

NUMERISCHE VERFAHREN REDUZIERTER ORDNUNG ZUR ERMITTLUNG INSTATIONÄRER LUFTKRÄFTE

A. Kölzsch

Lehrstuhl für Aerodynamik - Technische Universität München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching, Deutschland

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine Klassifizierung verschiedener numerischer Verfahren reduzierter Ordnung für die Ermittlung instationärer und generalisierter Luftkräfte vorgenommen. Die Identifikation eines linearen, diskreten Zustandsraummodells über Markov-Parameter wird als besonders vielversprechendes Verfahren für den betrachteten Anwendungsfall identifiziert und seine mathematischen Grundlagen detailliert dargestellt. Die Kalibrierung des Modells erfolgt anhand eines vollständigen Euler-Verfahrens und die numerische Validierung wird unter anderem mit Hilfe einer Nickschwingung einer ebenen Platte und elastischer Schwingungsformen der AGARD 445.6 Flügelkonfiguration durchgeführt.

NOMENKLATUR

Formelzeichen

A	Systemmatrix
B	Steuermatrix
C	Beobachtungsmatrix
c_p	Druckbeiwert
D	Durchgangsmatrix
H	Hankelmatrix
I	Einheitsmatrix
k	Zeitschrittindex
l	Gesamtanzahl der Zeitschritte
M	Beobachtungsmatrix
Ma	Machzahl
O	Nullmatrix
Q	Luftkraftmatrix
t	Zeit
Δt	Zeitschrittweite
u	Eingangsvektor
x	Zustandsvektor
Y	Matrix der Markov-Parameter
y	Ausgangsvektor

Abkürzungen

ARMA	Auto Regressive Moving Average
ERA	Eigensystem Realization Algorithm
GAF	Generalized Aerodynamic Forces
MIMO	Multiple-Input/Multiple-Output System
RFA	Rational Function Approximation
ROM	Reduced Order Model
SD	Small Disturbance (Methode kleiner Störungen)
SOCIT	System/Observer/Controller Identification Toolbox
SVD	Singular Value Decomposition

1. EINLEITUNG

Beim Entwurf und bei der Auslegung von zivilen und militärischen Fluggeräten werden die Flugbereichsgrenzen durch dynamische aeroelastische Stabilitäts- und Antwortprobleme wie Flattern oder Buffeting bestimmt [1], [2].

Insbesondere zur Flutteranalyse ist dabei die Bestimmung der instationären aerodynamischen Luftkräfte beziehungsweise der generalisierten Luftkräfte nötig. Diese Luftkräfte werden durch die Umströmung der schwingenden Flügelstruktur hervorgerufen.

Für ihre Ermittlung wurden bisher vorwiegend numerische Verfahren basierend auf der linearisierten Potentialtheorie verwendet. Diese liefern zwar ein schnelles Ergebnis, allerdings haben sie den Nachteil, dass sie die Strömungsgrößen im transsonischen Flugbereich ungenau berechnen, da (starke) Verdichtungsstöße nicht erfasst werden. Dies macht vor allem für bessere Ergebnisse im Transsonikbereich den Einsatz höherwertiger Verfahren notwendig: es werden dafür nichtlineare Euler- beziehungsweise Navier-Stokes-Verfahren eingesetzt.

Bei den aeroelastischen Fragestellungen ist die Anzahl zu variierender Parameter, wie Machzahl, Flügelgeometrie, betrachtete elastische Eigenformen, Anstellwinkel und Frequenz, sehr hoch und somit auch der Rechenaufwand, der für eine ausführliche Analyse mit einem Euler- oder Navier-Stokes-Verfahren betrieben werden muss. Dies hat die Forderung nach effizienteren Verfahren mit kurzen Antwortzeiten verstärkt und die Entwicklung von Verfahren reduzierter Ordnung zur Ermittlung von instationären Luftkräften vorangetrieben. So wurden zum Beispiel basierend auf den vollständigen Euler- beziehungsweise Navier-Stokes-Verfahren die sogenannten SD-Verfahren ("Small Disturbance") entwickelt, die auch am Lehrstuhl für Aerodynamik der TU München umgesetzt sind, [3], [4] und [5]. Sie liefern hochwertige Ergebnisse bei gleichzeitig wirtschaftlicher Rechenzeit.

Neben den SD-Verfahren existieren jedoch noch zahlreiche weitere numerische Verfahren reduzierter Ordnung („Reduced Order Models“, ROM), die auf aerodynamische Probleme anwendbar und daher von Interesse für die Ermittlung von instationären Luftkräften sind [6].

Im Rahmen dieser Arbeit wird basierend auf einer groben Klassifizierung ein geeignetes ROM-Verfahren ausgewählt und auf die Ermittlung der instationären Luftkräfte angewendet. Dazu wird zuerst die physikalische Problemstellung, auf die das Verfahren bezogen werden soll, erläutert. Anschließend wird das ROM-Verfahren und seine Anwendung auf zwei Berechnungsfälle vorgestellt.

2. BERECHNUNG INSTATIONÄRER LUFTKRÄFTE IN DER AEROELASTIK

Die Kraft- und Momentenbeiwerte für ein instationäres Umströmungsproblem werden im TUM-AER Euler-Verfahren direkt berechnet und ausgegeben. Somit stehen instationäre Luftkraftgrößen wie der Auftriebsbeiwert $C_A(t)$ zur Verfügung. Zusätzlich können bei der Untersuchung von Schwingungen einer Struktur in ihren Eigenmoden die generalisierten Luftkräfte ("Generalized Aerodynamic Forces", GAF) ermittelt werden. Die GAF werden durch die Umströmung der schwingenden Flügelstruktur verursacht und sollen insbesondere für die ersten n Eigenmoden der Tragflächen ermittelt werden. Da bei dem Euler-Verfahren die reibungsfreie Umströmung von Tragflügeln betrachtet wird, resultieren aufgrund der fehlenden Reibungskräfte die Kräfte und Momente, die auf die Tragflügeloberfläche wirken, allein aus der Druckverteilung auf der Flügeloberfläche.

Die Einträge in die generalisierte Luftkraftmatrix \mathbf{Q} ergeben sich aus der Integration des Produktes der Druckverteilung generiert durch die Eigenform i ($c_{pi}(\mathbf{x})$) mit der Auslenkung der Eigenform j ($z_j(\hat{\mathbf{x}}_j)$) über der Tragflügeloberfläche F zu [1], [5]:

$$(1) \quad Q_{ij} = \oint_F c_{pi}(\mathbf{x}) \mathbf{z}_j(\hat{\mathbf{x}}_j) \cdot d\mathbf{F}_i,$$

worin $i, j = 1, \dots, n$. Somit werden für die Ermittlung der generalisierten Luftkraftmatrix die Druckverteilung $c_{pi}(\mathbf{x})$ und die Auslenkung der Eigenform j benötigt.

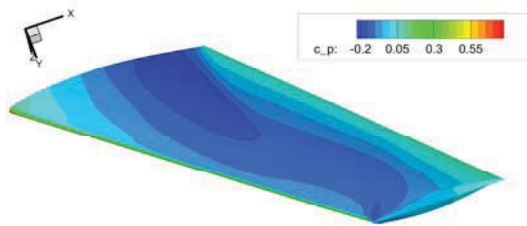


BILD 1. Druckverteilung für den AGARD 445.6 Flügel bei $Ma_\infty = 0,954$ und $\alpha = 0^\circ$

Sind die Eigenformen aus der strukturdynamischen Analyse bekannt, so können sie direkt über die kinematischen Randbedingungen in die aerodynamische Analyse eingehen. Zuerst wird eine stationäre Rechnung mit unausgelenktem Netz der Flügelgeometrie für die gewünschte Flügelkonfiguration und Machzahl durchgeführt, vgl. BILD1. Darauf aufsetzend findet die instationäre Rechnung für dieselbe Machzahl und Flügelgeometrie für die Schwingung in der jeweiligen Eigenform i statt, vgl. BILD2. Das ausgelenkte Netz entspricht dabei dem Flügel in der jeweiligen Eigenform. Der Zeitverlauf wird zwischen dem unausgelenkten und dem ausgelenkten Zustand interpoliert [3], [4].

Während der aerodynamischen Berechnungen wird das System als entkoppelt betrachtet, das heißt, der Flügel schwingt in seiner Eigenform, ohne dass die Umströmung und die daher rührende Kraft einen Einfluss auf die Schwingung haben. Aus den Ergebnissen der instationären Rechnung wird dann die instationäre Druckverteilung $c_{pi}(\mathbf{x})$ für die Eigenform i ermittelt. Zusätzlich werden die Auslenkungen aller Eigenformen j durch die Schwingung in Eigenmode i berechnet. Daraus können anschließend die Einträge in die jeweilige Zeile i der GAF-Matrix mit Gleichung (1) ermittelt werden. Für die Berech-

nung der gesamten GAF-Matrix \mathbf{Q} sind somit n separate Euler-Rechnungen durchzuführen, wobei n der Anzahl der zu betrachtenden Moden entspricht.

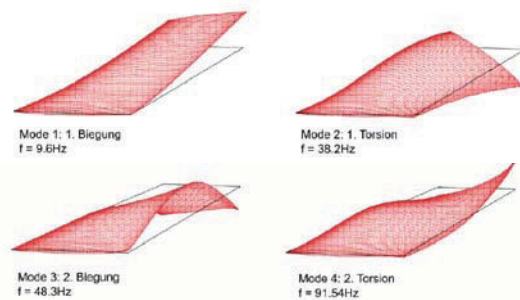


BILD 2. Eigenmoden 1 bis 4 der AGARD 445.6-Flügelkonfiguration

Das numerische Verfahren reduzierter Ordnung soll auf die Ermittlung instationärer und generalisierter Luftkräfte, insbesondere auf Basis der (nichtlinearen) instationären Euler- bzw. Navier-Stokes-Gleichungen, anwendbar sein. Die Ausgangsgrößen, die mit dem Verfahren ermittelt werden sollen, stellen die in Gleichung (1) formulierten instationären Luftkräfte als Antworten auf Bewegungsformen von Tragflächen dar. Als Eingangsgröße dient der zeitliche Verlauf der Auslenkung der Flügelgeometrie, ausgedrückt durch Starrkörpermoden und/oder Eigenmoden der Flügelstruktur. Als weitere Voraussetzung sollen hier nur kleine Amplituden der strukturellen Deformation betrachtet werden (wie es in der Flutteranalyse gängige Praxis ist). Dadurch wird die Annahme der Amplitudenlinearisierung gültig, welche besagt, dass sich die aerodynamische Antwort linear in Bezug auf die Amplitude der strukturellen Deformation verhält [7]. Somit ist auch die Verwendung linearer ROMs möglich [6].

3. NUMERISCHE VERFAHREN REDUZIERTER ORDNUNG

Numerische Verfahren reduzierter Ordnung sind vereinfachte mathematische Modelle, die die wichtigsten Aspekte der Dynamik eines Originalsystems abdecken und die in der Lage sind, Eingangs-Ausgangs-Beziehungen komplexer Systeme wiederzugeben [8].

Bei Verfahren, die zur Ermittlung instationärer Luftkräfte angewendet werden, handelt es sich um sogenannte aerodynamische ROMs. Durch ihren Einsatz erhofft man sich eine effizientere Berechnung der Luftkräfte und damit eine Einsparung in der dafür benötigten Rechenzeit.

3.1. Übersicht zu Verfahren

Bei den Verfahren reduzierter Ordnung, die zur Ermittlung instationärer Luftkräfte in Frage kommen, ist zwischen Verfahren im Frequenzbereich und im Zeitbereich zu unterscheiden, die hier kurz aufgeführt werden.

3.1.1. Verfahren im Frequenzbereich

Zu den ROM-Verfahren im Frequenzbereich zählen die Fourieranalyse [9], [10], [11] die Spektralanalyse [10], die „Indicial Method“ [12] und die bereits erwähnten Small-Disturbance-Verfahren [3], [4], [5].

Bei den Verfahren im Frequenzbereich scheinen grundsätzlich die Methode der Spektralanalyse sowie die Indicial Method und das SD-Verfahren die Anforderungen der in

Abschnitt 2 vorgestellten Methodik zu erfüllen. Die Fourieranalyse weist im Vergleich zur Spektralanalyse erhebliche Nachteile auf (sie ist nur für eine reduzierte Frequenz gültig und das Ergebnis kann ungenau sein) und kommt aus diesem Grund weniger in Frage. Die Indicial Method ist im Ansatz recht ähnlich zu den SD-Verfahren (es wird hierfür auch ein SD-Ansatz zur Umsetzung vorgeschlagen), so dass die Neuerungen bei der Umsetzung dieses Verfahrens recht gering wären. Grundsätzlich ist mit dem SD-Verfahren bereits ein ROM im Frequenzbereich vorhanden. Die hier verfolgte Vorgehensweise bezieht sich daher auf ein ROM im Zeitbereich.

3.1.2. Verfahren im Zeitbereich

Im Zeitbereich sind als wichtige Verfahren das Auto Regressive Moving Average-Modell (ARMA-Modell) [11], die Volterra-Theorie [13], [14], [15], das Zustandsraummodell [8], [16], [17], die Methode der Rationalen Funktionen [18], [19] sowie die Eigenmodebasierten Verfahren [20] und die Methode der Balanced Modes [20] zu nennen.

Die Volterra-Theorie wäre grundsätzlich sehr gut geeignet, da mit ihr sogar nichtlineare Zusammenhänge dargestellt werden können und sie sehr gute Ergebnisse bei der GAF-Ermittlung liefert. Der mit der Umsetzung des Verfahrens verbundene Aufwand erscheint allerdings sehr hoch zu sein.

Das Hauptaugenmerk der beiden Verfahren, die auf der Ermittlung von Moden basieren (Eigenmodebasierte ROMs, Verfahren der Balanced Modes), ist eher auf der Abbildung der Physik in Form dominanter beziehungsweise energiereichster Strömungsstrukturen als auf der Ermittlung gewünschter Ausgangsgrößen wie der instationären Luftkräfte zu liegen. Weiterhin wurde das Eigenmodebasierte Verfahren bisher nicht für dreidimensionale Problemstellungen angewendet und der numerische Aufwand wird bereits für das 2-D-Euler-Verfahren als sehr hoch angegeben. Das Verfahren der Balanced Modes wurde zudem bisher noch nicht auf ein Euler-Verfahren, sondern nur auf einfachere Vortex-Lattice-Modelle angewendet [20]. Somit scheiden diese beiden Verfahren beim Auswahlprozess aus.

Das ARMA-Modell weist ebenfalls mehrere Nachteile auf: es ist sehr sensitiv bezüglich der gewählten Ordnung und weist bei der Vorhersage von Größen in einigen Moden Probleme auf [11].

In Anbetracht dieser Tatsachen verbleiben im Zeitbereich letztlich das Verfahren der Rationalen Funktionen und das Zustandsraummodell als für die gewünschte Anwendung sehr geeignet erscheinende Methoden. Das Zustandsraummodell wurde dabei bereits als diskretes, dynamisches Modell in Verbindung mit GAF erfolgreich eingesetzt und es sind sehr ausführliche Informationen zu dem Verfahren in der Literatur vorhanden. Zusätzlich ist es Gegenstand aktueller Untersuchungen [16] und es existiert ein Programmpaket zur Systemidentifikation, das bei der Umsetzung der Methode hilfreich sein könnte [17]. Aus diesen Gründen fällt die Wahl für das ROM, das zur Ermittlung instationärer Luftkräfte umgesetzt werden soll, auf das Zustandsraummodell. Es wird im Folgenden ausführlich beschrieben.

3.2. Zustandsraummodell

3.2.1. Lineare diskrete Formulierung

Das lineare diskrete Zustandsraummodell dient der Beschreibung eines dynamischen Systems im Zeitbereich (vergleichbar zum Beispiel mit Transferfunktionen, die das dynamische Verhalten im Frequenzbereich beschreiben).

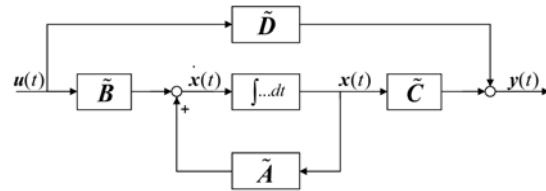


BILD 3. Blockschaltbild [20].

Es kann aus dem kontinuierlichen Zustandsraummodell, vgl. BILD 3, mit einer zeitlichen Vorwärtsdifferenz abgeleitet werden und wird beschrieben durch die Zustandsgleichung (2) und die Ausgangsgleichung (3):

$$(2) \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$

$$(3) \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(k)$, dem Eingangsvektor $\mathbf{u}(k)$ und dem Ausgangsvektor $\mathbf{y}(k)$. Hierbei beschreibt \mathbf{A} die Systemmatrix, \mathbf{B} die Steuermatrix, \mathbf{C} die Beobachtungsmatrix und \mathbf{D} die Durchgangsmatrix [20]. Wenn sich das Zeitverhalten eines Systems durch ein lineares diskretes Zustandsraummodell nach den Gleichungen (2) und (3) beschreiben lässt und die Systemmatrizen sowie ein Anfangswert für den Vektor \mathbf{x} bekannt sind, kann für einen beliebigen Systemeingang \mathbf{u} der zugehörige Ausgang \mathbf{y} mit dem Zustandsraummodell berechnet werden.

3.2.2. Systemidentifikation

Im Rahmen einer Systemidentifikation für ein diskretes Zustandsraummodell werden auf Basis eines oder mehrerer gegebener Eingangs-Ausgangs-Paare die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} ermittelt. Ein mögliches Verfahren stellt die Identifikation von Markov-Parametern mittels eines Beobachters dar [8], [16], die hierfür genutzt wird.

3.2.2.1. Markov-Parameter

Bei der Systemidentifikation sind im ersten Schritt die Ein- und Ausgangsgrößen des Systems festzulegen. Darauf aufbauend kann eine Datensammlung - zum Beispiel mittels Rechnungen oder anhand von Experimenten am Originalsystem - angefertigt werden, die Zeitreihen für bestimmte Eingänge in das System und die zugehörigen Ausgänge umfasst. Diese Daten dienen als Grundlage für die Systemidentifikation.

Mit der Annahme trivialer Anfangsbedingungen, das heißt $\mathbf{x}(0) = 0$, kann der Satz an Gleichungen aus (2) und (3) für eine Folge von l Zeitschritten folgendermaßen in Matrixform geschrieben werden:

$$(4) \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{U},$$

mit

$$(5) \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \quad \mathbf{y}(1) \quad \mathbf{y}(2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(l-1)],$$

$$(6) \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{l-2}\mathbf{B}]$$

und

$$(7) \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(l-2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}.$$

Hierbei ist \mathbf{y} eine $q \times l$ -Matrix, die die Zeitreihen der betrachteten Systemausgänge enthält. Bei \mathbf{U} handelt es sich um eine obere Dreiecksmatrix mit den diskreten Eingangsgrößen als Einträgen, sie hat die Dimension $ml \times l$. Die Matrix \mathbf{Y} ist von der Dimension $q \times ml$. Ihre Elemente sind die sogenannten Markov-Parameter \mathbf{D} , \mathbf{CB} , \mathbf{CAB} , ..., $\mathbf{CA}^{l-2}\mathbf{B}$ des Systems in den Gleichungen (2) und (3), die durch die vier Systemmatrizen des diskreten Zustandsraummodells ausgedrückt werden [21]. Im Rahmen der Systemidentifikation werden zuerst die Einträge in \mathbf{Y} , also die Markov-Parameter, aus den Informationen aus \mathbf{y} und \mathbf{U} ermittelt, bevor anschließend auf die vier Systemmatrizen des Zustandsraummodells geschlossen werden kann.

Um den numerischen Aufwand bei der Systemidentifikation zu reduzieren, werden bei dieser Methode oft nicht alle Einträge in \mathbf{Y} berücksichtigt, sondern nur eine verkürzte Version der Matrix mit p Markov-Parametern betrachtet. Wenn nämlich \mathbf{A} asymptotisch stabil ist, wird (unter der Voraussetzung, dass p ausreichend groß gewählt ist) $\mathbf{A}^i \approx 0$ für alle Zeitschritte $i \geq p$. Gleichung (4) wird dann angenähert durch

$$(8) \quad \mathbf{y} = \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{U}},$$

wobei

$$(9) \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(p) \ \dots \ \mathbf{y}(l-1)],$$

$$(10) \quad \hat{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \ \mathbf{CB} \ \mathbf{CAB} \ \dots \ \mathbf{CA}^{p-1}\mathbf{B}],$$

und

$$(11) \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \dots & \mathbf{u}(p-1) & \dots & \mathbf{u}(l-2) \\ & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(p-2) & \dots & \mathbf{u}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u}(0) & \dots & \mathbf{u}(l-p-1) \end{bmatrix}.$$

Mit $\hat{\mathbf{U}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}$ sind hier die verkürzten Versionen von \mathbf{U} und \mathbf{Y} gemeint, die nun die Dimensionen $m(p+1) \times l$ beziehungsweise $q \times m(p+1)$ haben. Die Länge l der Datenreihen ist hierbei größer als das Produkt $m(p+1)$ zu wählen (mit m als Anzahl der Eingänge und p als einem Skalar, sodass $\mathbf{A}^i \approx 0$ und damit auch $\mathbf{CA}^i\mathbf{B} \approx 0$ für $i \geq p$).

Auf die Einträge in $\hat{\mathbf{Y}}$ wird schließlich aus

$$(12) \quad \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{y}\hat{\mathbf{U}}^+$$

geschlossen, wobei $\hat{\mathbf{U}}^+$ die Pseudoinverse der Matrix $\hat{\mathbf{U}}$ ist. Die Gleichung (12) wird näherungsweise von den ersten p Markov-Parametern erfüllt. Der Approximationsfehler nimmt hierbei ab, je größer p gewählt wird. Ein Sonderfall ergibt sich, wenn es sich bei den Systemeingängen (den Einträgen in \mathbf{U}) ausschliesslich um diskrete Dirac-Impuls-Funktionen ("unit pulse") handelt: dann ist $\mathbf{u}(0)=1$ und alle weiteren Einträge in \mathbf{u} sind Null. Somit wird \mathbf{U} zur Einheitsmatrix und die Einträge in \mathbf{y} entsprechen bereits den Markov-Parametern \mathbf{Y} .

3.2.2.2. Eigensystem Realization Algorithm

Sind die Einträge in \mathbf{Y} (Markov-Parameter) ermittelt, kann die Systemidentifikation mit Hilfe des "Eigensystem Realization Algorithm" (ERA) erfolgen. Hierbei handelt es sich um einen Algorithmus, der zuerst die sogenannte Hankelmatrix aus den Markov-Parametern aufstellt, um sie anschließend zu zerlegen und aus dieser Zerlegung die Systemmatrizen des Zustandsraummodells zu extrahieren. Diese Methode ist ausführlich in [21] und [22] beschrieben, hier folgt eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Schritte.

Im ersten Schritt des ERA erfolgt die Aufstellung einer $qp \times mN$ Blockmatrix, der sogenannten Hankelmatrix, aus den Markov-Parametern. Hierbei sind p und N Skalare, so dass gilt $mN \geq qp$. Dabei handelt es sich um eine Matrix mit jeweils gleichen Einträgen auf ihren von links unten nach rechts oben verlaufenden Diagonalen. Sie ist bereits durch ihre erste Zeile und ihre letzte Spalte vollständig beschrieben. Um die Notation zu vereinfachen, werden die Markov-Parameter folgendermaßen definiert:

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{D}, \\ \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{CB}, \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{CAB}, \\ \mathbf{Y}_3 &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B}, \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}_k &= \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Die Hankelmatrix lautet dann wie folgt:

$$(14) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_N \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{Y}_p & \mathbf{Y}_{p+1} & \dots & \mathbf{Y}_{p+N+1} \end{bmatrix}.$$

Zu beachten ist hier, dass $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{D}$ nicht in der Hankelmatrix erscheint. Die Matrix $\mathbf{H}(l)$ hat den Rang n , wenn $pq \geq n$ ist. Anschließend findet eine Faktorisierung der Hankelmatrix mittels Singulärwertzerlegung ("Singular Value Decomposition", SVD) statt. Dies ist die Darstellung einer Matrix als Produkt dreier spezieller Matrizen, nämlich einer sogenannten unitären Matrix \mathbf{R} , einer reellen Matrix $\mathbf{\Sigma}$ und der Adjungierten der unitären Matrix \mathbf{S} :

$$(15) \quad \mathbf{H}(l) = \mathbf{R}\mathbf{\Sigma}\mathbf{S}^T,$$

wobei die Spalten von \mathbf{R} und \mathbf{S} orthonormal sind und es sich bei $\mathbf{\Sigma}$ um eine $n \times n$ Diagonalmatrix mit positiven Eigenwerten handelt. Die Systemmatrizen ergeben sich dann wie in [21] und [23] gezeigt wird aus:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{R}^T \mathbf{H}(1) \mathbf{\Sigma}^{1/2}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{S}^T \mathbf{E}_r, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{E}_s^T \mathbf{R} \mathbf{\Sigma}^{1/2}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{Y}_0. \end{aligned}$$

Diese Formulierung enthält die Matrizen \mathbf{E}_r und \mathbf{E}_s^T , die beide aus Einheitsmatrizen und Nullmatrizen bestehen:

$$(17) \quad \mathbf{E}_r^T = [\mathbf{I}_{r \times r} \quad \mathbf{O}_{r \times (s-1)r}]$$

und

$$(18) \quad \mathbf{E}_s^T = [\mathbf{I}_{s \times s} \quad \mathbf{O}_{s \times (r-1)s}].$$

Weiterhin wird die Matrix $\mathbf{H}(l)$ benötigt, welche lautet:

$$(19) \quad \mathbf{H}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{N+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{p+1} & \mathbf{Y}_{p+2} & \dots & \mathbf{Y}_{p+N} \end{bmatrix}.$$

Somit können die Systemmatrizen mit Hilfe des ERA ermittelt werden. Eine mögliche Erweiterung des Algorithmus stellt die Einführung eines Beobachters dar, wodurch das System aus Markov-Parametern zusätzlich komprimiert wird. Dieses Vorgehen ist im nächsten Abschnitt beschrieben.

3.2.2.3. Observer-Markov-Parameter

Oft, insbesondere bei leicht gedämpften Systemen, wird die Anzahl an Parametern p , die für die in Gleichung (8) angegebene Näherung benötigt wird, und dadurch auch die erforderliche Größe der Datenreihen (Länge l), so groß, dass die Matrix $\hat{\mathbf{U}}$ für die numerische Ermittlung der Pseudoinversen $\hat{\mathbf{U}}^+$ zu groß wird. Eine Möglichkeit, die hier Abhilfe schafft, ist die folgende algebraische Umformung, durch die das System unabhängiger Markov-Parameter verkleinert wird. Dadurch werden die Dimensionen der Hankelmatrix kleiner und der numerische Aufwand zur Durchführung der Systemidentifikation wird reduziert. Ausgehend von der diskreten Zustandsgleichung (2) wird auf der rechten Seite der Gleichung der Term $\mathbf{M}\mathbf{y}(k)$ addiert und subtrahiert. Dies führt zu

$$(20) \quad \mathbf{x}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(k),$$

$$(21) \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$

mit

$$(22) \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C},$$

$$(23) \quad \bar{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} + \mathbf{M}\mathbf{D} \quad -\mathbf{M}],$$

$$(24) \quad \mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}.$$

\mathbf{M} stellt hier eine beliebige Matrix der Dimension $n \times q$ dar, die so gewählt wird, dass sie die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ stabil macht. Bei Gleichung (20) handelt es sich nun um eine Beobachtungsgleichung ("observer equation"), wenn der Zustand $\mathbf{x}(k)$ als Beobachtungszustand betrachtet wird. Die Dimensionen der veränderten Systemmatrizen sind in BILD 4 grafisch dargestellt.

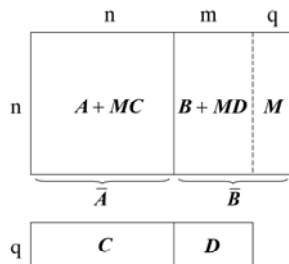


BILD 4. Systemmatrizen des um einen Beobachter erweiterten Zustandsraummodells

Die Eingangs-Ausgangs-Beziehung aus Gleichung (4) wird nun zu

$$(25) \quad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{Y}}\mathbf{V},$$

wobei

$$(26) \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \quad \mathbf{y}(1) \quad \mathbf{y}(2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(p) \quad \dots \quad \mathbf{y}(l-1)],$$

$$(27) \quad \bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{l-2}\bar{\mathbf{B}}]$$

und

$$(28) \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(l-2) \\ & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(p-2) & \dots & \mathbf{v}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(l-p-1) \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \mathbf{v}(0) \end{bmatrix}.$$

Da \mathbf{M} hier frei gewählt werden kann und in die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ eingeht, können auch die Eigenwerte von $\bar{\mathbf{A}}$ mit der Wahl von \mathbf{M} beeinflusst werden. So wird versucht, die Eigenwerte von $\bar{\mathbf{A}}$ in den Ursprung zu legen. Dadurch wird $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^i\bar{\mathbf{B}} \approx 0$ für $i \geq p$ und die Observer-Markov-Parameter können wie in Gleichung (8) ermittelt werden:

$$(29) \quad \mathbf{y} = \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{V}},$$

wobei

$$(30) \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}(0) \quad \mathbf{y}(1) \quad \mathbf{y}(2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(p) \quad \dots \quad \mathbf{y}(l-1)],$$

$$(31) \quad \hat{\mathbf{Y}} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^{p-1}\bar{\mathbf{B}}],$$

und

$$(32) \quad \hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \dots & \mathbf{u}(p) & \dots & \mathbf{u}(l-1) \\ & \mathbf{v}(0) & \mathbf{v}(1) & \dots & \mathbf{v}(p-1) & \dots & \mathbf{v}(l-2) \\ & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(p-2) & \dots & \mathbf{v}(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & \mathbf{v}(0) & \dots & \mathbf{v}(l-p-1) \end{bmatrix}.$$

Bei $\hat{\mathbf{V}}$ und $\hat{\mathbf{Y}}$ handelt es sich um verkürzte Versionen von \mathbf{V} und $\bar{\mathbf{Y}}$ und es gilt näherungsweise $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{y}\hat{\mathbf{V}}^+$ für die ersten p (Observer-)Markov-Parameter, wobei $\hat{\mathbf{V}}^+$ wiederum die Pseudoinverse von $\hat{\mathbf{V}}$ ist. Sind die Observer-Markov-Parameter in $\hat{\mathbf{Y}}$ ermittelt, wird aus ihnen auf die Markov-Parameter des Systems geschlossen. Zuvor werden die Elemente der Matrix $\hat{\mathbf{Y}}$ folgendermaßen definiert:

$$(33) \quad \hat{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{Y}}_{-1} \quad \bar{\mathbf{Y}}_0 \quad \bar{\mathbf{Y}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{Y}}_{p-1}],$$

mit

$$(34) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_k &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} \\ &= [\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})^k (\mathbf{B} + \mathbf{M}\mathbf{D}) \quad -\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})^k \mathbf{M}] \\ &= [\bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)} \quad \bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)}], \quad k=0,1,2,\dots, \end{aligned}$$

$$(35) \quad \bar{\mathbf{Y}}_{-1} = \mathbf{D}.$$

Der Markov-Parameter $\mathbf{C}\bar{\mathbf{B}}$ lässt sich aus Gleichung (34) einfach ableiten:

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{C}(\mathbf{B} + \mathbf{M}\mathbf{D}) - (\mathbf{C}\mathbf{M})\mathbf{D} \\ &= \bar{\mathbf{Y}}_0^{(1)} + \bar{\mathbf{Y}}_0^{(2)}\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Um auf eine Formulierung für den darauf folgenden Markov-Parameter $\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}$ zu schließen, wird der erste Eintrag in $\bar{\mathbf{Y}}_1$ betrachtet:

$$(37) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_1^{(1)} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})(\mathbf{B} + \mathbf{M}\mathbf{D}) \\ &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{C}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})\mathbf{M}\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Durch einfaches Umformen ergibt sich schließlich

$$(38) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{CAB} \\ &= \bar{\mathbf{Y}}_1^{(1)} + \bar{\mathbf{Y}}_0^{(2)} \bar{\mathbf{Y}}_0 + \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Analog dazu wird für den Markov-Parameter $\mathbf{CA}^2\mathbf{B}$ das Produkt $\bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)}$ herangezogen:

$$(39) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)} &= \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{MC})^2(\mathbf{B} + \mathbf{MD}) \\ &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B} + \mathbf{CMCA}\mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{MC})\mathbf{MCB} \\ &\quad + \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{MC})^2\mathbf{MD} \end{aligned}$$

und daraus:

$$(40) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \\ &= \bar{\mathbf{Y}}_2^{(1)} + \bar{\mathbf{Y}}_0^{(2)} \mathbf{Y}_1 + \bar{\mathbf{Y}}_1^{(2)} \mathbf{Y}_0 + \bar{\mathbf{Y}}_2^{(2)} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Beziehung zwischen den Observer-Markov-Parametern und den Markov-Parametern des Systems lautet:

$$(41) \quad \mathbf{Y}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k^{(1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\mathbf{Y}}_i^{(2)} \mathbf{Y}_{k-i-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k^{(2)} \mathbf{D}.$$

Bei Bedarf kann aus den Observer-Markov-Parametern auch auf die Beobachtungsmatrix \mathbf{M} aus Gleichung (20) geschlossen werden. Hierzu finden sich ausführliche Informationen in [24]. Zusätzlich ist dort auch das Vorgehen für Rechnungen erläutert, in denen die triviale Anfangsbedingung nicht erfüllt ist ($\mathbf{x}(0) \neq 0$).

Zusammenfassend wird die Anzahl der unabhängigen Markov-Parameter durch die Einführung eines Beobachters verringert. Die Hankelmatrix wird dadurch verkleinert und der numerische Aufwand zur Systemidentifikation mit Hilfe des ERA reduziert. Außerdem wird die Stabilität des Systems durch den eingeführten Beobachter erhöht [24].

3.2.3. Anwendung auf instationäre Luftkräfte

Nach der theoretischen Beschreibung der Systemidentifikation mit dem Zustandsraummodell wird nun dessen Anwendung auf die Ermittlung instationärer Luftkräfte unter Nutzung der SOCIT-Toolbox [17] erläutert. Die Idee bei diesem Verfahren ist es, aus instationären Antworten des Originalsystems auf bestimmte Anregungssignale ein Modell aufzustellen, das dann genutzt werden kann, um linearisierte Antworten des Systems auf beliebige Eingänge zu ermitteln [16]. Dabei werden die instationären Antworten über Markov-Parameter in den Zustandsraum transformiert, so dass die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} eines Zustandsraummodells ermittelt werden können. Dieses Zustandsraummodell stellt dann das eigentliche ROM dar.

Bei dem Originalsystem, das mit speziellen Eingängen angeregt wird, handelt es sich um einen Strömungslöser, wobei in diesem Fall das vollständige TUM-AER Euler-Verfahren verwendet wird. Es kann bei entsprechender Anregung nichtlineare instationäre GAF liefern. Zu beachten ist, dass alle Rechnungen am Originalsystem für die gleiche Flügelgeometrie und die gleiche Machzahl durchgeführt werden müssen, wenn das später erzeugte ROM genau für diese Konfiguration gültig sein soll.

Als Eingänge, mit denen das Originalsystem angeregt wird, werden in der Regel Impulsfunktionen oder Sprungfunktionen verwendet. Diese Funktionen haben den Vorteil, dass sie den gesamten Frequenzbereich eines Systems anregen [25]. Die Impulsfunktion wird in Diskreten als Impulsfolge bezeichnet. Sie entspricht dem Dirac-Impuls zeitkontinuierlicher Signale und lautet:

$$(42) \quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

Die zur Impulsfolge analoge Sprungfolge lautet:

$$(43) \quad \varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}.$$

Die Verläufe der beiden Funktionen sind in BILD 5 dargestellt.

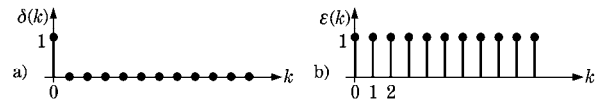


BILD 5. Diskrete Anregungssignale: a) Impulsfolge, b) Sprungfolge

Bei der Ermittlung von GAF handelt es sich um modale Impuls- oder Sprungfunktionen. Als Antworten auf die jeweiligen Anregungen werden die Zeitverläufe der instationären Luftkräfte beziehungsweise der GAF aufgezeichnet, vgl. BILD 6. Sind die Eingangs-Ausgangs-Paare aus dem Originalsystem ermittelt, kann die Systemidentifikation mit Hilfe des in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Verfahrens durchgeführt werden.

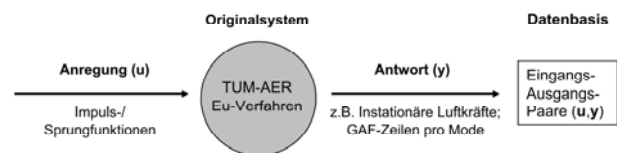


BILD 6. Datensammlung durch Anregung des Originalsystems

Werden bei der Anregung des Systems ausschließlich Impulsfunktionen verwendet, ist der ERA-Algorithmus ausreichend um das Zustandsraummodell zu bestimmen. Für andere Eingangsfunktionen wird das erweiterte Verfahren (mit vorheriger Ermittlung der System-Markov-Parameter und anschließender Systemidentifikation mit dem ERA-Algorithmus) genutzt. Diese wichtigsten Schritte zur Erstellung des aerodynamischen ROMs sind in BILD 7 nochmals grafisch dargestellt.

Eine Verifizierung des Modells kann dadurch erfolgen, dass weitere Rechnungen mit neuen Eingängen sowohl mit dem Originalverfahren als auch mit dem identifizierten Zustandsraummodell durchgeführt werden. Werden die Originalausgänge und die vom Zustandsraummodell ermittelten Ausgänge dann miteinander verglichen, kann eine Aussage über die Qualität des ROMs getroffen werden.

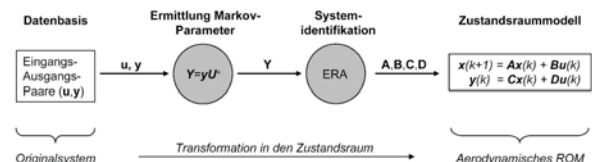


BILD 7. Anwendung des Zustandsraummodells zur Ermittlung instationärer Luftkräfte (s.a. [16])

Das ermittelte Zustandsraummodell kann dann theoretisch genutzt werden, um für beliebige Eingänge zugehörige Ausgänge zu bestimmen. Der große Vorteil ist nun, dass

der Ausgang, zum Beispiel in Form der GAF, über das ROM deutlich schneller ermittelt werden kann, als es in einer Rechnung mit dem Originalverfahren (hier dem Euler-Verfahren) dauern würde. Weiterhin wird in [25] beschrieben, dass das aerodynamische Zustandsraummodell sehr gut mit einem strukturellen Zustandsraummodell für die Behandlung aeroelastischer und aeroservoelastischer Probleme gekoppelt werden kann. Für weitere Details der Umsetzung der Methode kann die angegebene weiterführende Literatur sowie [26] herangezogen werden, wo das zugehörige Programmpaket und verschiedene Testrechnungen zur Systemidentifikation vorgestellt werden.

4. BERECHNUNGSFÄLLE

Zur Validierung des ROM-Verfahrens werden zuerst einfache generische Testfälle aus der Strukturdynamik (Einfreiheitsgradsystem) untersucht [26]. Anschließend werden Berechnungen für fluidmechanische Problemstellungen durchgeführt, von denen die Nickschwingung einer ebenen Platte hier vorgestellt wird. Zusätzlich wird das Verfahren auf einen Standardtestfall in der Aeroelastik, die Schwingung des AGARD 445.6 Flügels in seinen Eigenmoden, angewendet, um den zeitlichen Verlauf der generalisierten Luftkräfte mit dem Zustandsraummodell abzubilden.

4.1. Nickschwingung einer ebenen Platte

Die Nickschwingung einer ebenen Platte stellt eine von deren Starrkörperformen dar [27]. Zur Generierung einer Datenbasis wird zuerst eine Referenzrechnung mit dem TUM-AER Euler-Verfahren durchgeführt. Die Drehung der Platte mit der Länge $l=1$ erfolgt um den Punkt $(x=0,5; y=0)$, siehe BILD 8.

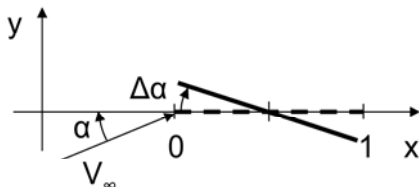


BILD 8. Geometrie und Anströmverhältnisse der ebenen Platte

Im ersten Schritt wird eine stationäre Rechnung bei einem Anstellwinkel von $\alpha=0^\circ$ für ein unausgelenktes Netz durchgeführt. Darauf "aufsetzend" wird eine instationäre Rechnung für ein um den Winkel $\Delta\alpha=0,1^\circ$ gedrehtes Netz angeschlossen. Als Anregungssignal dient dabei eine Impulsfunktion, wobei der Zeitschritt so gewählt wird, dass eine harmonische Schwingung mit einer reduzierten Frequenz von $k_{red}=1$ mit 100 Werten pro Periode aufgelöst würde. Als Impulsantwort auf die Anstellwinkeländerung wird eine Datenreihe für den Normalkraftbeiwert C_Y bei einer Anströmmachzahl von $Ma_\infty=0,5$ verwendet. Sie hat eine Länge von 2496 Einträgen. Die mit dem Algorithmus ermittelte Systemordnung unter Verwendung von $p=1500$ Observer-Markov-Parametern beträgt $n=1483$.

Die Ergebnisse für diese Systemidentifikation stimmen bei Anregung des identifizierten Systems durch die Impulsfunktion perfekt mit denen des Originalsystems überein, vgl. BILD 9. Soll der mit der Systemidentifikation verbundene Rechenaufwand reduziert werden, wäre die Verwen-

dung einer kleineren Anzahl an Observer-Markov-Parametern eine Option.

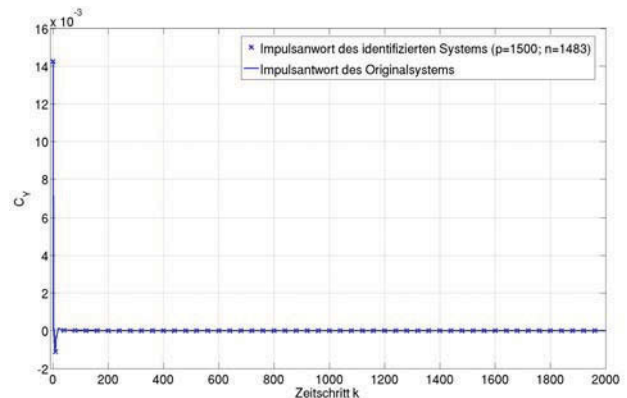


BILD 9. Impulsantwort des originalen und des mit 'okid' identifizierten Systems für den Normalkraftbeiwert C_Y als Funktion des Zeitschritts k

Jedoch darf die Anzahl der Parameter nicht zu gering gewählt werden: für Werte von $p < 200$ wird das identifizierte Systemverhalten bereits in der Abbildung der Impulsantwort selbst fehlerhaft.

Ein identifiziertes System sollte vor allem auch in der Lage sein, das Antwortverhalten des Originalsystems bei "neuen" nicht für die Systemidentifikation verwendeten Eingängen korrekt wiederzugeben. In BILD 10 wird dies für die ebene Platte am Beispiel einer Sinusfunktion verdeutlicht. Diese harmonische Schwingung im Anstellwinkel hat eine reduzierte Frequenz $k_{red}=1,0$ und eine Amplitude von $\Delta\alpha=0,1^\circ$. Das *ausschließlich* anhand der Impulsanregung/Impulsantwort identifizierte ROM (in diesem Beispiel für $p=1500$) liefert auch hier überzeugende Ergebnisse. Der maximale Fehler der identifizierten Sinusantwort, der im Vergleich zur originalen Sinusantwort gemacht wird, beträgt bezogen auf die jeweilige maximale Amplitude 2,3%.

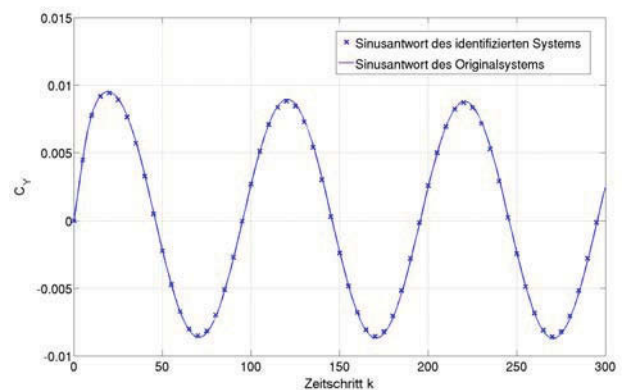
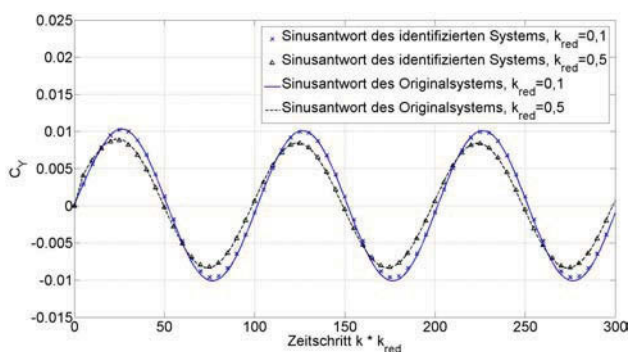


BILD 10. Nickschwingung der ebenen Platte: Sinusantwort des originalen und des mit dem Impuls identifizierten Systems für den Normalkraftbeiwert C_Y als Funktion des Zeitschritts k bei einer reduzierten Frequenz $k_{red}=1$

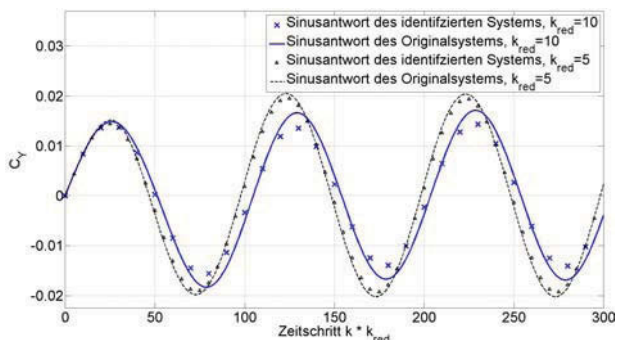
Auf Basis des identifizierten Systems werden nun außerdem die Antworten auf harmonische Schwingungen mit weiteren reduzierten Frequenzen (hier für $k_{red} = 0,1; 0,5; 5; 10$) untersucht. Die Ergebnisse sind in BILD 11 für die beiden kleineren und in BILD 12 für die beiden größeren reduzierten Frequenzen dargestellt. Für die Frequenzen

$k_{red}=0,1$ und $k_{red}=0,5$ wird das Antwortverhalten ebenso sehr gut abgebildet. Der maximale gleitende Fehler bezogen auf die jeweilige maximale Amplitude beträgt hier 4,5% für $k_{red}=0,1$ beziehungsweise 2,6% für $k_{red}=0,5$.

Bei den beiden größeren reduzierten Frequenzen machen sich die Effekte der gewählten zeitlichen Diskretisierung zunehmend bemerkbar: die Darstellung der beiden harmonischen Schwingungen wird "eckiger", da der Zeitschritt für die Ergebnisse derselbe ist wie der aus der Systemidentifikation. Dadurch stehen zur Darstellung des Ergebnisses für $k_{red}=5$ nur noch 20 und für $k_{red}=10$ lediglich 10 Datenwerte für eine Periode zur Verfügung. Auch die zunehmenden Abweichungen von den Ergebnissen des Originalsystems sind damit zu erklären: für $k_{red}=5$ beträgt der maximale Fehler 6 Prozent, für $k_{red}=10$ 16,5 Prozent. Für das Erreichen genauerer Ergebnisse müsste hier die zeitliche Diskretisierung bereits bei der Systemidentifikation feiner gewählt werden.



a) $k_{red}=0,1$ bzw. $k_{red}=0,5$



b) $k_{red}=5$ bzw. $k_{red}=10$

BILD 11. Nickschwingung der ebenen Platte: Sinusantwort des originalen und des mit dem Impuls identifizierten Systems für den Normaldruckbeiwert C_Y als Funktion des mit k_{red} multiplizierten Zeitschritts k für die reduzierten Frequenzen $k_{red}=0,1; 0,5; 5; 10$

4.2. Eigenschwingung einer Tragfläche am Beispiel des AGARD 445.6 Flügels

Bei der elastischen Schwingung eines Tragflügels in seinen Eigenformen am Beispiel des AGARD 445.6 Flügels werden als Ausgänge die Einträge in die generalisierte Luftkraftmatrix Q betrachtet (vgl. Abschnitt 2). Bei dem AGARD 445.6 Flügel handelt es sich um ein (Referenz-) Flügelmodell, das im Bereich der Aeroelastik extensiv verwendet wird, um numerische Verfahren zu validieren [28], [8]. Die ersten vier Eigenformen des AGARD 445.6 Flügels wurden bereits in BILD 2 gezeigt.

Für die Berechnungen mit dem TUM-AER Euler-Verfahren wird ein 1-Block-Netz mit einer C-H-Topologie verwendet, vgl. BILD 12. Dieser Netzblock verfügt über $176 \times 64 \times 40$ Zellen und die Anzahl der Oberflächenzellen beträgt 128×48 . Die "Off-body"-Distanz beträgt 0,01% der Wurzeltiefe. Der Fernfeldabstand beträgt das Zehnfache der Wurzeltiefe in x- und y-Richtung sowie das Elffache der Wurzeltiefe in z-Richtung.

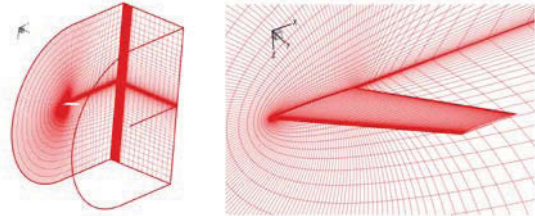


BILD 12. Verwendetes Rechennetz des AGARD 445.6 Flügels

In diesem Beispiel wird als Anregungssignal die Schwingung des Flügels in seinen Eigenmoden betrachtet, welche in generalisierten Koordinaten ausgedrückt wird. Die Anregung des Originalsystems erfolgt somit mit modalen Impuls- oder Sprungfunktionen. Diese Auslenkung wird in das Originalsystem über instationäre Randbedingungen (Netzauslenkung) eingebracht. Entsprechend der Annahme der Amplitudenlinearisierung (vgl. Abschnitt 3.2) werden nur kleine modale Auslenkungen in den Anregungssignalen betrachtet. In diesem Beispiel beträgt die maximale Auslenkung 5% der Halbspannweite. Die Anregung erfolgt dabei im ersten Schritt einzeln, das heißt Mode für Mode. Für n betrachtete Moden eines Flügels werden somit n Rechnungen am Originalsystem benötigt. Als Ausgänge werden, wie bereits erwähnt, die generalisierten Luftkräfte (GAF) bei einer Anströmmachzahl von $Ma_\infty=0,9$ betrachtet. Bei den GAF handelt es sich um die jeweilige Zeile der GAF-Matrix Q , die mit der angeregten Eigenform korrespondiert. Somit werden für die modale Anregung in einer Eigenform n instationäre aerodynamische Antworten in allen betrachteten Moden ermittelt, die die Einträge in der jeweiligen GAF-Zeile darstellen. Schließlich ergibt sich nach n Anregungen des Originalsystems die $n \times n$ GAF-Matrix. Die Systemidentifikation wird in diesem Fall mit orthogonalen Funktionen, hier den sogenannten Walsh-Funktionen, durchgeführt. Dieses Vorgehen wird im Hinblick auf eine mögliche Erweiterung gewählt, die in [16] vorgestellt wird: mit den orthogonalen Funktionen ist es möglich, eine simultane Anregung des Originalsystems durchzuführen. Simultan bedeutet in diesem Fall, dass mehrere Eigenmoden im gleichen Rechengang am Originalsystem angeregt werden. Die ersten vier Walsh-Funktionen sind in BILD 12 dargestellt.

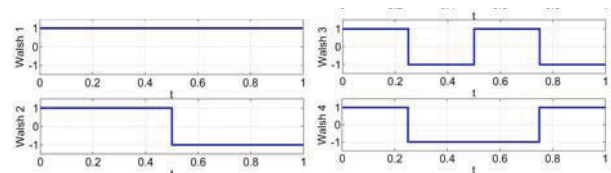


BILD 13. Walshfunktionen 1 bis 4

Das betrachtete System verfügt in diesem Beispiel über zwei Eingangs- und zwei Ausgangsgrößen. Der Eingangsvektor u besteht aus den generalisierten Koordinaten q_1 und q_2 . Im Ausgangsvektor y befinden sich die korrespondierenden Einträge in die GAF-Matrix. Die System-

identifikation findet mit zwei Datenreihen statt, bei denen jeweils eine Eigenform separat angeregt wird: zuerst erfolgt eine Anregung der ersten Eigenform mit der ersten Walsh-Funktion und die zweite Eigenform wird nicht angeregt; anschließend wird die zweite Eigenform mit der ersten Walsh-Funktion angeregt und die erste Eigenform bleibt unangeregt. Es sind somit zwei Eulerrechnungen bei zwei betrachteten Moden notwendig. Bei n betrachteten Moden wären analog dazu n Eulerrechnungen durchzuführen und n Datenreihen bei der Systemidentifikation zu verwenden. Als zugehöriger Ausgang werden die Einträge Q_{11} und Q_{12} für die Anregung der ersten Eigenform beziehungsweise Q_{21} und Q_{22} für die zweite Eigenform verwendet. Diese beschriebenen Datenreihen werden beide gleichzeitig als Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{y} in die Systemidentifikation gegeben.

Da die Anzahl der Markov-Parameter so zu wählen ist, dass die Bedingung $mp < l$ erfüllt wird, und die Länge der Datenreihen in diesem Fall $l=2500$ beziehungsweise die Anzahl der Eingänge $m=2$ entspricht, wird hier $p=1000 < 1250$ gewählt.

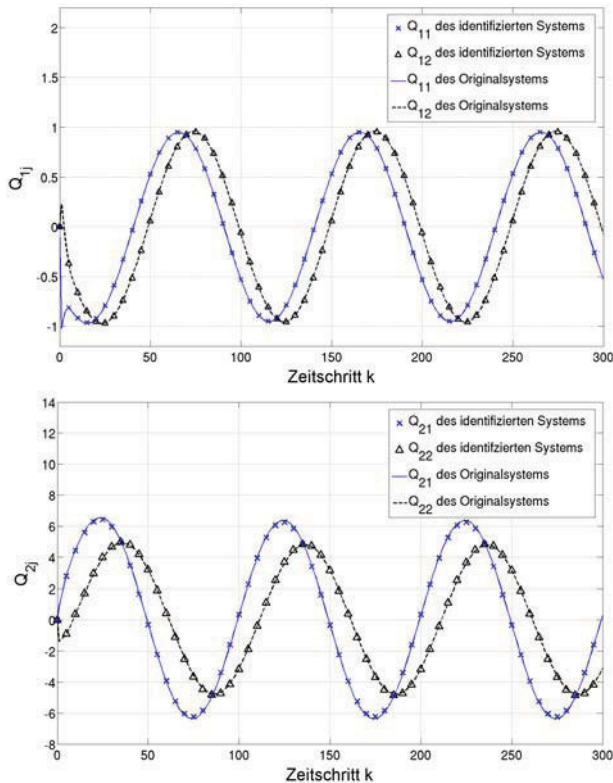


BILD 14. AGARD 445.6 Flügel: Antwort des originalen und des identifizierten Systems bezüglich der Luftkraftmatrizeinträge Q_{ij} auf eine harmonische Eigenschwingung mit $k_{red}=1$ bei $Ma_\infty=0,9$

Als neue Eingänge werden wiederum harmonische Schwingungen getestet, mit denen beide Moden separat angeregt werden. Die Ergebnisse für die reduzierten Frequenzen $k_{red}=1$ und $k_{red}=1,276$ sind in BILD 14 und BILD 15 dargestellt und stimmen sehr gut mit den direkten Ergebnissen aus dem Euler-Verfahren überein.

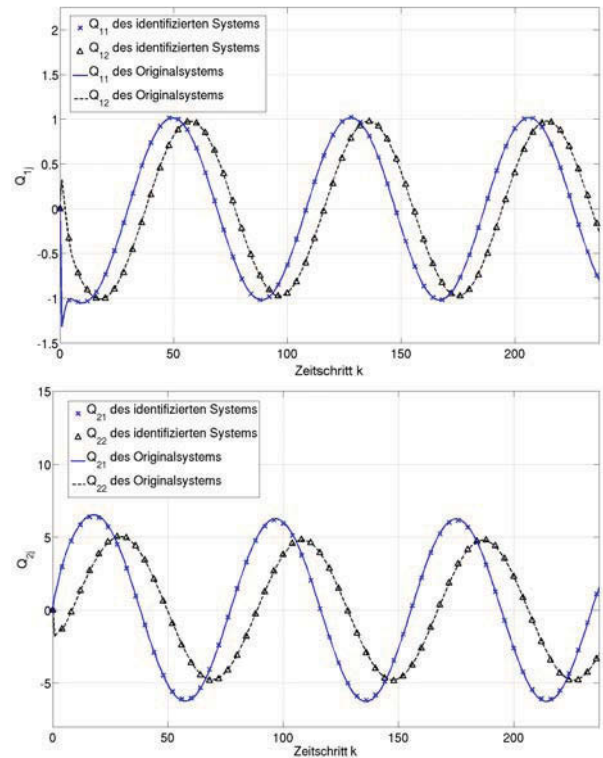


BILD 15. AGARD 445.6 Flügel: Antwort des originalen und des identifizierten Systems bezüglich der Luftkraftmatrizeinträge Q_{ij} auf eine harmonische Eigenschwingung mit $k_{red}=1,276$ bei $Ma_\infty=0,9$

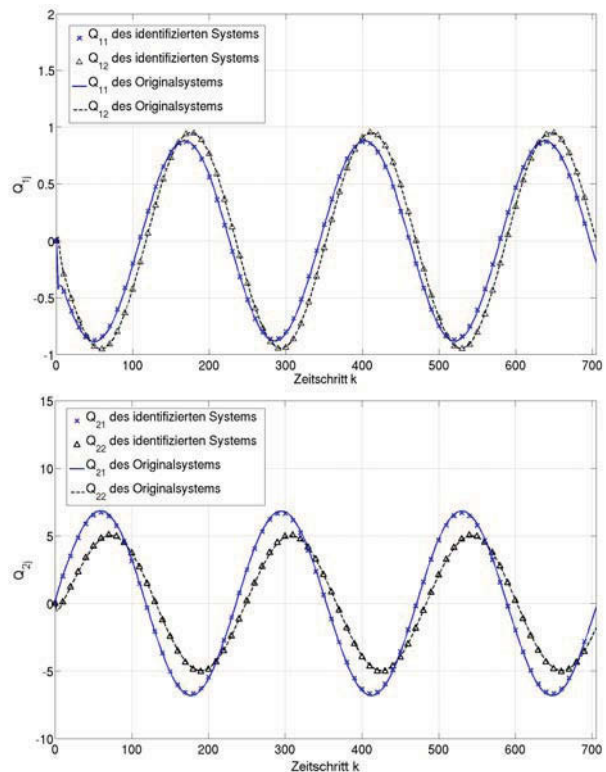


BILD 16. AGARD 445.6 Flügel: Antwort des originalen und des identifizierten Systems bezüglich der Luftkraftmatrizeinträge Q_{ij} auf eine harmonische Eigenschwingung mit $k_{red}=0,425$ bei $Ma_\infty=0,9$

Anschließend werden auch kleinere reduzierte Frequenzen betrachtet. Während die Übereinstimmung der Ergebnisse für $k_{red}=0,425$ sehr gut ist, vgl. BILD 16, wird bei weiter abnehmender reduzierter Frequenz beobachtet, dass die Lösung nach einigen Perioden zunehmend von der korrekten Antwort divergiert [26]. Die Länge des verwendeten Datensatzes mit 2500 Zeitschritten kann hier zu kurz gewählt sein, um das Systemverhalten für längere Zeiträume mit einer Anzahl von Zeitschritten $k>2500$ zu betrachten.

4.3. Recheneffizienz des ROM

Es erfolgt nun eine kurze Betrachtung zur Recheneffizienz, um zu verdeutlichen, wie das vorgestellte ROM-Verfahren genutzt werden kann und wo es für die Ermittlung instationärer Luftkräfte im Rahmen der aeroelastischen Analyse Einsparpotential im Hinblick auf die Rechenzeit birgt. Dafür wird hier die Ermittlung der generalisierten Luftkräfte betrachtet.

In einer aeroelastischen Analyse werden jeweils verschiedene Eigenmoden, reduzierte Frequenzen und Machzahlen betrachtet. Daraus werden für n betrachtete Moden, o betrachtete Frequenzen und p betrachtete Machzahlen $n \cdot o \cdot p$ verschiedene Parameterkombinationen nötig, für die die generalisierten Luftkräfte bestimmt werden müssen. Wird dabei zur Ermittlung der Luftkräfte beispielsweise das TUM-AER Euler-Verfahren eingesetzt, ist für jede dieser Kombinationen eine Eulerrechnung durchzuführen. Dies kann bei einer Rechenzeit von etwa sechs bis neun Stunden (Rechenplattform: LRZ Linux-cluster, 64bit AMD Opteron Prozessoren, 8 CPUs zu je 2,6 GHz), abhängig von Parametern wie der jeweiligen reduzierten Frequenz und der Machzahl, zu einem beachtlichen Zeitaufwand führen. Hier kann das ROM sinnvoll zur Reduktion des Rechenaufwands eingesetzt werden: ein bei einer bestimmten Machzahl und für eine bestimmte Mode identifiziertes System kann einen ganzen Frequenzbereich abdecken. Zwar sind für die Identifikation der jeweiligen Systeme noch mindestens $n \cdot p$ Eulerrechnungen für n Moden und p Machzahlen erforderlich, aber der Aufwand verbunden mit den verschiedenen Frequenzen ist deutlich geringer. Der numerische Aufwand zur Durchführung der Systemidentifikation in MATLAB und der auf dem identifizierten System basierenden Rechnungen für die verschiedenen, neuen Frequenzen ist dabei von deutlich kleinerer Größenordnung als der bei den Euler-Rechnungen. So wird zum Beispiel für eine Systemidentifikation mit einer Datenreihe der Länge $l=1000$ und einer Anzahl der Markov-Parameter von $p=900$ auf einem einfachen Desktop-PC (1,6 GHz Prozessor, 32bit, 1 GB RAM) eine Rechenzeit von etwa fünf Minuten benötigt. Die Neuanregung des identifizierten Systems zur Ermittlung neuer Systemausgänge beansprucht lediglich eine Rechenzeit von einigen Sekunden. In Anbetracht dessen wird außerdem eine feinere Einteilung der Rechnungen im Frequenzbereich mit sehr geringem Zusatzaufwand möglich. Dennoch ist eine allgemeingültige Aussage zum Rechenaufwand schwierig, da dieser von mehreren Parametern wie der gewählten zeitlichen Diskretisierung oder der Anzahl der verwendeten Markov-Parameter beeinflusst wird.

5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Die Zustandsraumformulierung für lineare dynamische Systeme basiert auf der Identifikation von (Observer-) Markov-Parametern aus Impulsantworten oder Sprungantworten des Originalsystems. Mit Hilfe der Markov-Parameter werden über eine Singulärwertzerlegung die Systemmatrizen des Zustandsraummodells ermittelt. Dieses Modell bildet potentiell das Systemverhalten des Originalsystems und somit dessen Antwort auf beliebige zeitliche Verläufe von Anregungsfunktionen ab. Somit können nach der Identifikation an dem ermittelten Zustandsraummodell Berechnungen für neue Anregungen durchgeführt werden, die im Vergleich zu Simulationen am Originalsystem mit deutlich reduziertem Rechenaufwand einhergehen.

Die Ergebnisse aus der Anwendung der Methodik sind dabei überzeugend: bei geeigneter Wahl der Eingangsparameter liefert das lediglich mit Impuls- beziehungsweise Sprungantworten identifizierte ROM korrekte Ergebnisse für zahlreiche dem System bisher „unbekannte“ Zeitverläufe der Eingangsfunktionen. Natürliche Grenzen sind dem Verfahren dabei durch die zeitliche Diskretisierung gesetzt.

Für die Ermittlung der instationären Luftkräfte im Rahmen der aeroelastischen Analyse bietet sich damit ein Einsparpotential im Hinblick auf die Rechenzeit, da von einem für eine bestimmte Konfiguration ermittelten System ein ganzer Frequenzbereich abgedeckt wird. Es bleibt aber zu berücksichtigen, dass die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse und der zu betreibende Rechenaufwand bei dieser Methode von verschiedenen Parametern abhängen, die in Bezug auf den jeweiligen Anwendungsfall variieren können. Daher wäre als Folgeuntersuchung eine ausführlichere, abwägende Betrachtung insbesondere im Hinblick auf die Wahl der Anzahl der Markov-Parameter und der Feinheit der zeitlichen Diskretisierung, zum Beispiel am Fall des AGARD 445.6 Flügels, sinnvoll.

Eine interessante mögliche Erweiterung des vorgestellten ROM-Verfahrens stellt die Umsetzung einer simultanen Anregung mehrerer Eigenmoden des Originalsystems mit Hilfe von orthogonalen Funktionen dar, wie sie in [29] und [16] beschrieben ist. Dadurch würde der numerische Rechenaufwand, der zum Aufbau einer Datenbasis mit Informationen aus dem Originalsystem benötigt wird, auf eine einzige Rechnung am Originalsystem reduziert.

6. DANKSAGUNG

Ein herzlicher Dank gilt Herrn PD Dr.-Ing. habil. Christian Breitsamter vom Lehrstuhl für Aerodynamik der TU München für die Betreuung der Diplomarbeit, aus welcher der vorliegende Beitrag hervorgegangen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. Breitsamter. *Instationäre Aerodynamik I*. Vorlesungsmanuskript WS 2008/2009, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, 2008.
- [2] E. H. Dowell, H. C. Curtiss Jr., R. H. Scanlan and F. Sisto. *A Modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [3] E. Kreiselmaier. *Berechnung instationärer Tragflügelumströmungen auf der Basis der zeitlinearisierten Eulergleichungen*. PhD thesis, TU München, Lehrstuhl für Fluidmechanik, 1998.

- [4] M. Iatrou, A. Allen, A. Pechloff, C. Breitsamter, and B. Laschka. Small Disturbance Euler/Navier-Stokes Computations for Delta Wing Flap Oscillations. In *Flow Induced Unsteady Loads and the Impact on Military Applications*, pages 16-1 – 16-12, Meeting Proceedings RTO-MP-AVT-123, Paper 16, Neuilly-sur Seine, France, 2005.
- [5] D. Fleischer. Weiterentwicklung des TUM-AER Euler-Verfahrens: Anwenderschulung zum TUM-AER Euler-Verfahren und AIC-Matrizen. *Forschungsbericht FLM-2008/32*, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, 2008.
- [6] D. Fleischer and C. Breitsamter. Weiterentwicklung des TUM-AER Euler-Verfahrens: ROM-Methode 1, *Forschungsbericht FLM-2008/32*, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, 2008.
- [7] ZAERO V8.2 *Theoretical Manual*. ZONA 02-12.04, Zona Technology Inc., Scottsdale, AZ, March 2008.
- [8] W. A. Silva. Recent Enhancements to the Development of CFD-Based Aeroelastic Reduced-Order Models. In *48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, 2007-2051, Honolulu, HI, April 23-26, 2007.
- [9] E. M. Lee-Rausch and J. T. Batina. Wing Flutter Boundary Prediction Using Unsteady Euler Aerodynamic Method. *Journal of Aircraft*, 32(2): 416-422, 1995.
- [10] D. E. Raveh. Identification of Computational-Fluid-Dynamics Based Unsteady Aerodynamic Models for Aeroelastic Analysis. *Journal of Aircraft*, 41(3): 620-632, Mai - Juni 2004.
- [11] D. E. Raveh and M. Karpel. CFD-Based Reduced-Order Models for Flutter Prediction. *KDC Report 2004*, March 2007.
- [12] W. F. Ballhaus and P. M. Goorjian. Computation of Unsteady Transonic Flows by Indicial Methods. *AIAA Journal*, 16(2): 117-124, 1978.
- [13] D. E. Raveh. Reduced-Order Models for Nonlinear Unsteady Aerodynamics. *AIAA Journal*, 39(8): 1417-1429, August 2001.
- [14] D. E. Raveh, Y. Levy, and M. Karpel. Aircraft Aeroelastic Analysis and Design Using CFD-Based Unsteady Loads. In *A Collection of Technical Papers of the 41st AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Forum, AIAA-00-1325. AIAA, April 2000.
- [15] D. E. Raveh, Y. Levy, and M. Karpel. Efficient Aeroelastic Analysis Using Computational Unsteady Aerodynamics. *Journal of Aircraft*, 38(3):547{556, 2001.
- [16] W. A. Silva, V. N. Vatsa, and R. T. Biedron. Development of Unsteady Aerodynamic and Aeroelastic Reduced-Order Models Using the FUN3D Code. *IFASD-2009-030*, 2009.
- [17] J.-N. Juang, L. G. Horta, and M. Phan. System/Observer/Controller Identification Toolbox. *NASA TM-107566*, 1992.
- [18] M. Karpel and T. H. Sherwood. Physically Weighted Approximations of Unsteady Aerodynamic Forces Using the Minimum-State Method. *NASA-TP-2776*, July 1988.
- [19] S. H. Tiffany and W. M. Adams Jr. Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation Methods for Unsteady Aerodynamic Forces. *NASA-TP-2776*, July 1988.
- [20] H. Baier. *Modellbildung und Simulation*. Vorlesungsmanuskript SS 2008, Lehrstuhl für Leichtbau, Technische Universität München, 2008.
- [21] M. Q. Phan, L. G. Horta, and R. W. Longman. Identification of Linear Systems by an Asymptotically Stable Observer. *NASA-TP-3164*, 1992.
- [22] J.-N. Juang and R. S. Pappa. An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction. *Journal of Guidance*, 8(5): pp. 620-627, 1984.
- [23] J.-N. Juang and M. Q. Phan. *Identification and Control of Mechanical Systems*. Cambridge University Press, 2001.
- [24] J.-N. Juang, M. Phan, L. G. Horta, and R. W. Longman. Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments. *NASA-TM-104069*, June 1991.
- [25] W. A. Silva and R. E. Bartels. Development of Reduced-Order Models for Aeroelastic Analysis and Flutter Prediction Using the CFL3DV6.0 Code. *Journal of Fluids and Structures*, (19): pp. 729-745, 2004.
- [26] A. Kölzsch. *Numerische Verfahren reduzierter Ordnung zur Ermittlung instationärer Luftkräfte*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, 2009.
- [27] C. Breitsamter. *Instationäre Aerodynamik II*. Vorlesungsmanuskript SS 2009, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, 2009.
- [28] E. C. Yates. AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response I-Wing 445.6, *AGARD Report 765*, North Atlantic Treaty Organization, Group for Aerospace Research and Development, 1988.
- [29] W. A. Silva. Simultaneous Excitation of Multiple-Input/Multiple-Output CFD-Based Unsteady Aerodynamic Systems. *Journal of Aircraft*, 45(4): pp. 1267-1274, 2008.