

# ENTWICKLUNG EINES STRUKTURMODELLS ZUR VORAUSLEGGUNG MODERNER FLUGZEUGRÜMPFE IM NACHBEULBEREICH

Dipl.-Ing. M. Quatmann

Institut für Leichtbau, RWTH Aachen

Wüllnerstr. 7, 52062 Aachen, Deutschland

Prof. Dr.-Ing. H.-G. Reimerdes

Institut für Leichtbau, RWTH Aachen

Wüllnerstr. 7, 52062 Aachen, Deutschland

Dr.-Ing. L. Wang

Department of Global FEM and Internal Loads, Airbus Operations GmbH

Kreetslag 10, 21129 Hamburg, Germany

## Zusammenfassung

Moderne Flugzeugrumpfe werden zunehmend aus Faserverbundwerkstoffen gefertigt, um Strukturmasse zu sparen. Dies erschwert die erforderliche Strukturauslegung und -berechnung, vor allem im Hinblick auf eine dem Kraftfluss angepasste fasergerechte Auslegung. Insbesondere zur Strukturoptimierung in der Vorauslegungsphase von Flugzeugrumpfen werden schnelle mathematische Modelle zur Berechnung der Spannungen und Verformungen benötigt, welche bei geringer Rechenzeit eine hohe Genauigkeit der Berechnung und eine Analyse des Nachbeulbereichs erlauben. Zur Strukturanalyse wird in diesem Zusammenhang ein Flugzeugrumpf in Strukturabschnitte aufgeteilt, für die ein Substrukturelement entwickelt wird. Die Elemente bestehen aus einer Membranschale mit verschmierten Stringern, die an diskrete gekrümmte Balkenelemente angeschlossen sind. Zur Berechnung der Spannungs- und Dehnungsverteilung im Nachbeulbereich werden die Elementsteifigkeiten durch analytische Berechnungen auf Basis der Theorie der mittragenden Breite für Druckbelastung abgemindert sowie die Zusatzbelastung der Stringer infolge der Ausbildung eines Diagonalzugfelds bei Schubbelastung berechnet. Zur Verifizierung werden für einige Basislastfälle Vergleichsrechnungen zwischen dem neuen Ansatz und Rechnungen bei Verwendung konventioneller finiter Elemente durchgeführt. Hierbei kann eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse, auch im Vergleich mit feinvernetzten Rechenmodellen, bei deutlich verkürzter Rechenzeit verglichen mit derzeitigen für die Strukturoptimierung entwickelten groben Elementnetzen festgestellt werden. Die vorgestellte Modellierung erlaubt eine Strukturanalyse im Vorauslegungsstadium mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden und damit sehr geringer Rechenzeit bei ausreichender Genauigkeit für die globale Strukturanalyse. Hierbei können sowohl lokale Lasteinleitungen als auch Öffnungen wie beispielsweise Türen bereits in einer frühen Entwicklungsphase berücksichtigt werden.

## 1. EINLEITUNG

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist ein „Globales Finite-Elemente-Modell“ (GFEM) zur Strukturanalyse von Flugzeugrumpfen wie es in der Industrie verwendet wird. Bei Airbus wird zur approximativen Spannungsberechnung für die Strukturoptimierung ein grobmaschiges Finite-Elemente-Modell verwendet. Das Modell basiert auf der Kombination klassischer vierknotiger Schalenelemente sowie Stab- und Balkenelementen. Die Anzahl der Spantelemente wird durch die Stringerteilung vorgegeben. Für jeden Stringer wird zwischen zwei Spanten ein Stabelement eingeführt. Dadurch ergibt sich, dass die Hautfelder jeweils durch ein vierknotiges Schalenelement idealisiert werden. Nachfolgend wird ein Ansatz vorgestellt, der eine weitere Reduzierung der Anzahl der finiten Elemente und damit der Rechenzeit ermöglicht.

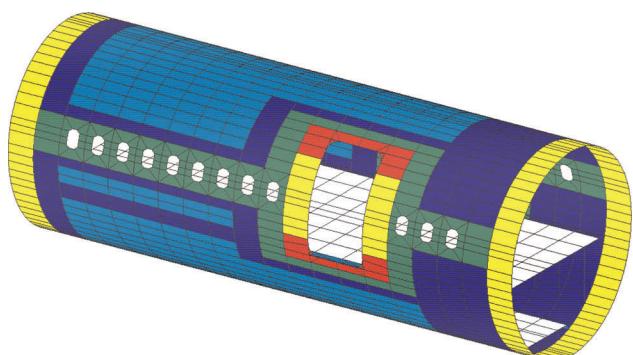


Bild 1: Dickenverteilung des bei Airbus entwickelten GFEM

Diesbezüglich wird der Rumpf in speziell entwickelte finite Elemente unterteilt. Nachfolgend wird zunächst die Herleitung der zur Strukturanalyse verwendeten finiten Elemente beschrieben, mit denen der Spannungszustand im Rumpf approximiert wird. Auf Basis der Berechnung des Spannungszustandes kann dann das nichtlineare Verhalten im Nachbeulbereich beschrieben werden. Abschließend wird die vorgestellte Berechnungsprozedur auf einen linearen sowie einen nichtlinearen Beispiellastfall angewendet und zur Verifikation mit Resultaten der Finite-Elemente-Programme Nastran und Abaqus verglichen.

## 2. ANSATZFUNKTIONEN DER FINITEN ELEMENTE

Zur Strukturanalyse wird ein Flugzeugrumpf in Strukturabschnitte aufgeteilt, für die im Hinblick auf die Reduktion von Freiheitsgraden ein Substrukturelement entwickelt wurde. Die Elemente bestehen dabei aus einer Membranschale mit verschmierten Stringern, die an diskrete gekrümmte Balkenelemente angeschlossen sind. Die Idealisierung ist in Bild 2 dargestellt.

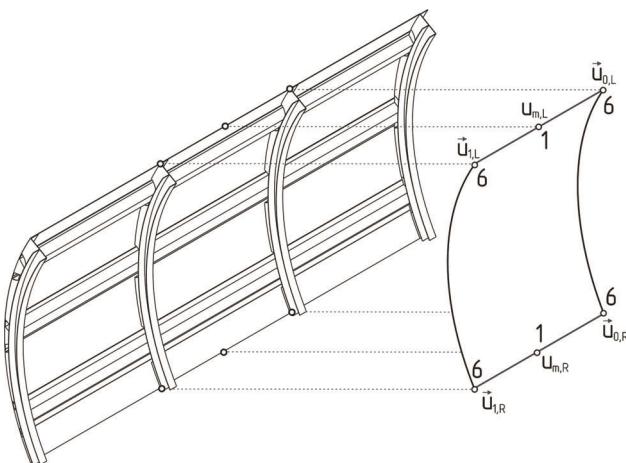


Bild 2: Strukturidealisierung; Verschmierung der Stringer

Ein Schalenelement hat dabei 26 Freiheitsgrade: jeweils sechs Freiheitsgrade in den vier Ecken des Elementes sowie jeweils einen Freiheitsgrad in der Membran zwischen den Spanten. Die Schalenelemente sind dabei über den ganzen Umfang direkt mit den Spantelementen gekoppelt. Nachfolgend werden zunächst die eindimensionalen Ansatzfunktionen der Spante und daraufhin das zweidimensionale Verschiebungsfeld der Membranschale vorgestellt.

### 2.1. Ansatzfunktionen der Spantelemente

Die Spante werden als finite Kreisringelemente idealisiert. Verschiebungen und Verdrehungen werden dabei wie in Bild 3 dargestellt angenommen. Unterschiedliche Ansätze zur Entwicklung finiter Kreisringelemente wurden in der Literatur beispielsweise von Sabir [1] vergleichend gegenübergestellt. Eine Weiterentwicklung der von Sabir vorgestellten Elemente wurde von Ravendranath [2] vorgeschlagen: Die Ansatzfunktionen des Elementes

werden hierbei auf Basis der Differentialgleichungen des Kreisringes (vgl. z.B. [3]) über ihre Steifigkeiten gekoppelt.

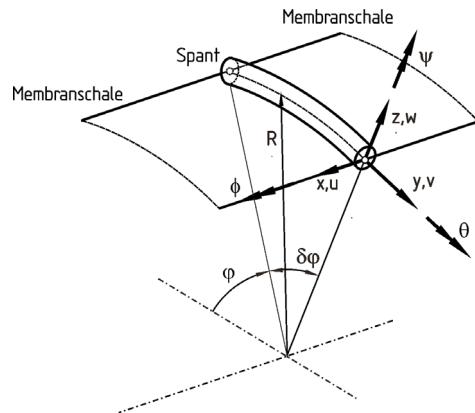


Bild 3: Verschiebungen und Verdrehungen der Spantelemente

Hier erfolgt die Kopplung der Verschiebungsgrößen mit Hilfe der Steifigkeiten. Die Verschiebungen  $w, v$  sowie die Verdrehung  $\Phi$  hängen demnach wie folgt zusammen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{EA}{EI_x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) R$$

$$\phi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R}$$

Zur Verbesserung der Ansatzfunktionen wurde im Rahmen dieser Arbeit zudem eine Kopplung der Verschiebungen und Verdrehungen senkrecht zur Ringebene eingeführt. Auf Basis der Differentialgleichungen orthogonal zur Ringebene (vgl. [3]) ergeben sich die differentiellen Zusammenhänge der Verschiebungsgrößen zu:

$$(2) \quad \frac{\theta}{R} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{GI_T}{EI_z} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} R + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Durch die Kopplungen des Verschiebungsfeldes mit Hilfe der Differentialgleichungen müssen für die Verschiebung  $w$  sowie für die Verdrehung  $\Theta$  zur Einhaltung der in Form der Differentialgleichungen formulierten Nebenbedingungen Polynomfunktionen vierter bzw. dritter Ordnung in Umfangsrichtung gewählt werden.

$$(3) \quad w(y) = \sum_{i=0}^4 c_{w,i} y^i$$

$$\theta(y) = \sum_{i=0}^3 c_{\theta,i} y^i$$

Die Koeffizienten des Verschiebungsfeldes können nun über die Verschiebungsgrößen an den Balkenrändern (vgl. Bild 2) berechnet werden.

### 2.2. Ansatzfunktionen der Schalenelemente

Zur Entwicklung der Ansatzfunktionen wird die Differentialmatrix der Membranschale zunächst in

Längsrichtung analytisch gelöst. Das Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Schalenelement berechnet sich bei Berücksichtigung eines konstanten Innendrucks  $p_z$  zu (vgl. z.B. Flügge /11/):

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} &= 0 \\ n_y &= -p_z \end{aligned}$$

Für eine Schale mit konstantem Radius sind die Verzerrungen in Abhängigkeit der Verschiebungen wie folgt (vgl. z.B. Donnell /4/):

$$(5) \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Der Zusammenhang zwischen Dehnungen und Kraftflüssen ergibt sich für anisotropes Materialverhalten zu (s. z.B. Jones /5/):

$$(6) \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix}$$

Daraus resultiert folgende Differentialmatrix der anisotropen Schale, vereinfachend für  $p_z=0$ :

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} v \\ u \\ n_x \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -s_{16} & -s_{66} \\ 0 & 0 & -s_{11} & -s_{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ u \\ n \\ n_{xy} \end{Bmatrix}$$

Das partielle Gleichungssystem wird zunächst in Längsrichtung analytisch gelöst. Dadurch ergibt sich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches nur noch Differentiale in Umfangsrichtung enthält.

$$(8) \quad \begin{Bmatrix} v \\ u \\ n_x \\ n_{xy} \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 1 & s_{11}x & k_{13} \\ 0 & 0 & 1 & k_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ u \\ n_x \\ n_{xy} \end{Bmatrix}_0$$

mit:

$$\begin{aligned} k_{12} &= -\frac{\partial}{\partial y} \\ k_{13} &= s_{16}x - \frac{\partial}{\partial y} \frac{s_{11}x^2}{2} \\ k_{14} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{s_{11}x^3}{6} - \frac{\partial}{\partial y} x^2 s_{16} + x s_{66} \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes in Meridianrichtung ein kubischer Ansatz für die Tangentialverschiebung  $v$  und ein quadratischer Ansatz für die Meridianverschiebung  $u$  benötigt werden. Dies führt zu einem in Meridianrichtung linear veränderlichen Längskraftfluss  $n_x$  und einem konstanten Schubfluss  $n_{xy}$ . Das Verschiebungsfeld der Membranschale kann somit wie folgt angegeben werden.

$$(9) \quad \begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{i=0}^3 c_{v,i}(y) x^i \\ u(x, y) &= \sum_{i=0}^2 c_{u,i}(y) x^i \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von  $v(x, y)$  können vier Stützstellen für  $x=0$ ,  $x=l/3$ ,  $x=2l/3$  und  $x=l$  aus Gleichung (8) in Abhängigkeit von  $u_0$ ,  $n_{x0}$  und  $n_{xy0}$  berechnet werden. Analog kann  $u(x, y)$  durch die Bestimmung von drei Stützstellen bei  $x=0$ ,  $x=l/2$  und  $x=l$  in Abhängigkeit von  $u_0$  sowie  $n_{x0}$  und  $n_{xy0}$  bestimmt werden. Die Verschiebungen am Rand,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $u_1$  und  $v_1$  werden als bekannt angenommen; sie entsprechen den Ansatzfunktionen der Spantelemente am Rand der Schale. Zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes müssen nun der Längskraftfluss  $n_{x0}$  sowie der Schubfluss  $n_{xy0}$  bestimmt werden. Nach kurzer Umformung ergeben sich aus den ersten beiden Zeilen von Gleichung (8) folgende Beziehungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{6R}{l} \left( \left( \frac{s_{16}}{s_{11}} \right)^2 - \frac{s_{66}}{s_{11}} \right) (u_0 - 2u_m + u_1) \\ + \frac{\partial}{\partial y} (u_1 - u_0) \frac{s_{16}}{s_{11}} + \frac{\partial}{\partial y} (v_0 - v_1) - \frac{l}{R} \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} = 0 \\ n_{xy0} = \frac{ls_{11} \frac{\partial u_m}{\partial y} + Rs_{16} (u_0 - u_1) - Rs_{11} (v_0 - v_1)}{(s_{11}s_{66} - s_{16}^2) Rl} \end{aligned}$$

Dabei ist  $u_m$  die Verschiebung des Schalenknotens zwischen den beiden Spanten. Bei bekannten Verschiebungsfunktionen der Schale an den Spanten ist das Verschiebungsfeld der Membranschale demnach vollständig beschrieben, sobald die Verschiebung des Mittelknotens  $u_m$  bekannt ist. Für die gewählten Ansatzfunktionen des Spantes ergibt sich diese nach Lösung der Differentialgleichung in folgender Form:

$$(11) \quad u_m(y) = \sum_{i=0}^5 k_{u_{m,i}} y^i + c_1 \sin(q_1 y) + c_2 \sin(q_2 y)$$

Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden die in Bild 2 skizzierten Freiheitsgrade am Rand der Schale zwischen den Schalen,  $u_{m1}$  und  $u_{m2}$ , verwendet.

Damit kann auch der Längskraftfluss berechnet werden:

$$(12) \quad n_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{s_{16}}{s_{66}} n_{xy}$$

### 3. HERLEITUNG DER STEIFIGKEITSMATRIX

Die Steifigkeitsmatrix der Schalenelemente wird auf der Grundlage der Kraftflüsse berechnet. Das Potential ergibt sich zu:

$$(13) \quad \Pi_{Membran} = \frac{1}{2} \int_A (s_{11} n_x^2 + 2s_{16} n_x n_{xy} + s_{66} n_{xy}^2) dA$$

Durch Minimierung des Potentials (vgl. /6/) ergibt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Schalenelementes zu:

$$(14) \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,26} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{26,1} & \cdots & q_{26,26} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad q_{i,j} = \frac{d^2\Pi}{du_i du_j}$$

Der Verschiebungsvektor ist dabei wie folgt definiert:

$$(15) \quad \vec{u} = \begin{Bmatrix} \vec{u}_{0,L} \\ \vec{u}_{0,R} \\ \vec{u}_{m,L} \\ \vec{u}_{m,R} \\ \vec{u}_{1,L} \\ \vec{u}_{1,R} \end{Bmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{0,L} &= [u_{0,L}, v_{0,L}, w_{0,L}, \phi_{0,L}, \theta_{0,L}, \psi_{0,L}]^T \\ \vec{u}_{0,R} &= [u_{0,R}, v_{0,R}, w_{0,R}, \phi_{0,R}, \theta_{0,R}, \psi_{0,R}]^T \\ \vec{u}_{m,L} &= [u_{m,L}]^T \\ \vec{u}_{m,R} &= [u_{m,R}]^T \\ \vec{u}_{1,L} &= [u_{1,L}, v_{1,L}, w_{1,L}, \phi_{1,L}, \theta_{1,L}, \psi_{1,L}]^T \\ \vec{u}_{1,R} &= [u_{1,R}, v_{1,R}, w_{1,R}, \phi_{1,R}, \theta_{1,R}, \psi_{1,R}]^T \end{aligned}$$

Analog kann die Steifigkeitsmatrix der Spantelemente nach Aufstellung des Potentials ermittelt werden. Das Potential ergibt sich unter Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit EA, der Biegesteifigkeiten EI<sub>x</sub> und EI<sub>y</sub> sowie der Schubsteifigkeit GI<sub>T</sub> zu:

$$(16) \quad \Pi_{Spant} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} (EA\epsilon_y^2 + EI_x\kappa_x^2 + GI_T\kappa_y^2 + EI_z\kappa_z^2) dy$$

mit:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \\ \kappa_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \kappa_y &= \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\psi}{R} \\ \kappa_z &= \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\theta}{R} \end{aligned}$$

#### 4. BESCHREIBUNG DES NACHBEULVERHALTENS

Zur Berechnung der Spannungs- und Dehnungsverteilung im Nachbeulbereich werden die Elementsteifigkeiten der Membranschalenmodelle durch analytische Berechnungen abgemindert. Zur Abminderung der Dehnsteifigkeit der Membranschale infolge des Überschreitens der Axialdruckbeullast wird die Theorie der mittragenden Breite angewendet. Für den frühen Nachbeulbereich bis etwa der dreifachen Beullast hat Harris /7/ die effektive Steifigkeit allseits gelenkig gelagerter

orthotroper Platten analytisch berechnet. Daraus leitet sich die mittragende Breite wie folgt ab:

$$(17) \quad \frac{b_m}{b} = \frac{1+\mu}{3+\mu} + \frac{2}{(3+\mu)} \frac{1}{k}$$

mit:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{A_{22}D_{11}}{A_{11}D_{22}} \\ k &= \frac{\sigma}{\sigma_{kr}} \end{aligned}$$

Die kritische Beullast unter Axialdruck wird dabei nach Tennyson /8/ berechnet. Bei Schubbelastung wird die Theorie des Diagonalzugfeldes nach Kuhn /9/ zur Berechnung der zusätzlichen Drucklasten auf die Stringer infolge der anisotropen Tragfähigkeit unter Schub ausgebeulter Schalen verwendet. Die Schubbeullast wird nach Öry /3/ berechnet. In diesem Sinne wird die nichtlineare Nachbeulberechnung durch eine iterative, lineare statische Rechnung ersetzt (vgl. Wohlers /10/). Zunächst werden auf Basis einer linearen statischen Rechnung und der analytischen Formeln für den Nachbeulbereich die Steifigkeiten verändert. Daraufhin wird mit den veränderten Steifigkeiten eine erneute lineare statische Berechnung durchgeführt, woraufhin neue Steifigkeiten für den Nachbeulbereich aufgrund des veränderten Membranspannungszustandes berechnet werden. Die Iteration wird fortgesetzt bis Konvergenz erreicht ist.

### 5. BEISPIELRECHNUNGEN

Für die vorgestellten finiten Elemente wurde ein einfaches eigenständiges Finite-Elemente-Programm entwickelt, sodass der Ansatz auch für größere strukturmechanische Probleme verifiziert werden kann. Beispielhaft werden zunächst zwei linearstatische Rechnungen durchgeführt: ein auf Zug belasteter Rumpfabschnitt mit drei Spantabschnitten sowie ein größerer Rumpfabschnitt mit 20 Spantabschnitten. Anschließend wird für einen Rumpfabschnitt mit drei Spantabschnitten eine Verifikationsrechnung für den Nachbeulbereich gezeigt.

#### 5.1. Lineare Statikrechnung

Mit Hilfe des vorgestellten Berechnungsansatzes wird der in Bild 4 skizzierte aus drei Spantabschnitten zusammengesetzte Rumpfabschnitt statisch berechnet. Der Lastfall und die Elementierung des Verifizierungs-modells können dabei ebenfalls Bild 4 entnommen werden. Die Resultate werden dann mit den Berechnungs-ergebnissen eines feinvernetzten Nastran-Modells verglichen.

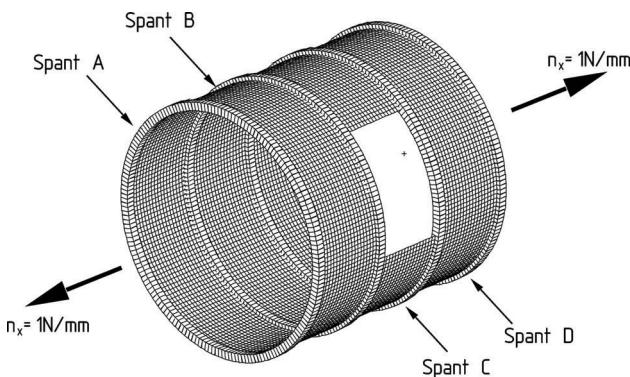


Bild 4: Lastfall sowie Modellierung des Referenzmodells in Nastran

Bild 5 zeigt den Längskraftfluss aufgrund der gegebenen Belastung, wie er mit dem vorgestellten Ansatz berechnet wurde. Für die Berechnung wurden hierbei zwölf Elemente auf dem Umfang verwendet und die Zwischenwerte auf Basis der Ansatzfunktionen interpoliert.

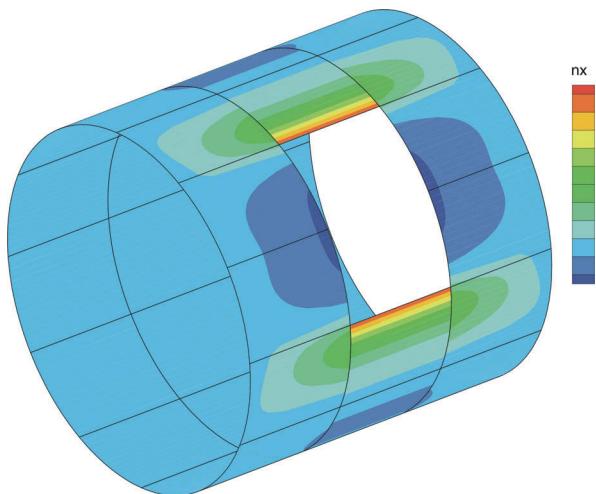


Bild 5: Berechneter Längskraftfluss für den Lastfall aus Bild 4

An Spant B ergibt sich mit  $\varphi=0$  in der Mitte der Öffnung der in Abbildung 6 dargestellte Längskraftfluss.

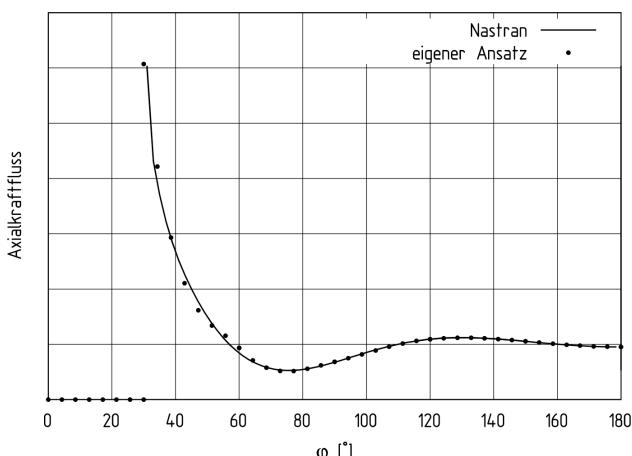


Bild 6: Längskraftfluss verglichen mit Nastran-Rechnung

Trotz der groben Elementierung zeigt der Vergleich mit den mit Nastran berechneten Längskraftflüssen eine sehr gute Übereinstimmung, insbesondere auch für die Spannungsspitze am Rand der Öffnung.

Zur Fortsetzung der Verifikation des Ansatzes soll ein größeres Modell betrachtet werden. Bild 7 zeigt einen Rumpfabschnitt mit 20 Spantabschnitten und einer Türöffnung. Die versteifte Schale ist linksseitig fest eingespannt und auf der rechten Seite werden lokal zwei diskrete Kräfte F eingeleitet.

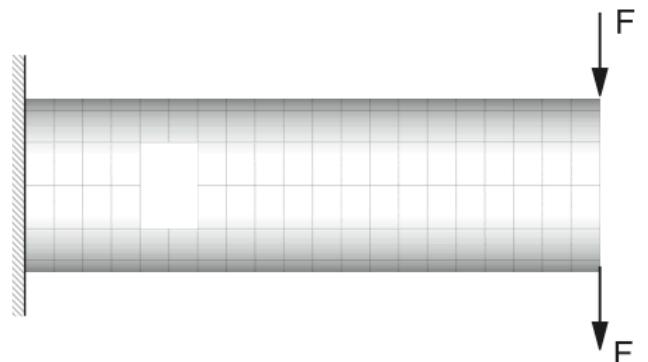


Bild 7: Lastfall für den Rumpf mit 20 Spantabschnitten

Bild 8 zeigt die Längskraftflüsse im Rumpfabschnitt, links berechnet mit dem vorgestellten Ansatz mit zwölf Elementen auf dem Umfang und rechts mit einem feinmaschigen Nastran-Modell mit 360 Elementen auf dem Umfang.

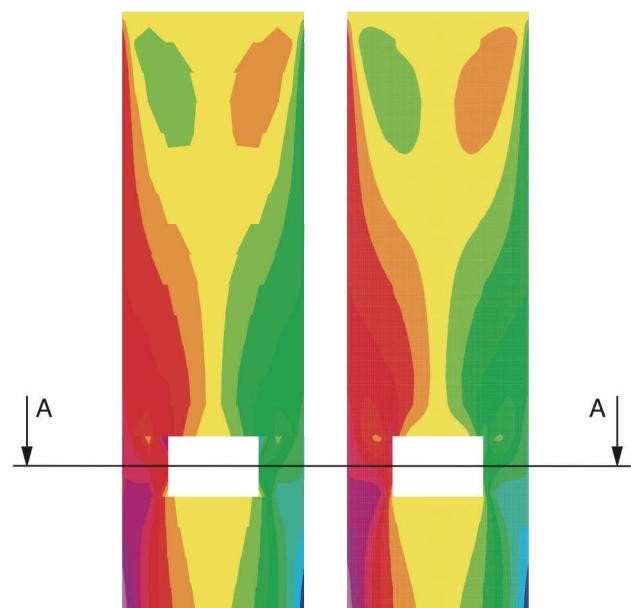


Bild 8: Eigener Ansatz (links) und feinmaschige Nastran-Rechnung (rechts) des Axialkraftflusses im Vergleich

Die generelle Übereinstimmung der Längskraftflussverteilung wird in Bild 8 verdeutlicht. Für den Schnitt A-A aus Bild 8 zeigt Bild 9 den Verlauf des Kraftflusses in Längsrichtung des vorgestellten Ansatzes sowie der Vergleichsrechnung mit Nastran. Zusätzlich zum mit dem

feinmaschigen Netz (Nastran, FFEM) berechneten Axialkraftfluss zeigt Bild 9 den mit einem größeren Modell mit 72 Elementen auf dem Umfang (Nastran, GFEM) berechneten Kraftfluss. Diese Elementanzahl wurde in Anlehnung an das in Bild 1 gezeigte bestehende Finite-Elemente-Modell für die Strukturoptimierung gewählt. Beide Näherungsmodelle zeigen im Vergleich mit den Ergebnissen des feinmaschigen Berechnungsmodells gute Ergebnisse. Für die GFEM-Modellierung waren allerdings insgesamt 8508 Freiheitsgrade erforderlich während der mit den vorgestellten Elementen modellierte Rumpf nur 1752 Freiheitsgrade für eine hinreichend genaue Näherungslösung benötigt.

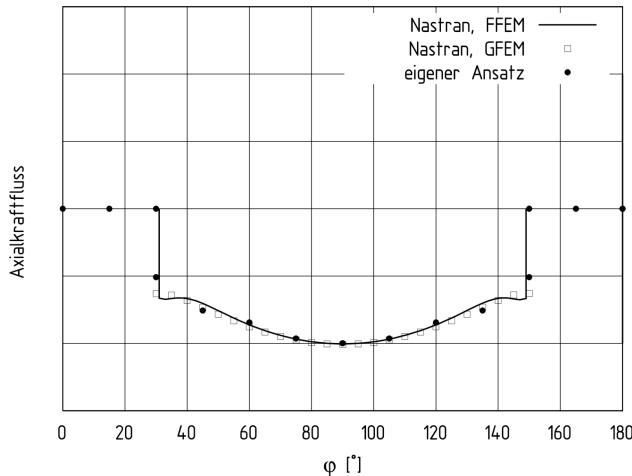


Bild 9: Nastran-Rechnungen und eigene Rechnung im Schnitt A-A aus Bild 8 im Vergleich.

Die Anzahl der Freiheitsgrade kann also im Vergleich zum bestehenden Modell um etwa 80% gesenkt werden. Dies führt zu einer deutlichen Reduzierung der Rechenzeit: Das Nastran-Modell mit 72 Elementen auf dem Umfang benötigte durchschnittlich 2s zur Berechnung, während mit der vorgestellten Modellierung auf dem gleichen Computer nur etwa 1/10s zur Berechnung erforderlich waren.

## 5.2. Nichtlineare Statikrechnung

Zur Verifikation des vorgestellten Ansatzes für den Nachbeulbereich wurde ein Abaqus-Modell eines Rumpfes mit drei Spantabschnitten und 40 äquidistant auf dem Umfang verteilten Stringern erstellt. Der Rumpfabschnitt wird mit einem konstanten Axialdruck belastet. Bild 10 zeigt die Beulform, welche sich bei Überschreiten der Beullast im nichtlinearen Bereich einstellt: Ein Ausbeulen der gekrümmten Hautfelder zwischen den Spanen und Stringern mit zwei Halbwellen längs und einer Halbwelle quer zur Belastungsrichtung. Zur Vereinfachung des Verifizierungsmodells wurde ein isotroper Rumpf mit  $\mu=1$  in Gleichung 17 untersucht. Im Nachbeulbereich wurde die Steifigkeit der beulenden Hautfelder wie in Kapitel 4 beschrieben iterativ bis zur Konvergenz verändert. Als Referenz wurde mit Abaqus eine nichtlineare Berechnung durchgeführt, deren Last-Verschiebungs-Kurve in Bild 11 dargestellt ist. Zusätzlich zeigt Bild 11 die mit dem vorgestellten Ansatz berechnete Verschiebung infolge des angreifenden Längskraftflusses.

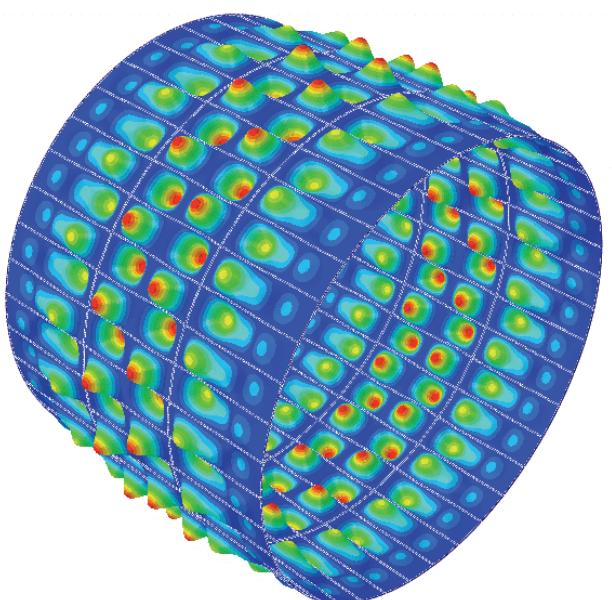


Bild 10: Erste Beulform des untersuchten Rumpfabschnittes

Die Ergebnisse sind normiert auf die kritische Beullast bzw. Beulverschiebung.

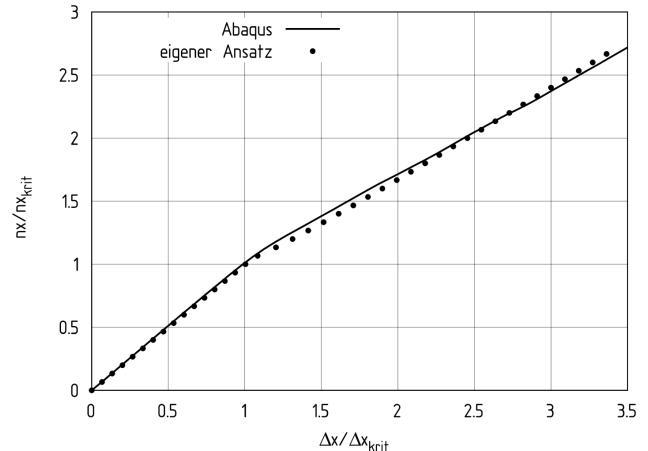


Bild 11: Last-Verschiebungs-Diagramm des Rumpfabschnittes normiert auf Beullast und Beulverschiebung

Das Last-Verschiebungs-Diagramm zeigt generell eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der iterativen Statikrechnung zur Beschreibung des Nachbeulverhaltens und der nichtlinearen Berechnung mit Abaqus. Die Berechnungszeit für die iterative Nachbeulrechnung beträgt abhängig von der Anzahl notwendiger Iterationsschritte bis zur Konvergenz allerdings nur etwa 1-2s für den vorgestellten Rumpfabschnitt; im Vergleich zu einer viele Stunden dauernden nichtlinearen Berechnung mit Abaqus.

## 6. ZUSAMMENFASSUNG

Die vorgestellte Arbeit zeigt eine Möglichkeit, durch die Verschmierung der Stringer und damit einer größeren Struktur des Berechnungsnetzes die Zeit zur Berechnung der approximativen Spannungsverteilung für langwierige Optimierungsrechnungen im Vergleich zu bestehenden Modellen deutlich zu verkürzen. Es konnte gezeigt werden, dass der Ansatz auch die Spannungsumlagerungen im Nachbeulbereich mit hinreichender Genauigkeit beschreiben kann. In einem nächsten Schritt soll der Ansatz zur Berechnung von realen Flugzeugrumpfen eingesetzt werden. Obwohl die nicht-gleichmäßige Dickenverteilung der Hautfelder (vgl. Bild 1) dann eine feinere Elementierung als die beschriebenen zwölf Elemente auf dem Umfang erzwingt, wird auch hier ein deutlicher Rechengeschwindigkeitsvorteil gegenüber dem bestehenden Modell erwartet.

## 7. DANKSAGUNG

Die vorgestellten Forschungsergebnisse wurden von der Europäischen Union im Rahmen des 7. Forschungsrahmenprogramms FP7/2007-2013 unter dem „Grant Agreement“ n°213371 gefördert ([www.maaximus.eu](http://www.maaximus.eu)).

## 8. LITERATURVERZEICHNIS

/1/ Sabir, A. B.: A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems, *Journal of Sound and Vibration* 18(4), 555-563, 1971

/2/ Raveendranath, P.: Application of coupled polynomial displacement fields to laminated beam elements, *Computers and Structures* 78, 661-670, 2000

/3/ Öry, H.: *Structural Design of Aerospace Vehicles*, Space Course Aachen. Institut für Leichtbau, 1991

/4/ Donnell, L.H.: *Stability of Thin-Walled Tube under Torsion*, NACA Rep. 479, 1935, 95-116

/5/ Jones, R.M.: *Mechanics of composite materials*, Hemisphere Publ., 1975

/6/ Dieker S. und Reimerdes, H.-G.: *Elementare Festigkeitslehre im Leichtbau*. Donat Verlag, 1992

/7/ Harris, G. Z.: *Buckling and Postbuckling of Orthotropic Plates*, *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 12, 1976

/8/ Tennyson, R. C.: *Buckling of Laminated Anisotropic Imperfect Circular Cylinders under Axial Compression*, *J. Spacecraft*, Vol. 10, No. 2, 1973

/9/ Kuhn, P.: *A summary of diagonal tension. Part I – Methods of analysis*. NACA TN 2661. 1952

/10/ Wohlers, W.: *Mehrstufige Optimierung komplexer strukturmechanischer Probleme*, Dissertation, RWTH Aachen, 2004

/11/ Flügge, W.: *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer-Verlag, 3. Auflage, Berlin, 1962