

BEULVERHALTEN DES ORTHOTROPEN PLATTENSTREIFENS MIT DREHELASTISCH GELAGERTEN UNBELASTETEN RÄNDERN UNTER KOMBINIERTER DRUCK- UND SCHUBBELASTUNG

M. Beerhorst^a, M. Seibel^a
C. Mittelstedt^b

^aDepartment Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau, Berliner Tor 9, 20099 Hamburg, DE

^bELAN GmbH, Karnapp 25, 21079 Hamburg, DE

Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag behandelt das Beulverhalten eines theoretisch unendlich langen orthotropen Plattenstreifens. Als Randbedingungen werden drehelastisch gelagerte Längsränder betrachtet. Zu den Randbedingungen der Querränder werden keine speziellen Annahmen gemacht. Belastet wird der Plattenstreifen durch eine Kombination von konstanter Druckbelastung in Längsrichtung und Schubbelastung.

Die zu diesem Problem gehörige, homogene partielle Differentialgleichung wird mittels eines in Längsrichtung periodischen, exponentiellen Lösungsansatzes angegangen. Im weiteren Verlauf führt die Einarbeitung der Randbedingungen auf einen transzendenten Ausdruck, aus dem sich durch die Anwendung numerischer Verfahren die gesuchte Beullast und die zugehörige, bezogene Beulhalbwellenzahl bestimmen lassen.

Eine Betrachtung der Lösungen für verschiedene Orthotropie-Parameter, Drehfedersteifigkeiten und Lastkombinationen offenbart Ähnlichkeiten der Lösungen untereinander. Aus diesem Grunde werden die Lösungen mittels Regression durch einfache Funktionen angenähert, wobei sich sehr gute Übereinstimmungen mit den Ursprungsdaten ergeben.

Ebenso werden Interaktionskurven der Reservefaktoren präsentiert. Hier zeigt sich, dass durch Modifikation der aus dem isotropen Fall bekannten Beziehung für die Druck-Schub-Interaktion Interaktionsformeln generieren lassen, welche den Anwendungsbereich auf orthotrope Platten mit drehelastisch gelagerten Rändern erweitern. Auch hier sind die Abweichungen sehr gering.

1. EINLEITUNG

Bei der Auslegung von Leichtbaustrukturen aus der Luft- und Raumfahrt ist neben den Kriterien der Festigkeit und Steifigkeit die Stabilität der Strukturen ein wesentlicher Aspekt. Vor allem im Vorentwurf werden Strukturkomponenten wie versteifte Schalen, welche häufig in Rumpf, Flügel und Leitwerken Verwendung finden, bei der Stabilitätsanalyse in Subkomponenten zerlegt. Ein Typ dieser Subkomponenten ist der Plattenstreifen. Dieser kann zum Beispiel als vereinfachtes mechanisches Modell eines Profilsteigs oder Hautfeldes dienen (BILD 1, oben). Die Stützung durch benachbarte Subkomponenten kann dabei durch die Steifigkeit von Drehfedern simuliert werden [1]. Da sich die Beullast der Platte endlicher Länge mit steigendem, modifizierten Seitenverhältnis (2.5) von oben an die des unendlich langen Plattenstreifens annähert, liefert die Beulanalyse des Plattenstreifens stets konservative Ergebnisse. Allerdings unterscheiden sich die Beullastwerte für die beiden genannten Betrachtungsweisen der Platte ab modifizierten Seitenverhältnissen von drei oder größer nur noch geringfügig. Die in diesem Beitrag behandelte strukturelle Konfiguration ist in BILD 1 (unten) dargestellt. Hierbei handelt es sich um einen orthotropen Plattenstreifen, welcher an den Längsrändern durch Drehfedern elastisch eingespannt ist. Die Belastung besteht aus einer Kombination von konstanter Druckbelastung in Längsrichtung und Schubbelastung.

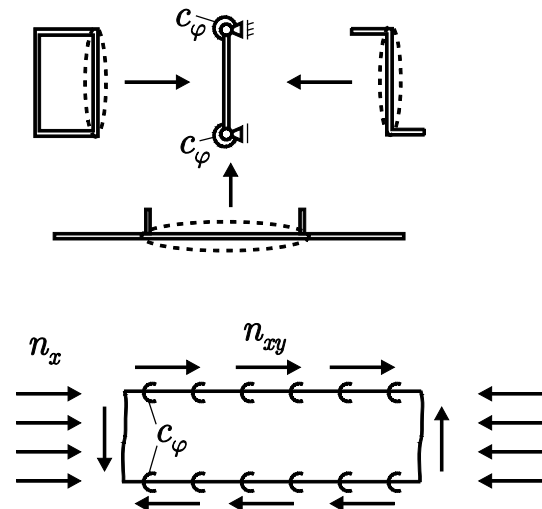


BILD 1. Zerlegung von Strukturen in Subkomponenten (oben), Strukturelle Konfiguration (unten)

Beuluntersuchungen des Plattenstreifens unter kombinierter Belastung sind seit vielen Jahrzehnten Gegenstand der wissenschaftlichen Forschung. Eine gute Übersicht von Arbeiten bis 1970 ist in [2] zu finden. Der Fall des isotropen Plattenstreifens unter kombinierter Druck- und Schub-

belastung dessen Längsränder elastisch eingespannt sind, wird z. B. in [3] untersucht. Hierin wird sowohl die exakte Lösung der partiellen Differentialgleichung (PDGL) ausgewertet, als auch Näherungsverfahren über Energiemethoden diskutiert. Dörfler [4] gibt die exakte Lösung für den Fall eines orthotropen Laminats an. In [5] ist eine Erweiterung des Problems für symmetrische Laminats mit voll besetzter Plattensteifigkeitsmatrix gegeben. Die Behandlung beschränkt sich allerdings auf die klassischen Randbedingungen der festen Einspannung und der gelenkigen Lagerung. Umfangreiche Berechnungsergebnisse für die Beullasten allgemeiner, symmetrischer Laminats mit gelenkig gelagerten und fest eingespannten Längsrändern unter Druck-, Schub-, und Biegung werden von Nemeth ([6], [7]) präsentiert. Als Berechnungsansatz kommt dabei eine Energiemethode kombiniert mit dem Ritz-Verfahren zum Einsatz. Allgemeine Grundlagen und vertiefende Betrachtungen zur Mechanik von Laminatplatten sind z. B. in [8], [9] und [10] zu finden.

Ziel der gegenwärtigen Untersuchung ist es, durch Auswertung der exakten Lösung nach Dörfler [4] Beullastkurven in generischer Form darzustellen, welche Parameterinflüsse offenbaren und für die überschlägige Auslegung genutzt werden können. Desweiteren werden einfache Näherungsformeln zur Berechnung der Beullast entwickelt, welche sich leicht in Entwurfs- oder Optimierungsprogramme integrieren lassen. Eine Prüfung der Gültigkeit der aus dem isotropen Fall bekannten Druck-Schub-Interaktionsformel für das diskutierte mechanische Modell [11] rundet diese Untersuchung ab.

2. GRUNDLEGENDE GLEICHUNGEN

Nach der Theorie der linearen Statik lässt sich aus Gleichgewichtsbedingungen folgende PDGL vierter Ordnung für das Beulen der orthotropen Platte herleiten [8]:

$$(2.1) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

Hierin sind D_{ij} die Elemente der Plattensteifigkeitsmatrix, N_{ab} die Kraftflüsse und w die Durchbiegung in Normalenrichtung.

Die Einführung der nachfolgenden Größen erlaubt eine generische Darstellung von (2.1). Mit (2.2) ist eine implizite Definition der Beulfaktoren k_{ab} gegeben.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} N_x &= k_x \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \sqrt{D_{11} D_{22}} \\ N_y &= k_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 D_{22} \\ N_{xy} &= k_{xy} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \sqrt[4]{D_{11} D_{22}^3} \end{aligned}$$

Weiterhin werden die folgenden affinen Koordinaten verwendet [12]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x &= \sqrt[4]{D_{11}} \bar{x} \\ y &= \sqrt[4]{D_{22}} \bar{y} \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a &= \sqrt[4]{D_{11}} \bar{a} \\ b &= \sqrt[4]{D_{22}} \bar{b} \end{aligned}$$

Dies führt für eine Platte der Länge a und Breite b auf das modifizierte Seitenverhältnis:

$$(2.5) \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}}$$

Für einen Beulmodus mit der Halbwellenzahl m ergibt sich somit die bezogene Halbwellenzahl:

$$(2.6) \quad \beta_m = \frac{m\pi}{\alpha}$$

Zudem wird noch der folgende Orthotropie-Parameter [10] verwendet:

$$(2.7) \quad \eta = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}$$

Hierdurch ergibt sich für die PDGL (2.1):

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\eta \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k_x \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + k_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2k_{xy} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Zur Lösung von (2.8) wird ein in Längsrichtung periodischer Exponentialansatz nach (2.9) verwendet.

$$(2.9) \quad w(\bar{x}, \bar{y}) = W \underbrace{e^{i \left(\frac{m\pi \bar{x}}{\bar{a}} \right)}}_{w_1(\bar{x})} \underbrace{e^{i \lambda \frac{\bar{y}}{\bar{b}}}}_{w_2(\bar{y})}$$

Setzt man diesen in (2.8) ein, so ergibt sich eine quartische Gleichung vierter Ordnung für λ (2.10).

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2\eta \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{b} \right)^4 - k_x \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \\ - k_y \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{b} \right)^2 - 2k_{xy} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{\lambda}{b} \right) = 0 \end{aligned}$$

Durch Verwendung der bezogenen Beulhalbwellenzahl β_m nach (2.6) kann diese Gleichung in eine etwas kompaktere und gänzlich generische Form gebracht werden.

$$\begin{aligned}
 \lambda^4 + h_2 \lambda^2 + h_1 \lambda + h_0 &= 0 \\
 h_2 &= -k_y \pi^2 + 2\eta \beta_m^2 \\
 h_1 &= -2k_{xy} \beta_m \pi^2 \\
 h_0 &= -k_x \beta_m^2 \pi^2 + \beta_m^4
 \end{aligned}
 \quad (2.11)$$

Ist keine Schubbelastung zu berücksichtigen, wird die Gleichung biquadratisch:

$$\lambda^4 + h_2 \lambda^2 + h_0 = 0 \quad (2.12)$$

Um die Anzahl der Unbekannten in Hinsicht auf die Beulfaktoren zu reduzieren, ist es hilfreich, diese über bezogene Größen auszudrücken. Hierbei wird das Verhältnis δ vom dominanten Referenz-Beulfaktor zu den kleineren Beulfaktoren gebildet.

$$\delta_{ab} = \frac{k_{ab}}{k_{ref}} \quad (a, b = x, y) \quad (2.13)$$

In (2.14) ist dies beispielhaft für den Fall überwiegender Längsdruckbelastung veranschaulicht.

$$\begin{aligned}
 k_{ref} &= k_x \\
 \Rightarrow \delta_x &= 1, \quad \delta_y = \frac{k_y}{k_x}, \quad \delta_{xy} = \frac{k_{xy}}{k_x}
 \end{aligned}
 \quad (2.14)$$

3. RANDBEDINGUNGEN UND BERECHNUNG DER BEULLAST

Für den Plattenstreifen mit elastisch eingespannten Längsrändern gilt, dass an beiden Längsrändern die Durchbiegung verschwindet:

$$\begin{aligned}
 w(\bar{x}, \bar{y} = 0) &= 0 \\
 w(\bar{x}, \bar{y} = \bar{b}) &= 0
 \end{aligned}
 \quad (2.15)$$

Außerdem ist das Biegemoment dort proportional zum Neigungswinkel,

$$\begin{aligned}
 \overline{M}_y(\bar{x}, \bar{y} = 0) &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}, \bar{y} = 0) = -\frac{\bar{c}_\varphi}{b} \frac{\partial w}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y} = 0) \\
 \overline{M}_y(\bar{x}, \bar{y} = \bar{b}) &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{y}^2}(\bar{x}, \bar{y} = \bar{b}) = \frac{\bar{c}_\varphi}{b} \frac{\partial w}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, \bar{y} = \bar{b})
 \end{aligned}
 \quad (2.16)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor die dimensionslose Federsteifigkeit \bar{c}_φ ist.

$$\bar{c}_\varphi = \frac{c_\varphi b}{D_{22}} \quad (2.17)$$

Einsetzen des Lösungsansatzes (2.9) in die Randbedingungen (2.15) und (2.16) liefert die folgenden vier homogenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^4 W_n \frac{1}{K_{1n}} &= 0 \\
 \sum_{n=1}^4 W_n \frac{e^{i\lambda_n}}{K_{3n}} &= 0 \\
 \sum_{n=1}^4 W_n \lambda_n \underbrace{(\lambda_n + i\bar{c}_\varphi)}_{K_{2n}} &= 0 \\
 \sum_{n=1}^4 W_n e^{i\lambda_n} \lambda_n \underbrace{(\lambda_n - i\bar{c}_\varphi)}_{K_{4n}} &= 0
 \end{aligned}
 \quad (2.18)$$

Hierin stellen die K_{kl} ($k, l=1..4$) die Elemente der Koeffizientenmatrix dar. Somit lässt sich (2.18) kompakt schreiben als:

$$[K] \{W\} = \{0\} \quad (2.19)$$

Die notwendige Bedingung für eine nichttriviale Lösung dieses Gleichungssystems ist, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet.

$$|[K]| = 0 \quad (2.20)$$

In diesem Ausdruck sind als einzige Unbekannte der Beulfaktor k und die Halbwellenzahl β_m enthalten. Aufgrund der transzendenten Form der obigen Gleichung kann die Lösung nur iterativ erfolgen. Die Kombination von k und β_m , welche Bedingung (2.20) erfüllt und gleichzeitig ein minimales k liefert, stellt hierbei die gesuchte Lösung dar. In der gegenwärtigen Untersuchung wurde β_m in Form eines Bisektionsverfahrens iteriert und für jedes β_m die nichtlineare Gleichung mit der verbleibenden Unbekannten k gelöst.

4. ERGEBNISSE

4.1. Reine Druckbelastung

Eine grafische Darstellung der Lösung für reine Druckbelastung ist in BILD 2 gegeben. Es ist zu erkennen, dass die Beullast mit steigendem η ansteigt. Eine Erhöhung der Federsteifigkeit führt ebenfalls zu einer Vergrößerung der Beullast, wobei die Änderung im Bereich kleiner \bar{c}_φ am stärksten ist und für \bar{c}_φ -Werte von 50 und darüber nur noch relativ gering. Qualitativ ist der Verlauf der Kurven sehr ähnlich. BILD 3 zeigt die bezogene Halbwellenzahl für den Lastfall der reinen Druckbelastung. Auch hier ist der Kurvenverlauf ähnlich und die Änderungen sind im Bereich kleiner Federsteifigkeiten am größten. Generell ist zu beobachten, dass die Halbwellenzahl mit zunehmender Federsteifigkeit und zunehmendem η ansteigt. Die Abhängigkeit vom Orthotropie-Parameter η ist jedoch deutlich kleiner als bei den Beulfaktoren, im Bereich kleiner \bar{c}_φ -Werte sogar vernachlässigbar gering.

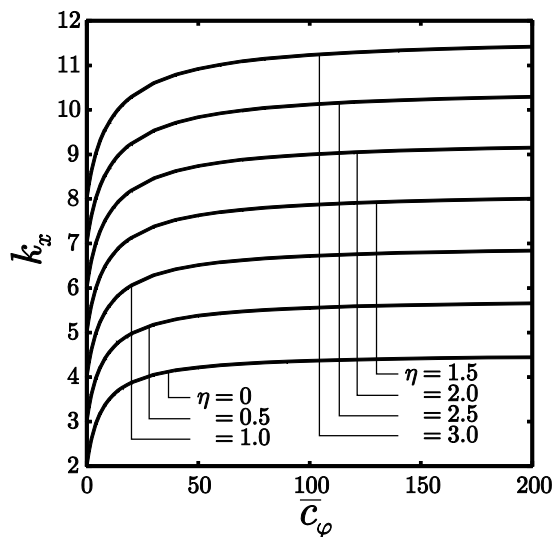


BILD 2. Dimensionslose Beullast bei reiner Druckbelastung in Abhängigkeit von \bar{c}_φ und η

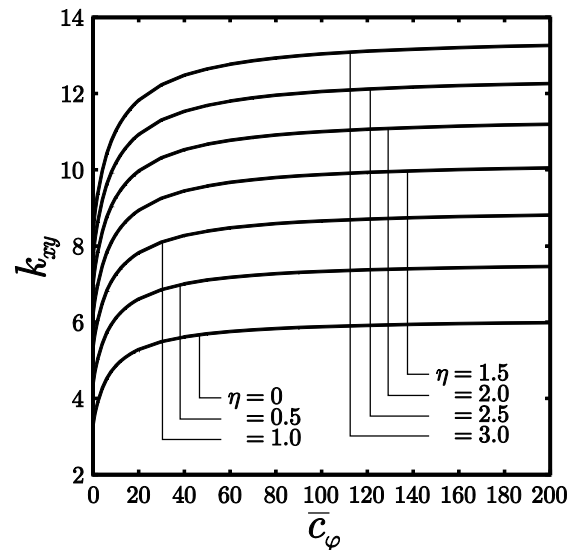


BILD 4. Dimensionslose Beullast bei reiner Schubbelastung in Abhängigkeit von \bar{c}_φ und η

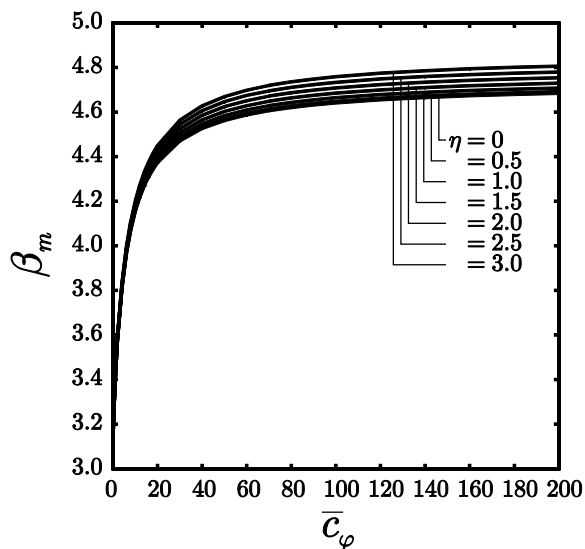


BILD 3. Bezogene Halbwellenzahl bei reiner Druckbelastung in Abhängigkeit von \bar{c}_φ und η

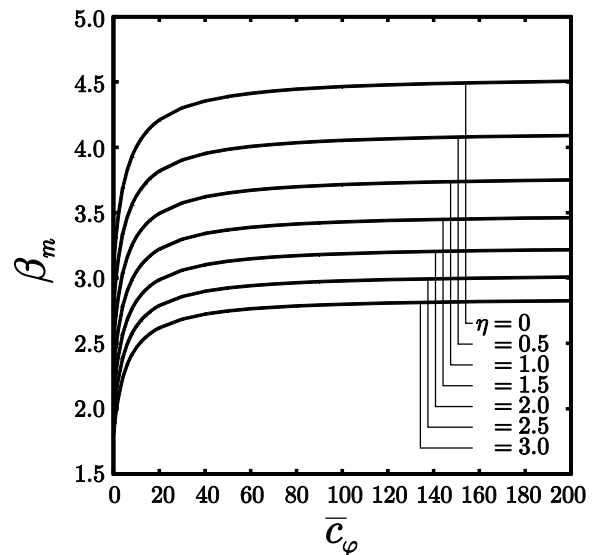


BILD 5. Bezogene Halbwellenzahl bei reiner Schubbelastung in Abhängigkeit von \bar{c}_φ und η

4.2. Reine Schubbelastung

Im Bezug auf die Einflussgrößen η und \bar{c}_φ verhält sich die Beullast bei Schubbelastung (BILD 4) qualitativ sehr ähnlich wie im Falle der reinen Druckbelastung. Die weiter oben beschriebenen Zusammenhänge gelten also auch hier. Deutlich anders sieht dagegen der Verlauf der bezogenen Halbwellenzahl aus (BILD 5). Für ein konstantes η erinnert dieser eher an die Verläufe der Beullasten nach (BILD 2 und BILD 4). Kontrovers dazu sinkt die Halbwellenzahl jedoch mit wachsendem η .

5. NÄHERUNGSLÖSUNGEN FÜR BEULFAKTOR UND HALBWELLENZAHL

Obwohl der im letzten Teil von Abschnitt 3 beschriebene Algorithmus eine Bestimmung von Beulfaktor und Halbwellenzahl erlaubt, ist es gerade für die Anwendungsgebiete des Vorentwurfs und der Optimierung günstig, recheneffizientere Näherungslösungen zu verwenden.

Unter Berücksichtigung der aus Abschnitt 4 gewonnenen Erkenntnisse über die allgemeine Abhängigkeit zwischen Beulfaktor und Beulhalbwellenzahl von Drehfedersteifigkeit und Orthotropie-Parameter werden im folgenden mittels Regression Näherungsgleichungen für diese beiden Größen gewonnen. Als Grundlage hierfür wird zunächst eine Vielzahl von Daten für den Beulfaktor und die Halbwellenzahl erzeugt. Konkret werden alle Kombinationen von 31- η - und 56 \bar{c}_φ -Werten, insgesamt also 1736 Daten-

punkte, berücksichtigt. Das Intervall der η -Werte reicht dabei von 0 bis 3 in Schritten von 0.1, das der \bar{c}_φ -Werte von 0 bis 1E12, wobei die Schrittweite mit steigendem \bar{c}_φ immer weiter zunimmt. Verbindet man diese Punkte mit einer Fläche, so sind die Schnittkurven an verschiedenen Positionen von η und \bar{c}_φ jeweils ähnlich. Aus diesem Grunde bietet es sich an, die Regression im β_m - \bar{c}_φ -Gebiet in zwei hintereinandergeschaltete Regressionen aufzuteilen. Im ersten Schritt wird an jeder η -Position ein Ansatz für die Abhängigkeit von der Drehfedersteifigkeit bei konstantem η gemacht. Hierfür erweist sich ein rationales Polynom nach (2.21) als vorteilhaft.

$$(2.21) \quad f(\bar{c}_\varphi, \eta) = \frac{p_1 \cdot \bar{c}_\varphi + p_2}{\bar{c}_\varphi + q_1}$$

Darin sind die Koeffizienten p_i und q_i abhängig von η . Im zweiten Schritt wird nun eine Regression für diese Koeffizienten als Funktion von η durchgeführt.

5.1. Reine Druckbelastung

Für den Fall der reinen Druckbelastung sind die Koeffizienten p_i und q_i aus (2.21) einerseits für den Beulfaktor (2.22) und andererseits für die Halbwellenzahl (2.23) angegeben.

$$(2.22) \quad \begin{aligned} p_1(\eta) &= 2.326\eta + 4.584 \\ p_2(\eta) &= 2.52\eta^2 + 19.15\eta + 13.95 \\ q_1(\eta) &= \frac{28.65\eta + 75.35}{\eta + 10.77} \end{aligned}$$

$$(2.23) \quad \begin{aligned} p_1(\eta) &= 0.007\eta^2 + 0.023\eta + 4.72 \\ p_2(\eta) &= \frac{0.864\eta + 18.02\eta + 44.4}{\eta + 2.468} \\ q_1(\eta) &= \frac{0.272\eta + 5.71\eta + 13.63}{\eta + 2.39} \end{aligned}$$

5.2. Reine Schubbelastung

Bei reiner Schubbelastung können folgende Ausdrücke zur näherungsweisen Bestimmung von Beulfaktor (2.24) und Halbwellenzahl (2.25) verwendet werden:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} p_1(\eta) &= \frac{41.65\eta + 69.73}{\eta + 11.42} \\ p_2(\eta) &= \frac{234\eta + 220.7}{\eta + 8.13} \\ q_1(\eta) &= \frac{10.44\eta + 8.83}{\eta + 1.08} \end{aligned}$$

$$(2.25) \quad \begin{aligned} p_1(\eta) &= \frac{22.9}{\eta + 5.04} \\ p_2(\eta) &= 0.457\eta^2 - 4\eta + 18.35 \\ q_1(\eta) &= 0.0115\eta^5 - 0.109\eta^4 + 0.3916\eta^3 \\ &\quad - 0.621\eta^2 + 0.3\eta + 5.914 \end{aligned}$$

Die Bandbreite der relativen Abweichungen zwischen der Lösung der PDGL und der mittels Regressionsformeln gewonnenen Werte ist in TAB 1 gegeben. Mit einem maximalen Betrag der Abweichung von 2.5 % kann die Regression als sehr brauchbar angesehen werden. Desweiteren sind die Abweichungen bei den Beulfaktoren stets negativ, also auf der sicheren Seite.

TAB 1. Maximale und minimale relative Abweichungen zwischen Regressionslösungen und den Lösungen der PDGL

	Δ [%]			
	k		β_m	
Reiner Druck	-2.5	-0.1	-0.5	0.5
Reiner Schub	-1.9	-0.1	-1.0	1.0

6. INTERAKTIONSFORMEL FÜR KOMBINIerte DRUCK-SCHUB-BELASTUNG

Im Falle kombinierter Belastungen ist es üblich die Ergebnisse in Form von Interaktionskurven darzustellen. Hierbei werden die Koordinaten eines Punktes durch das Verhältnis R von vorliegender Belastung zur maximal zulässigen Belastung für die jeweilige Belastungsart bestimmt (2.26).

$$(2.26) \quad R_x = \frac{k_x}{k_{x,\max}}; \quad R_{xy} = \frac{k_{xy}}{k_{xy,\max}}$$

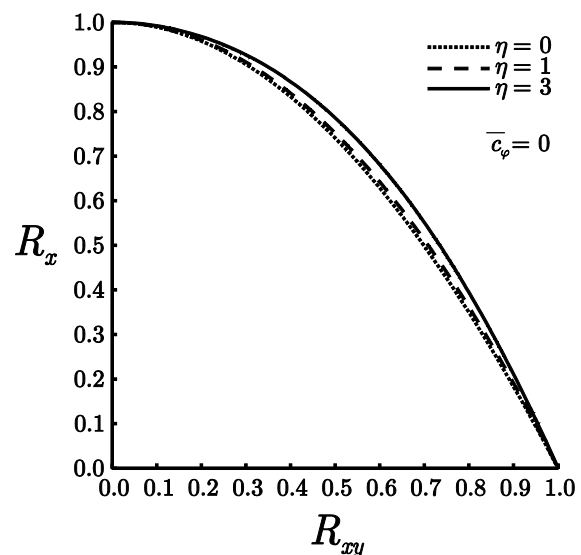


BILD 6. Interaktionskurven für $\bar{c}_\varphi = 0$ und variables η

Zunächst soll an Hand einiger Grafiken der Verlauf der Interaktionskurven für die gegenwärtige Struktur und Belastung untersucht werden. Hierbei ist es hilfreich die Ab-

hängigkeit des Kurvenverlaufs R_x über R_{xy} von der Federsteifigkeit und dem Orthotropie-Parameter getrennt zu betrachten.

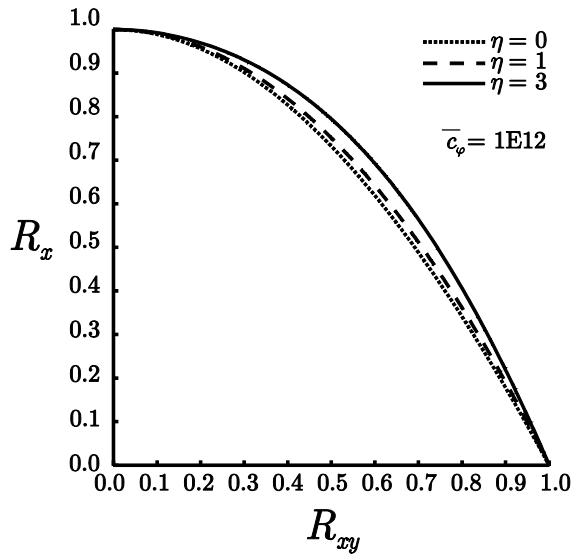


BILD 7. Interaktionskurven für $\bar{c}_\phi = 1\text{E}12$ und variables η

In den ersten beiden Grafiken (BILD 6 und BILD 7) wird die Federsteifigkeit jeweils konstant gehalten und η variiert. Der Fall $\eta = 1$ entspricht dabei dem eines isotropen Plattenstreifens. Es ist bei beiden Grafiken festzustellen, dass die Kurven mit zunehmendem η nach außen wandern, also „bauchiger“ werden. Eine steigende Federsteifigkeit bewirkt, dass der Abstand der Kurven sich leicht vergrößert.

BILD 8 und BILD 9 zeigen Interaktionskurven mit konstantem \bar{c}_ϕ und variabler Federsteifigkeit. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Einfluss der Federsteifigkeit sehr gering ist, da die Kurven in BILD 8 und BILD 9 nahezu aufeinanderliegen.

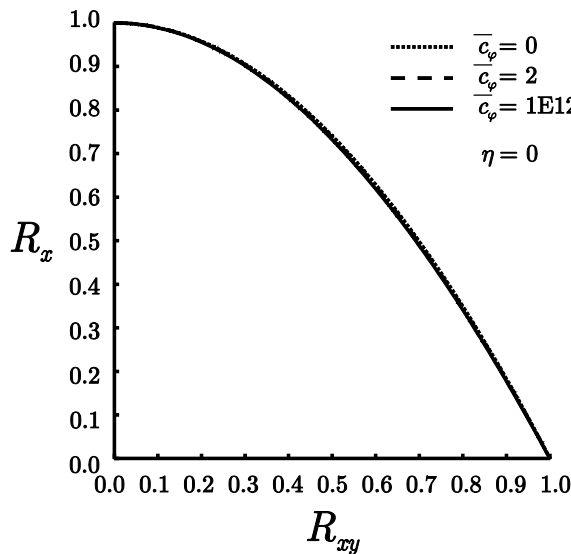


BILD 8. Interaktionskurven für $\eta = 0$ und variables \bar{c}_ϕ

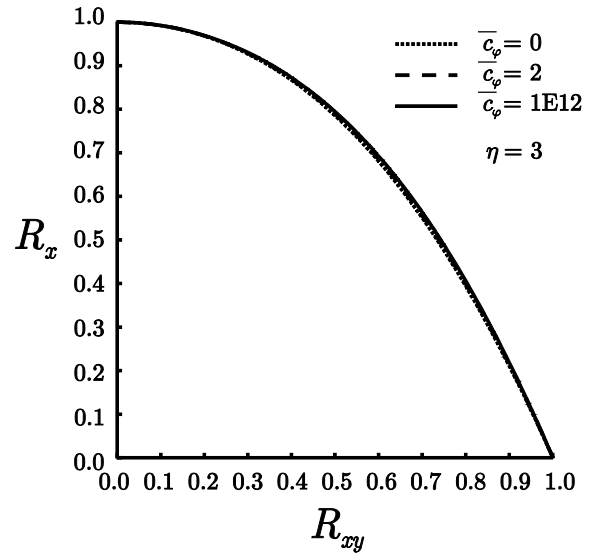


BILD 9. Interaktionskurven für $\eta = 3$ und variables \bar{c}_ϕ

Im Gegensatz zu den beiden vorher diskutierten Bildern wechselt jetzt jedoch die Reihenfolge der Kurven von innen nach außen. So wandern im Falle von $\eta = 0$ die Kurven mit abnehmender Federsteifigkeit nach außen, wohingegen es im Falle $\eta = 3$ umgekehrt ist. Der Grenzfall in dem sich die Reihenfolge der Kurven von innen nach außen ändert liegt bei $\eta = 1$, wo alle Kurven für beliebige Federsteifigkeiten übereinander liegen.

Ziel der gegenwärtigen Untersuchungen ist, zu prüfen, ob sich der Anwendungsbereich der für isotrope Werkstoffe gültigen Interaktionsformel auf den Bereich der orthotropen Platten mit elastisch eingespannten Längsrändern erweitern lässt. Diese lautet für kombinierte Druck- und Schubbelastung:

$$(2.27) \quad R_x + R_{xy}^2 = 1$$

Hierin ist R das Lastverhältnis nach (2.26). In einem Überblick zum Beulen von isotropen und orthotropen Platten [2] wird eine Arbeit [13] zitiert, welche angibt, dass Interaktionsformel (2.27) auch für orthotrope Platten verwendet werden könne. Diese ist im Original aber leider nicht mehr auffindbar, sodass die Grundlagen dieser Empfehlung nicht nachvollzogen werden können.

An dieser Stelle wird folgender allgemeiner Ansatz für die Interaktionsformel gemacht:

$$(2.28) \quad R_x + R_{xy}^a = 1$$

Als Grundlage für die folgenden Betrachtungen werden zunächst für eine Anzahl η - \bar{c}_ϕ -Kombinationen die Lastverhältnisse nach (2.26) berechnet. Hierbei erstrecken sich die η -Werte im Intervall von 0 bis 3 in Schritten von 0.2, \bar{c}_ϕ nimmt die Werte 0, 2, 4, 8, 20, 200, 1000 und 1E12 an. Zudem wird das Verhältnis δ nach (2.13) über das Spektrum von reinem Druck bis zu reinem Schub mit einem Inkrement von 0.0125 variiert. Somit ergeben sich insgesamt 20608 Werte, welche sicherstellen sollen, dass die folgenden Resultate für die gesamte Bandbreite von

Lastverhältnissen, Orthotropie-Parametern und Federsteifigkeiten gültig sind.

Zwei wesentliche Erkenntnisse bezüglich des Einflusses der Parameter \bar{c}_ϕ und η aus der Auswertung der Interaktionskurven sollen in die Ermittlung der verallgemeinerten Interaktionsformel einfließen:

- Die Betrachtung von BILD 6 und BILD 7 offenbart, dass die Sensitivität der Kurven bezüglich η relativ ausgeprägt ist und nicht vernachlässigt werden sollte.
- Es ist deutlich zu erkennen, dass der Einfluss der Federsteifigkeit sehr gering ist, da die Kurven in BILD 8 und BILD 9 nahezu aufeinanderliegen. Aufgrund dessen wird die Federsteifigkeit bei Bestimmung des Exponenten a aus (2.28) nicht berücksichtigt.

Der Anspruch, mit der Interaktionsformel die gesamte Bandbreite von η - \bar{c}_ϕ -Kombinationen abzudecken, und die damit verbundene Datenmenge (s. o.) führen dazu, dass der Regressionsvorgang mittels eines Skriptes automatisiert wird. Hierbei werden diverse Funktionstypen, als auch unterschiedliche Grade, erprobt. Im Ergebnis zeigt sich ein Polynomansatz zweiten Grades (2.29) als beste Wahl.

$$(2.29) \quad a = 0.007\eta^2 + 0.1\eta + 1.9$$

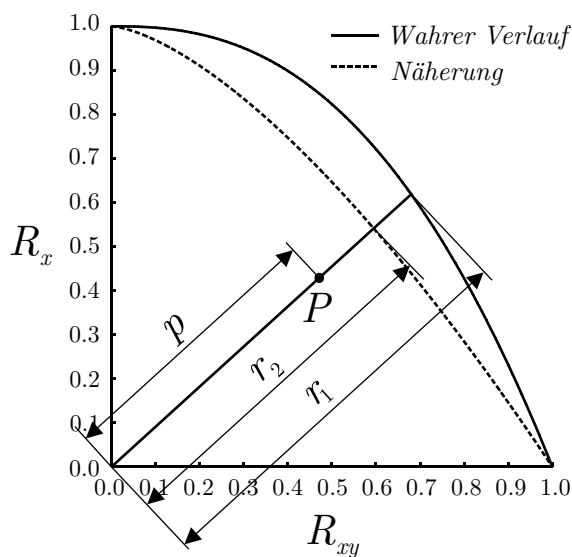


BILD 10. Benötigte Strecken zur Bestimmung des Reservefaktors für Belastungssituation P

Zur Ermittlung des Reservefaktors für eine Lastsituation, welche durch den Punkt P repräsentiert wird, benötigt man einerseits die Strecke p zwischen Nullpunkt und dem Punkt P, sowie die Strecke r zwischen Nullpunkt und der Interaktionskurve. Diese liegt auf derselben Wirkungslinie wie p (BILD 10). Für den Reservefaktor RF folgt dann:

$$(2.30) \quad RF = \frac{r}{p}$$

Wird zur Beschreibung der Interaktionskurve eine Näherung verwendet, so ergibt sich für den relativen Fehler des Reservefaktors mit den Streckenbezeichnungen nach BILD 10:

$$(2.31) \quad \Delta = \frac{r_2 - r_1}{r_1}$$

Wie TAB 2 zu entnehmen ist, beträgt das Spektrum der relativen Abweichung bei Verwendung des neuen Ansatzes lediglich -0.73 bis 0.68 Prozent. Dem gegenüber steht eine Fehlerbandbreite von -3.8 bis 1.6 Prozent bei Verwendung der für isotrope Werkstoffe bekannten Interaktionsformel. Setzt man im Falle eines isotropen Plattenstreifens für η den Wert 1 ein, so nimmt der Exponent nach (2.29) den Wert 2.007 an, der sich nur unwesentlich von $a = 2$ in (2.27) unterscheidet.

TAB 2. Maximale und minimale relative Abweichungen der Interaktionskurven zu den Lösungen der PDGL

	Δ [%]	
IK_{neu}	-0.73	0.68
IK_{iso}	-3.77	1.56

7. FAZIT

Die Darstellung der Lösung der PDGL des betrachteten Problems in Form von generischen Kurvenscharen liefert gute Einblicke in das Beulverhalten des Plattenstreifens unter kombinierter Druck- und Schubbelastung. Aufgrund der Ähnlichkeit der Kurvenverläufe lassen sich mittels Regression Formeln gewinnen, mit denen die Lösung der PDGL auf drei Prozent genau approximiert werden kann, wobei der Rechenaufwand wesentlich geringer ist.

Mittels der hergeleiteten, erweiterten Interaktionsformel ist es möglich den tatsächlichen Verlauf der Interaktionskurve deutlich besser zu beschreiben, als mit der für den isotropen Fall bekannten Formel. Die Bandbreite des relativen Fehlers sinkt dadurch von ca. 6 % auf weniger als 2 %.

Sowohl die Regressionsformeln für die Beullast, als auch diejenige für die Interaktionskurven lassen sich vorteilhaft in Bereichen verwenden, wo unter Hinnahme von gewissen Abweichungen, vor allem die Vorteile eines minimalen Berechnungsaufwands entscheidend sind. Dies ist unter anderem bei Optimierung und Vorentwurf der Fall.

8. LITERATUR

- [1] P. Qiao, J. F. Davalos, und J. Wang, "Local buckling of composite FRP shapes by discrete plate analysis," *Journal of Structural Engineering*, Nr. 127, S. 245 - 255, 2001.
- [2] D. J. Johns, *Shear buckling of isotropic and orthotropic plates - a review*. London: Ministry of defence, 1971.
- [3] E. Z. Stowell und E. B. Schwartz, *Critical stress for an infinitely long flat plate with elastically restrained edges under combined shear and direct stress*. Hampton, Virginia: NACA, 1943.
- [4] T. Dörfler, *Beulverhalten und Optimierung längsversteifter Gurtplatten unter Schub- und Druckbelastung*, Bd. 229. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1993.
- [5] W. Thielemann, *Contribution to the problem of buckling of orthotropic plates, with special reference to plywood*. Hampton, Virginia: NACA, 1950.
- [6] M. P. Nemeth, *Buckling behavior of long symmetri-*

- cally laminated plates subjected to combined loadings.* Hampton, Virginia: NASA, 1992.
- [7] M. P. Nemeth, *Buckling behavior of long anisotropic plates subjected to combined loads.* Hampton, Virginia: NASA, 1995.
 - [8] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, 2. Aufl. Philadelphia: Taylor and Francis, 1999.
 - [9] L. P. Kollar und G. S. Springer, *Mechanics of composite structures.* Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
 - [10] J. Wiedemann, *Leichtbau - Elemente und Konstruktion*, 3. Aufl. Berlin et al.: Springer, 2007.
 - [11] F. R. Shanley, *Strength of materials.* New York: McGraw-Hill, 1957.
 - [12] E. J. Brunelle und G. A. Oyibo, "Generic buckling curves for specially orthotropic rectangular plates," *AIAA Journal*, Bd. 21, Nr. 8, 1982.
 - [13] *Buckling of orthotropic plates (corrugated plate applications).* Bell Aerosystems, 1961.