathbf{d}_r^{\text{sim}} \right\|$  der Schätzung der Sub-Pixel-

Verschiebung bei verschiedenen Drehwinkeln und Streupartikelmittelpunkten berechnet. Liegen echte Messdaten vor, so sind der Drehwinkel und die genaue Lage der Streupartikel normalerweise unbekannt. Daher ist mit dem Maximum eine konservative Abschätzung des Fehlers bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung gegeben.

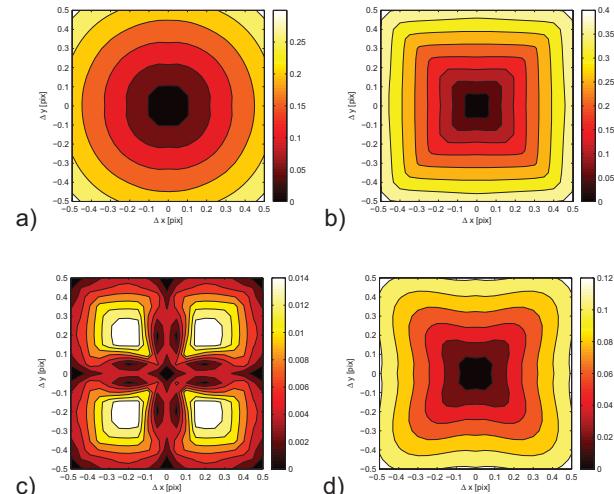


BILD 7. Fehler bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels der Blais-Rioux Methode: a) Mittelwert, b) Maximum, c) Minimum, d) Standardabweichung.

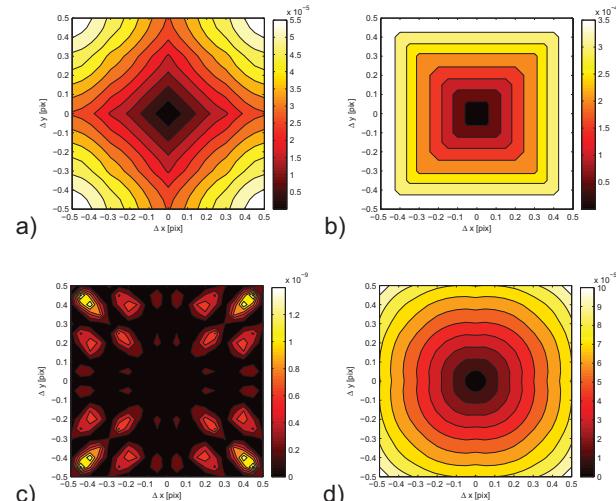


BILD 8. Fehler bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels der zweidimensionalen Gaußschen Regression: a) Mittelwert, b) Maximum, c) Minimum, d) Standardabweichung.

Das Ergebnis der Simulation bei der Verwendung von elliptischen Streupartikeln mit einer Exzentrizität von  $\varepsilon = 0,866$  ist in BILD 6 - BILD 8 grafisch dargestellt. Dabei kann man beobachten, dass die eindimensionale Gaußsche Regression (siehe BILD 6), die gemäß Gl. (3) jeweils 3 Werte der Kreuzkorrelationsfunktion berücksichtigt, nahezu die gleichen Ergebnisse liefert wie der eindimensionale Blais-Rioux Operator (siehe [22]) mit einer Filterlänge von fünf (siehe Gl. (4) - (5)). Der maximale Fehler beträgt ungefähr 0,4 Pixel in beiden Fällen, aber der minimale Fehler bei Anwendung der Blais-

Rioux Methode ist deutlich höher. Dies ist wohl auf die Fehler bei der dabei verwendeten linearen Interpolation zurückzuführen. Da bei der Simulation als Streupartikel ebenfalls eine Gaußfunktion verwendet wird, liegt der maximale Fehler bei der Anwendung der zweidimensionalen Gaußschen Regression (siehe BILD 8 b)) über einen 3 x 3 Pixel breiten Bereich in der Größenordnung der Rechengenauigkeit.

In TAB. 1 ist ein Vergleich des maximalen Fehlers bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels eindimensionaler Algorithmen aus der numerischen Simulation mit der analytischen Lösung von Gl. (18) gegeben. Der maximale Fehler der eindimensionalen Algorithmen (Blais-Rioux und Gaußsche Regression) passt dabei sehr gut zu der analytischen Beschreibung des Fehlers  $\|\mathbf{d}_r^{ana}\|$ . Die Abweichungen zwischen dem numerischen Experiment und der analytischen Lösung liegen in der Größenordnung von 0,01 Pixel für die Blais-Rioux Methode und 0,002 Pixel für die Gaußsche Regression.

$x_e$	$y_e$	$\varepsilon$	1D Blais-Rioux	1D Gauß	Analytischer Fehler (1D) $\max_{\alpha} \ \mathbf{d}_r^{ana}\ $
0.25	0.0	0.7454	0.1068	0.1041	0.104
0.25	0.25	0.7454	0.1307	0.136	0.1358
0.5	0.5	0.7454	0.2672	0.272	0.2716
0.25	0.0	0.866	0.1958	0.1873	0.1875
0.25	0.25	0.866	0.2016	0.2125	0.2125
0.5	0.5	0.866	0.4112	0.425	0.425
0.25	0.0	0.9428	0.3363	0.3328	0.334
0.25	0.25	0.9428	0.3416	0.3415	0.3423
0.5	0.5	0.9428	0.6851	0.683	0.6846
0.25	0.0	0.9682	0.4682	0.4675	0.4667
0.25	0.25	0.9682	0.4729	0.4717	0.4705
0.5	0.5	0.9682	0.9433	0.9435	0.9409

TAB. 1 Übersicht über den maximalen Fehler bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels eindimensionaler Algorithmen.

Um die Ergebnisse aus BILD 6 und TAB. 1 weiter zu verifizieren wurden die künstlichen Bildpaare der zufälligen elliptischen Streupartikel auch mittels zweier kommerzieller Softwarepakete, wie sie in der experimentellen Aerodynamik zur Anwendung kommen, ausgewertet (siehe TAB. 2). Diese Softwarepakete (im Folgenden mit # und ≠ bezeichnet) wurden ausgiebig im Rahmen der PIV Challenge 2 (siehe [32]) getestet. Beide Pakete bieten einen eindimensionalen Gaußschen Algorithmus an (implementiert als 3-Punkt Schätzer), wobei das Paket ≠ in guter Übereinstimmung mit der analytischen Lösung

analytischen Lösung abschneidet. Das Paket # liefert dagegen im Falle  $\varepsilon = 0.7454$  einen größeren, aber im Falle  $\varepsilon = 0.9682$  einen kleineren Fehler als die analytische Lösung. Ein ähnlicher Effekt kann bei der Whittaker Rekonstruktion (siehe [24]) beobachtet werden, woraus sich die Vermutung ableiten lässt, dass diese hier nur eindimensional implementiert wurde. In jedem Fall, außer für den Schwerpunktoperator, übersteigt der systematische Fehler die erwartete Genauigkeit von 0,1 bis 0,05 Pixel, wie sie in [4] angegeben wird, deutlich.

$\varepsilon$	$\alpha$	Schwerpunkt (#)	Whittaker (#) [24]	1D Gauß (#)	1D Gauß (#)	Analytischer Fehler $\ \mathbf{d}_r^{ana}\ $
0.7454	10°	0.0357	0.4239	0.35	0.1635	0.1138
0.7454	20°	0.033	0.4524	0.3813	0.2203	0.1996
0.7454	45°	0.0247	0.4881	0.4154	0.3442	0.272
0.866	10°	0.032	0.4421	0.4019	0.3025	0.2442
0.866	20°	0.0413	0.4942	0.46	0.4371	0.3805
0.866	45°	0.0309	0.5383	0.4965	0.4951	0.4243
0.9428	10°	0.0441	0.528	0.4964	0.4951	0.5566
0.9428	20°	0.0519	0.6049	0.6065	0.7182	0.683
0.9428	45°	0.0276	0.6069	0.5817	0.5886	0.5657

TAB. 2 Übersicht über den Fehler (in Pixel) bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels verschiedener Algorithmen, die in den kommerziellen Softwarepaketen # und ≠ angeboten werden. Die vorgegebene Verschiebung betrug  $(\Delta x, \Delta y) = (0.5, 0.5)$  Pixel.

Die insgesamt besten Ergebnisse mit den kommerziellen Softwarepaketen der experimentellen Aerodynamik wurden mittels des Schwerpunktoperators mit einer Größe von 9 x 9 Pixel erzielt. Dabei lag der Fehler immer unter 0,05 Pixel. Da der Schwerpunktoperator alle Werte innerhalb eines zweidimensionalen Fensters der Kreuzkorrelationsfunktion berücksichtigt und der Fehler nachgewiesenermaßen begrenzt ist, eignet er sich durchaus für den Einsatz bei beliebig verdrehten elliptischen Kreuzkorrelationsmaxima, wie sie im allgemeinen bei unbekannten Messdaten vorliegen können.

In TAB. 3 ist ein Vergleich der zweidimensionalen linearen Gaußschen Regression aus Abschnitt 2.2.1 mit dem zweidimensionalen iterativen nicht linearen Levenberg-Marquardt Algorithmus, wie er von Ronneberger [28] verwendet wurde, dargestellt. Beide Algorithmen sind in der Lage ohne signifikanten systematischen Fehler mit beliebig verdrehten elliptischen Kreuzkorrelationsmaxima umzugehen. Bei der Gaußschen Regression ist der maximale Fehler immer kleiner als 0,015 Pixel. Im Falle des Levenberg-Marquardt Algorithmus ist der maximale

Fehler immer kleiner als 0,04 Pixel. Bei beiden Ansätzen liegt der systematische Fehler somit immer unter der erwarteten Genauigkeit von 0,1 bis 0,05 Pixel, wie sie in [4] angegeben wird, und sollte daher anstatt der bisher gebräuchlichen eindimensionalen Algorithmen in jeder kreuzkorrelationsbasierten Anwendung der experimentellen Aerodynamik verwendet werden, in der beliebig verdrehte elliptischen Kreuzkorrelationsmaxima auftreten können.

$\varepsilon$	$\alpha$	2D linear Gauß (siehe Abschnitt 2.2.1)	2D nicht linear Gauß (siehe [28])	Analytischer Fehler (1D) $\ \mathbf{d}_r^{ana}\ $
0.7454	10°	0.0121	0.019	0.1138
0.7454	20°	0.01	0.0082	0.1996
0.7454	45°	0.018	0.0093	0.272
0.866	10°	0.0153	0.0222	0.2442
0.866	20°	0.0114	0.0263	0.3805
0.866	45°	0.0008	0.0043	0.4243
0.9428	10°	0.0133	0.0084	0.5566
0.9428	20°	0.011	0.0066	0.683
0.9428	45°	0.0021	0.0392	0.5657

TAB. 3 Übersicht über den Fehler (in Pixel) bei der Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung mittels zweidimensionaler Gaußscher Algorithmen. Die vorgegebene Verschiebung betrug  $(\Delta x, \Delta y) = (0.5, 0.5)$  Pixel.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG

Der Einsatz von eindimensionalen Algorithmen zur Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen in jeder Koordinatenrichtung führt zu einem systematischen Fehler bei der Schätzung der zweidimensionalen Verschiebung im Falle von beliebig verdrehten elliptischen Maxima der Kreuzkorrelationsfunktion. Eine analytische Lösung dieses systematischen Fehlers wurde daher abgeleitet. Er ist abhängig von der Sub-Pixel-genauen Position  $(x_e, y_e)$ , der Exzentrizität  $\varepsilon$  und des Drehwinkels  $\alpha$  der Ellipse und kann sogar Werte größer als ein Pixel annehmen. Ein gradientenbasierter Ansatz zur Schätzung der Sub-Pixel-Verschiebung, der so genannte Blais-Rioux Operator, wurde für die Messtechnik der experimentelle Aerodynamik angewendet. Diese Methode benötigt im Gegensatz zur Gaußschen Regression keinerlei a priori Information über die Form der Kreuzkorrelationsfunktion, kann sich aber im Falle einer starken Unterabtastung nachteilig auswirken.

Zur Vermeidung von systematischen Fehlern bei der Schätzung von Sub-Pixel-Verschiebungen in der experimentellen Aerodynamik im Falle elliptischer

Kreuzkorrelationsmaxima wurde eine zweidimensionale allgemeine lineare Gaußsche Regression hergeleitet. Dieser neue Ansatz führt zu einem Fehler, der immer kleiner als 0,015 Pixel ist. Da diese Methode nicht nur genau, sondern aufgrund ihrer Linearität auch sehr einfach und schnell zu implementieren ist, kann der Einsatz in kommerziellen Softwarepaketen für die experimentelle Aerodynamik uneingeschränkt empfohlen werden.

## 6. LITERATUR

- [1] Westerweel, J.: Digital Particle Image Velocimetry - Theory and Application, Delft University of Technology, PhD thesis, 1993.
- [2] Schröder, A.: Untersuchung der Strukturen von künstlich angeregten transitionellen Plattengrenzschichtströmungen mit Hilfe der Stereo und Multiplane Particle Image Velocimetry, Georg-August Universität Göttingen, PhD thesis, 2001.
- [3] Willert, C.; Gharib, M.: Digital particle image velocimetry. In: Experiments in Fluids 10, 1991, pp. 181–193.
- [4] Raffel, M.; Willert, C.; Wereley, S. T.; Kompenhans, J.: Particle Image Velocimetry: A Practical Guide. Sec. Ed. Springer, Berlin, 2007.
- [5] Adrian, R. J.: Twenty years of particle image velocimetry. In: Experiments in Fluids 39, 2005, pp. 159–169.
- [6] Raffel, M.; Willert, C.; Kompenhans, J.: Particle Image Velocimetry: A Practical Guide. Springer, Berlin, 1998.
- [7] Schröder, A. (Hrsg.); Willert, C. (Hrsg.): Particle Image Velocimetry - New Developments and Recent Applications. Bd. 112, Springer, Berlin, 2008.
- [8] Förstner, W.: On the geometric precision of digital correlation. In: Int. Archives of Photogrammetry 24/III, 1982, pp. 176–189.
- [9] Ackermann, F.: Digital image correlation: performance and potential applications in photogrammetry. In: Thompson Symp., Birmingham, 1984.
- [10] Grün, A.: Adaptive least squares correlation: a powerful image matching technique, In: South African Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Cartography 14, 1985, pp. 175–187.
- [11] Peters, W. H.; Ranson, W. F.: Digital imaging techniques in experimental stress analysis, In: Optical Engineering 21, 1982, pp. 427–431.
- [12] Siebert, T.; Becker, T.; Spilthof, K.; Neumann, I.; Krupka, R.: High-speed digital image correlation: error estimation and application. In: Optical Engineering 46, 2007, pp. 051004/1-7.
- [13] Blumrich, F.; Schröder, A.; Konrath, R.; Klinge, F.: Presentation of two optical correlation-based measurement techniques for surface deformation: PROPAC and REPAC. In: SENSOR Conference 2007, Proceedings Volume II. Nürnberg, Germany,

2007, pp. 117–123.

- [14] Blumrich, F.: Korrelationsbasierte optische Messtechnik mittels zufälliger Punktemuster: PROPAC und REPAC. In: DGaO-Proceedings, 108, A29. Seebad Heringsdorf, Germany, 2007.
- [15] Blumrich, F.: Optische korrelationsbasierte Messtechnik mittels zufälliger Punktemuster, Universität Stuttgart, PhD thesis, 2009.
- [16] Richard, H.; Raffel, M.: Principle and applications of the background oriented schlieren (BOS) method, In: Measurement Science and Technology 12, 2001, pp. 1576–1585.
- [17] Kindler, K.; Goldhahn, E.; Leopold, F.; Raffel, M.: Recent developments in background oriented Schlieren methods for rotor blade tip vortex measurements, In: Experiments in Fluids 43, 2008, pp. 233–240.
- [18] Bing, P.; Hui-min, X.; Bo-qin, X.; Fu-long, D.: Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation. In: Measurement Science and Technology 17, 2006, S. 1615–1621.
- [19] Westerweel, J.: Fundamentals of digital particle image velocimetry, In: Measurement Science and Technology., Special Issue on Particle Image Velocimetry 8, 1997, pp. 1379–1392.
- [20] Fisher, R. B.; Naidu, D.K.: A comparison of algorithms for subpixel peak detection, In: Advances in Image Processing, Multimedia and Machine Vision, J. Sanz, ed., Springer, Heidelberg, 1996.
- [21] Trucco, E.; Fisher, R. B.; Fitzgibbon, A. W.; Naidu, D. K.: Calibration, data consistency and model acquisition with a 3-d laser striper, In: Int. J. of Computer Integrated Manufacturing 11, 1998, pp. 292–310.
- [22] Blais, F.; Rioux, M.: Real-time numerical peak detector, In: Signal Processing 11, 1986, pp. 145–155.
- [23] Whittaker, E. T.: On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory, In: Proc. Roy. Soc. 35, 1915, pp. 181–194.
- [24] Roesgen, T.: Optimal subpixel interpolation in particle image velocimetry, In: Experiments in Fluids 35, 2003, pp. 252–256.
- [25] Alexander, B. F.; Ng, K. C.: Elimination of systematic error in subpixel accuracy centroid estimation, In: Optical Engineering 30, 1991, pp. 1320–1331.
- [26] Condon, J. J.: Errors in elliptical gaussian fits, In: Astronomical Society of the Pacific 109, 1997, pp. 166–172.
- [27] Nobach, H.; Honkanen, M.: Two-dimensional gaussian regression for sub-pixel displacement estimation in particle image velocimetry or particle position estimation in particle tracking velocimetry, In: Experiments in Fluids 38, 2005, pp. 511–515.
- [28] Ronneberger, O.; Raffel, M.; Kompenhans, J.: Advanced evaluation algorithms for standard and dual plane particle image velocimetry, In: Proc. 9th Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, 1998.
- [29] Davis, C. Q.; Freemann, D. M.: Statistics of subpixel registration algorithms based on spatiotemporal gradients or block matching, In: Optical Engineering 37, 1997, pp. 1290–1298.
- [30] Schreier, H. W.; Braasch, J. R.; Sutton, M. A.: Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation, In: Optical Engineering 39, 2000, pp. 2919–2921.
- [31] Scarano, F.: Iterative image deformation methods in PIV, In: Measurement Science and Technology 13, 2002, pp. R1–R19.
- [32] Stanislas, M.; Okamoto, K.; Kähler C. J.; Westerweel, J.: Main results of the second international PIV challenge, In: Experiments in Fluids, 2005, pp. 170–191.