

METHODEN ZUR FLUGMECHANISCHEN IDENTIFIZIERUNG EINES KOAXIAL-HUBSCHRAUBER UAVS

S. Löchelt, W. Alles, D. Moormann
Lehrstuhl für Flugdynamik - RWTH Aachen,
Wüllnerstraße 7, 52062 Aachen, Deutschland

Zusammenfassung

Nachfolgender Beitrag gibt einen Überblick zur flugmechanischen Identifizierung eines unbemannten Koaxialhubschraubers. Es werden die grundlegenden theoretischen Aspekte kurz vorgestellt und es wird auf die Besonderheiten bei der Anwendung auf Hubschrauber eingegangen. Die wesentlichen Bewegungsformen werden erläutert und mit Ergebnissen aus der Literatur angeführt. Voraussetzungen der Messwertaufnahme und Signalverarbeitung werden ebenso angeschnitten wie Beispiele zur nichtlinearen Simulation eingeführt.

1. EINLEITUNG

Hubschrauber UAVs bieten durch ihre Flugeigenschaften vielseitige Einsatzmöglichkeiten im Bereich autonomer Systeme und luftbeweglicher Robotik. Hierzu gehört unter anderem die autonome Navigation in unbekannten Bereichen mit Hindernissen ebenso wie der autonome Außenlasttransport inklusive selbständiger Lastaufnahme und Lastabsetzen. Durch das Fehlen des Piloten und die inhärenten Instabilitäten ist zur autonomen Missionserfüllung ein Flugregelungs- und Führungssystem notwendig, welches die Anforderungen aus der Missionssteuerung möglichst genau und sicher erfüllen kann. Der klassische Weg bei der Reglerauslegung basiert dabei meist auf einer Simulation, die die dynamischen Eigenschaften des Hubschraubers je nach Anwendung im interessierenden Bandbreitenbereich hinreichend genau wiedergibt. Traditionell basieren Rotor-Simulationsmodelle auf Blattelementenmodellen, die je nach Detaillierungsgrad um die unterschiedlichen aerodynamischen und dynamischen Effekte an den Blättern erweitert werden.

Für die Reglerauslegung werden aus diesen im allgemeinen Fall nichtlinearen Simulationsmodellen lineare Modelle erstellt, da es auch heute noch keine allgemein gültige Theorie zu nichtlinearen Reglern bezüglich des Stabilitätsnachweises gibt. Mit Hinblick auf Zertifizierungsaspekte unbemannter Fluggeräte ist außerdem davon auszugehen, dass klassische Auslegungsverfahren, die auf einer linearen Beschreibung basieren durch ihren konservativen Ansatz bevorzugt werden.

Ein wesentlicher Aspekt bei dem oben beschriebenen Vorgehen zur Entwicklung eines Flugführungs- und Regelungssystems bei UAVs stellt der Abgleich der verwendeten Modelle und Simulation mit realen Flugversuchsergebnissen dar. Über die Methode der Systemidentifizierung ist es möglich, anhand der Messdaten von Ein- und Ausgangsgrößen eines Systems die unbekannten Parameter der Systemdynamik zu bestimmen. Eine genaue Kenntnis der Systemeigenschaften erlaubt dabei das Leistungspotential und den Flugbereich des Fluggerätes optimal auszunutzen. Der folgende Beitrag gibt eine Übersicht über einige ausgewählte Methoden der Systemidentifizierung und ihre Anwendung auf einen Koaxial-Hubschrauber.

Die Methoden werden anhand einer nichtlinearen Simulation des Koaxialhubschraubers untersucht und validiert. Außerdem werden die wesentlichen Aspekte der Hubschrauberdynamik angesprochen und ihre Auswirkung auf die Identifizierung aufgezeigt. Dabei wird im Rahmen dieses Beitrages auf die hardwareseitigen Voraussetzungen nicht eingegangen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Messwerte in ausreichend guter Qualität konsistent vorliegen und etwaig notwendige Datenvorbereitung bereits durchgeführt worden ist. Dies ist zumindest für die Identifizierung der niedrigen bis mittleren Dynamik als eine zulässige Annahme anzusehen. Außerdem wird davon ausgegangen, dass Störungen, wie z.B. durch Böen, nicht explizit miterfasst werden können und zusammen mit dem Rauschen vernachlässigbar sind.

2. THEORIE DER SYSTEMIDENTIFIZIERUNG

Bei der Systemidentifizierung werden anhand von Messdaten der Ein- und Ausgangsgrößen die Parameter der Systemdynamik und die Struktur des Modells bestimmt. Ist die Struktur des Modells, also insbesondere auch dessen Ordnung bekannt, so spricht man von der Parameteridentifizierung. Bei Bewegungsgleichungen von Fluggeräten kann man davon ausgehen, dass zumindest für den Starrkörperfall die Struktur somit bekannt ist und damit nur die Modellparameter bestimmt werden müssen. Des Weiteren unterscheidet man bei der Identifizierung zwischen dem Vorgehen im Frequenz- und im Zeitbereich. Der vorliegende Beitrag behandelt die Identifizierung im Zeitbereich.

Ziel der Identifizierung ist im linearen Fall die Bestimmung der Zustandsraumdarstellung für die Flugdynamik eines Fluggerätes. Hierbei handelt es sich im allgemeinen um ein verkoppeltes Mehrgrößensystem (MIMO), das aus der Linearisierung der Bewegungsgleichungen ermittelt wird, siehe auch [1]. Das Systemverhalten an sich ist jedoch als nichtlinear anzusehen, dies bedeutet, dass die zu bestimmenden Parameter sich nicht konstant über der Änderung des Systemzustandes halten, so dass sie selber zu Variablen des Systems in Abhängigkeit des Systemzustandes werden und somit mehrere Parametersätze für eine lineare Beschreibung über dem Flugbereich bestehen.

Dadurch, dass hierbei sowohl Messrauschen, also eine Verfälschung der zu erfassenden Werte beim Messvorgang, als auch Prozessrauschen, also eine ungenügende Repräsentation des Systemverhaltens im Modell durch fehlende Struktur oder auch nicht erfasste Störgrößen vorkommt, können die exakten Werte des Systems nur näherungsweise unter den damit verbundenen Einschränkungen identifiziert werden. Der Ansatz ist in BILD 1 dargestellt. Der Eingangsvektor u und der Ausgangsvektor y , der durch die unbekannten Einflüsse v verfälscht ist, werden ausgewertet, um Modell und Parameter zu bestimmen.

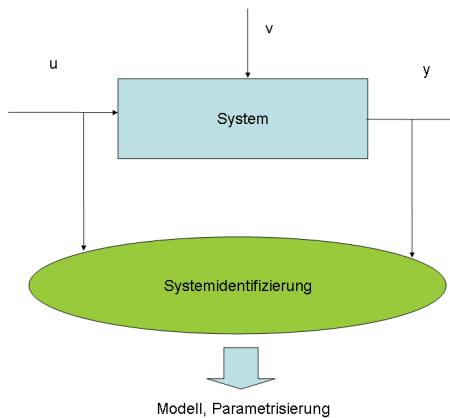


BILD 1. Vereinfachte Darstellung der Systemidentifizierung

2.1. Methoden in der Identifizierung Flugmechanischer Kenngrößen

Es gibt eine Vielzahl von Ansätzen und Algorithmen zur Identifizierung, sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich, wobei letzterer durch die einfachere Anwendung überwiegt. Im Fall von Flugzeugen haben sich bei den klassischen Verfahren insbesondere die Gleichungs- und die Ausgangsfehlermethode bewährt. Außerdem gibt es Ansätze, die über eine Filterung arbeiten. Eine relativ neue Anwendung stellt der Gebrauch von Neuronalen Netzen zur Identifizierung dar. Da hierbei das System als Black-Box nachmodelliert wird, können die Systemparameter, die direkt mit der Physik des Systems in Verbindung stehen, nicht ohne weiteres extrahiert werden. Die Neuronalen Netze bieten dafür aber den Vorteil, theoretisch beliebig komplexe, nichtlineare Zusammenhänge abbilden zu können.

Ziel jeder Identifizierung ist es, mit einem möglichst einfachen Modell die Systemantwort über der Zeit hinreichend genau nachstellen zu können. Eine sehr ausführliche Darstellung der Theorie bietet [1]. Außerdem sind hier die jeweiligen Algorithmen unter MATLAB implementiert, die im Folgenden hier für den Koaxialhubschrauber entsprechend angepasst wurden.

2.2. Generierung von Eingangssignalen

Eingangssignale zur Systemidentifizierung müssen so angelegt sein, dass sie das System dynamisch anregen. Das bedeutet, dass höherfrequente Eigenbewegungsfor-

men mit schnelleren Anregungen als langsamere Eigenbewegungsformen angeregt werden müssen. Außerdem muss genug Zeit vorhanden sein, um die freie Systemantwort ohne weitere Ansteuerung von außen erfassen zu können. Dies stellt insbesondere bei Hubschraubern, die dynamisch instabil sind, ein Problem dar, da sich durch die Instabilität das System von seinem Auslegungspunkt entfernt und somit die Voraussetzung kleiner Änderungen, um hiermit linearisierte Modelle zu erstellen, nicht mehr gegeben sind. Andererseits folgt hieraus, dass sich die instabilen Eigenbewegungsformen deutlicher zeigen, als dies bei Stabilität der Fall wäre. Prinzipiell gibt es bei den Anregungssignalen Mehrsprung-Signale und periodische Anregungen wie z.B. durch Sinus-Funktionen mit veränderlicher Frequenz („frequency sweeps“), die sich insbesondere für Methoden im Frequenzbereich eignen. Während im letztgenannten Fall sich der Frequenzgehalt des Signals direkt aus der Kreisfrequenz ergibt, ist bei Mehrsprungssignalen dies abhängig von der gewählten Zeitbasis der Signale. Weit verbreitete Signale, die auch durch Piloten erzeugt werden können sind Sprungeingänge, Dubletten und „3211“-Signale sowie deren Modifikation. Eine Übersicht hierzu kann [1] entnommen werden. Dadurch, dass bei UAVs ein Regelungssystem vorhanden ist, bietet sich die Möglichkeit, beliebige Eingangssignale exakt und reproduzierbar zu erzeugen, die für einen normalen Piloten nur schwer oder über aufwändige Vorbereitung durchführbar wären.

2.3. Auswertungslänge

Ein wesentlicher Einfluss bei Identifizierungsmanövern stellt die Zeit für die Messwertaufnahme dar. Während Steuerderivative sich in ihrer Wirkung quasi direkt in den Messwerten wiederfinden, erfordert die Auswertung von langsam ablaufenden Bewegungen einen ausreichend langen Zeitintervall, um die komplette Bewegung aufnehmen zu können. Das Problem der zuvor erwähnten Instabilität kommt auch hierbei zum Tragen. In [2] sind Fälle beschrieben, in denen ein zu kurzes Zeitintervall sich nachteilig auf die Identifizierung der lang-periodischen Eigenbewegungsformen auswirkt. Hierzu gehören beim Hubschrauber die Phygoide im Vorwärtsflug aber auch die Geschwindigkeitsinstabilität in Längs- und Seitenbewegung im Schwebeflug.

2.4. Messwertaufnahme

Die Messwertaufnahme ist stark vom zu untersuchenden System abhängig. Heute sind zuverlässige und präzise Messeinrichtungen vorhanden, die sich auch in kleinere UAVs integrieren lassen, da die meisten Messdaten ohnehin für das obligatorische Regelungssystem vorhanden sein müssen. Eine Kombination aus INS und GPS, Magnetometern sowie Druckaufnehmer zur Bestimmung der barometrischen Höhe und aktive Sensoren (RADAR, LASER oder auch Ultraschall) zur Bestimmung der Höhe über Grund mit entsprechender Kalman-Filterung ist dabei als Standard anzusehen. Insbesondere bei Hubschrauber UAVs wird dabei oft auf die Messung der aerodynamischen Größen wie Staudruck und Anstell- sowie Schiebewinkel verzichtet, da sich diese im schwebenahen Flug nur ungenau erfassen lassen [3]. Voraussetzung für verwendbare Flugdaten ist ein Flug mit möglichst geringen Störungen. Hierdurch entsprechen die Bahnges-

schwindigkeiten im körperfesten System betragsmäßig den Anströmgeschwindigkeiten.

2.5. Datenvorbereitung

Um sinnvolle Ergebnisse aus den Messdaten zu erhalten, müssen diese auf ihre Konsistenz untersucht werden. Neben einfachen Plausibilitätsprüfungen gibt es auch aufwändige Verfahren, um Ausreißer sowie Bias in den Daten aufzudecken und zum Beispiel durch Filterung zu beheben. Bei der Filterung werden digitale Filter eingesetzt, um einen Phasenverlust des Messsignals zu verhindern [1]. Zu den aufwändigeren Verfahren gehört hierbei die *Flight Path Reconstruction*. Hierbei werden die Messdaten integriert ausgewertet und die Trajektorie des Fluggerätes und seine Lage zu Kontrollzwecken anhand der Messdaten validiert. Details finden sich in [1], [3]. Da dieser Prozess ebenfalls für den Einzelfall sehr spezifisch ist, wird er hier nicht weiter betrachtet.

3. ALGORITHMEN

3.1. Gleichungsfehlermethode

Die Gleichungsfehlermethode stellt einen weitverbreiteten Ansatz zur Identifizierung im Zeitbereich dar. Hierbei werden die linearen Parameter des Modells so optimiert, dass der quadratische Fehler zwischen Messwerten und Modellantwort minimiert wird. Die Grundidee ist hierbei, dass eine abhängige Ausgangsgröße y , die auch als Regressand bezeichnet wird, durch lineare Kombination der mit den zu ermittelnden Parametern zu multiplizierenden unabhängigen Zustandsgrößen x_i , den sogenannten Regressoren, entsteht. Die Struktur des Ansatzes ist nachfolgend in BILD 2 gezeigt:

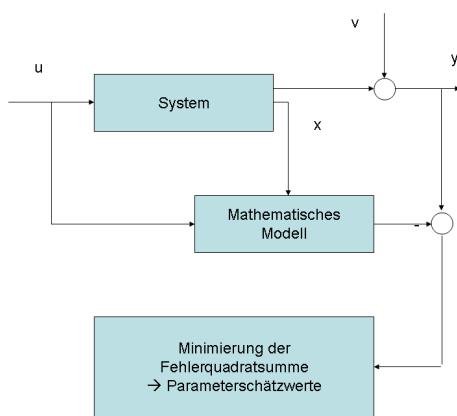


BILD 2. Struktur der Gleichungsfehlermethode nach [1]

Die unbekannten Parameter stehen also für eine mehrdimensionale Geradengleichung, bei denen der quadratische Fehler zwischen Modell und Systemantwort so klein wie möglich gehalten werden soll.

Dies wird über eine Minimierung der Fehlerquadrate ϵ ausgedrückt, so dass man bei dem Verfahren auch häufig von einem „least square“ Ansatz spricht. In der Literatur

wird gezeigt, dass das Ergebnis mit zunehmender Messdatenbasis und entsprechender Systemanregung sich monoton asymptotisch den wahren Werten annähert. Außerdem stellt die Gleichungsfehlermethode einen algebraischen Algorithmus dar, der im Fall von Mehrgrößen- system zu einer Matrix-Algebra führt, die über entsprechende Programm pakete wie z.B. *MATLAB* elegant gelöst werden kann (backslash operator). Hierbei wird ein lineares Gleichungssystems gelöst, welches der Änderung des Zustandsvektors über der Zeit entspricht, bedingt durch Zustands- und Eingangsgrößen des Systems. Im einfachsten Fall entspricht dies dem ersten Teil der Zustandsraumdarstellung, wobei sich innerhalb der Systemmatrix A und der Steuermatrix B die gesuchten Parameter befinden. Die Ausgangsmatrix wird zur Einheitsmatrix und die Durchgangsmatrix zur Nullmatrix gesetzt, was in der grundlegenden Beschreibung flugmechanischer Vorgänge gegeben ist:

$$(1) \dot{x} = Ax + Bu.$$

Dadurch, dass ein Gleichungssystem für die zeitliche Änderung des Zustandsvektors gelöst wird, ist diese Methode ohne Weiteres auf instabile Systeme wie Hubschrauber anwendbar.

3.2. Ausgangsfehlermethode

Die Ausgangsfehlermethode stellt einen iterativen Ansatz dar, um System und Modellantwort in möglichst gute Übereinstimmung zu bringen. Oftmals wird hierbei eine wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung nach dem Prinzip der Maximum-Likelihood Methode angewandt. Idee ist, die Parameter des Modells so anzupassen, dass sie den Messwerten eine möglichst hohe Wahrscheinlichkeit verleihen. Dieser Punkt wird oft missverstanden, indem man davon ausgeht, dass man den Parametern eine möglichst hohe Wahrscheinlichkeit verleihen möchte, was allerdings hierbei nicht der Fall ist. Die Struktur ist BILD 3 zu entnehmen.

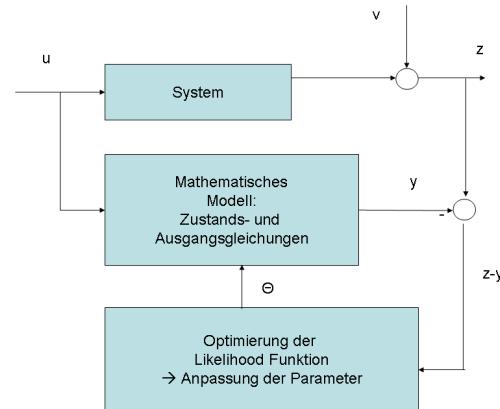


BILD 3. Struktur der Ausgangsfehlermethode nach [1]

p bezeichnet im Nachfolgenden die Likelihood-Funktion für einen Messvektor z zu N Zeitpunkten unter der Voraussetzung, dass der Parametervektor Θ gilt. Für eine Messreihe lässt sich die entsprechende Wahrscheinlichkeit über eine Multiplikation über alle Einzelwerte N aufstellen. Für eine möglichst gute Identifizierung ist das Ziel,

diesen Wert zu maximieren:

$$(2) \quad p(z | \Theta) = p(z_1 | \Theta) \cdot p(z_2 | \Theta) \cdots p(z_N | \Theta) = \prod_{k=1}^N p(z_k | \Theta)$$

Um eine Kostenfunktion nach dem Maximum Likelihood Prinzip aufzustellen zu können, wird den Messwerten eine Wahrscheinlichkeitsdichte zugewiesen. Geht man von einer Normalverteilung der Messwerte mit dem Mittelwert 0 und einer Messfehler-Kovarianzmatrix R aus, sowie der Tatsache, dass die Dichtefunktion einen exponentiellen Verlauf hat, so kommt man auf die logarithmierte Form der Likelihood-Funktion mit der selben optimalen Lösung:

$$(3) \quad \hat{\Theta}_{ML} = \arg \left\{ \min_{\Theta} \ln p(z | \Theta) \right\}.$$

Für eine Bestimmung des Maximums können unter der Voraussetzung der zweifachen Differenzierbarkeit hier ebenfalls die Ableitungen bestimmt werden. Als notwendige Bedingung folgt:

$$(4) \quad \frac{\partial \ln p(z | \Theta)}{\partial \Theta} = 0.$$

Man kann zeigen, dass die Minimierung dieser so erhaltenen Kostenfunktion in Abhängigkeit vom Parametervektor der Minimierung der Determinante der Kovarianzmatrix R entspricht, siehe [1].

Für die Lösung stehen verschiedene iterative Ansätze unter Verwendung des Gauß-Newton Algorithmus oder auch der Levenberg-Marquardt Methode zur Verfügung. Die Methode ist durch die Verwendung von Optimierungsverfahren abhängig von den Startwerten und der Voraussetzung von normalverteilten Größen, andererseits ergibt sich aus der Schätzfehlerkovarianzmatrix direkt die Standardverteilung der gesuchten Parameter sowie ihre Korrelationskoeffizienten. Diese Vorteile werden allerdings mit einem rechentechnisch höheren Aufwand im Vergleich zur Gleichungsfehlermethode erkauft, siehe [1].

3.3. Filterbasierte Ansätze

Für den ARTIS Versuchsträger ist ein rekursiver Ansatz basierend auf dem Erweiterten Kalman Filter (EKF) Algorithmus in [4] vorgestellt worden. Grundidee ist hierbei, den unbekannten Parametervektor zusammen mit dem Zustandsvektor durch das Extended Kalman Filter schätzen zu lassen, den Zustandsvektor somit um ihn zu erweitern. Das identifizierte lineare Modell wird dann zur Auslegung eines Riccati-Reglers benutzt, der in jeden Zeitpunkt neu berechnet wird. Somit wird sichergestellt, dass das Modell für jeden Zeitpunkt nahe am Betriebspunkt liegt und die entsprechend berechneten Reglerparameter wirksam sind. Das Verfahren läuft in Echtzeit auf dem Versuchsträger und lehnt sich an den entsprechenden Ansätzen in [1] an.

3.4. Neuronale Netze

Einen relativ neuen Ansatz bilden Neuronale Netze. Hierbei wird das System im allgemeinen Fall als Black-Box identifiziert. Die Struktur der Netze weist verschiedene Schichten auf, zu denen Eingangs-, Ausgangs- und verdeckte Schicht gehören. Die Neuronen genannten Elemente innerhalb dieser Schichten besitzen Aktivierungsfunktionen, das Neuron wird also aktiv je nach aufsummiertem Eingangswert in das Neuron. Die Struktur kann BILD 4 entnommen werden.

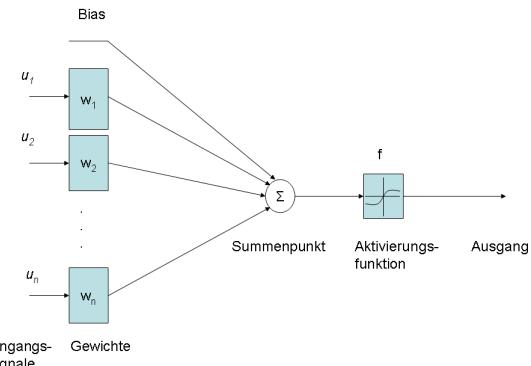


BILD 4. Einzelnes Neuron als Grundeinheit eines Neuronalen Netzes nach [1]

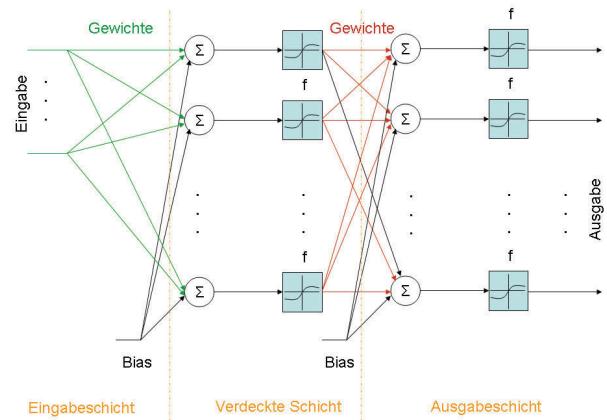


BILD 5. Struktur eines vorwärtsgerichteten Neuronalen Netzes mit einer verdeckten Schicht nach [1]

Meist verwendet man sigmoide oder ähnliche Funktionen, da diese den Vorteil der stetigen Differenzierbarkeit bieten. Die Neuronen sind über Verbindungen miteinander bzw. mit dem Eingang verbunden. Die Verbindungen entsprechen Gewichtungen, die Eingangs- auf Ausgangsgrößen abbilden, siehe BILD 5. Sollen dynamische Vorgänge modelliert werden, so bieten sich rekursive Netze an, bei denen der Ausgang aus den verdeckten Schichten wieder ins Netz zurückgeführt wird. Das Netz wird mit Hilfe von Ein- und Ausgangsdaten des Systems trainiert. Hierbei werden die Gewichtungen mittels Lernalgorithmen angepasst. Häufig wird der sogenannte Backpropagation-Algorithmus verwendet. Die Validierung erfolgt dann mit Daten, die nicht zum Training benutzt worden sind. Hierdurch lässt sich die Abstraktionsfähigkeit des Netzes für die Anwendung auf unbekannte Daten bestimmen und es kann ermittelt werden, ob sich das Netz zu stark an einen

Einzelfall adaptiert hat, was auf Kosten des Allgemeinen geht.

Mittels Neuronaler Netze lassen sich bei entsprechender Anzahl von Neuronen prinzipiell beliebige Zusammenhänge abbilden, auch ausgeprägt nichtlineare. Ihre Anwendung auf die Identifizierung erscheint hierdurch interessant, auch wenn die mitunter verloren gehende physikalische Interpretierbarkeit als nachteilig angesehen werden muss. Das Problem der Stabilität und Robustheit dieser Systeme ist Gegenstand aktueller Forschung. Eine Übersicht hierzu findet sich in ebenfalls in [1]

4. PARAMETERIDENTIFIZIERUNG VON HUBSCHRAUBERN

Durch ihre komplexe Dynamik, ihr instabiles Eigenverhalten und ihre Kopplungen zwischen den einzelnen Bewegungsgrößen stellen Hubschrauber eine Herausforderung bei der Parameteridentifizierung dar. Dies gilt insbesondere vor dem Hintergrund, dass auch heute noch eine umfassende Simulation mit einer Vielzahl aller wesentlichen Effekte der Hubschrauber-Flugmechanik durch den Modellierungs- und Rechenaufwand nur schwer durchzuführen ist. In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Quellen zur Identifizierung von bemannten Hubschraubern [1-6, 9-12] und mit dem Aufkommen von unbemannten Fluggeräten auch vermehrt Hubschrauber-UAVs, die durch das benötigte Regelungssystem insbesondere auf eine genaue Kenntnis der Systemdynamik angewiesen sind. Hierzu ist die Identifizierung ein gebräuchlicher Ansatz. Außerdem bilden identifizierte Modelle eine wichtige Grundlage für echtzeitfähige Simulationssysteme hoher Güte, wie sie für Pilotentraining und Zulassungsfragen notwendig sind.

4.1. Modellstruktur bei Hubschraubern

Prinzipiell treten bei der Anwendung der Identifizierung zwischen bemannten und unbemannten Hubschraubern keine Unterschiede auf, siehe [5], außer dass sich durch die unterschiedlichen Größen und Massenverhältnisse Unterschiede in den Eigenfrequenzen zeigen. Allerdings kann es konstruktionsbedingt zu Unterschieden kommen. Insbesondere bei Modell- und kleinen unbemannten Hubschraubern, die fast ausschließlich in Zweiblattrotor-Konfiguration mit quasi zentralem Schlaggelenk vorliegen, werden Bell-/Hiller Stabilisatoren eingesetzt, die über den Kreiseleffekt bei Störungen eine der Störung entgegengesetzte Reaktion des Rotors einleiten und somit zu einem stabileren Verhalten des Rotors führen. Hiller-Stabilisatoren verfügen hierzu über kleine aerodynamische Flächen an den Enden. Hierüber ist es möglich, über durch eine Ansteuerung und somit Auslenkung des Stabilisators eine Steuerreaktion am Rotor zu erzeugen. Somit ist der Ansatz vergleichbar mit dem eines Flettner-Ruders beim Starrflügler. Je nach zu untersuchender Bandbreite ist es sinnvoll, die Dynamik dieser Stabilisatoren in die Modellstruktur zu integrieren um eine sauber Parameteridentifikation zu erlauben und zu verhindern, dass es zu einer Häufung diverser Einflussgrößen in einen einzelnen Parameter kommt [6]. Ähnliches gilt für die höherfrequente Blattdynamik sowohl in Schlag- als auch in Schwenk- und Torsionsrichtung, will man den Hubschrauber in höheren Bandbreiten modellieren. Die Dynamik des Nach-

laufs und der durch den Rotor induzierten Luftmasse stellt ebenfalls ein dynamisches System [7] dar und kann zu einer Verbesserung der Identifizierungsergebnisse führen wenn sie in die Modellstruktur integriert ist. Hierzu gehört zum Beispiel das Modell für den dynamischen Luftmasstenstrom nach Pitt Peters, siehe auch [1].

Für die Auslegung eines nicht hochagilen Regelungssystems von größeren unbemannten Hubschraubern wie dem hier betrachteten Koaxial-Hubschrauber mit einer Masse von 160 kg genügt zumeist eine Betrachtung als 6-Freiheitsgrad Starrkörpersystem, das bei Bedarf mit Rotorzeitkonstanten ergänzt wird, siehe auch [3]. Bei der Modellstruktur ist darauf zu achten, dass die Dynamik so genau wie nötig aber so einfach wie möglich sich hierin wiederfindet, um den Identifizierungsaufwand und die Güte der Identifizierungsergebnisse in Einklang zu bringen. Insbesondere durch eine Ordnungsreduktion können mehrere Effekte z.B. in einen einzelnen Parameter verlegt werden und führen dann zur Anhäufung von Effekten in diesem, was auf Kosten der Genauigkeit geht [1]. Bei Modellen höherer Ordnung, die über die 6-Freiheitsgrad Starrkörperfrequenz hinausgehen, kann es außerdem dazu kommen, dass Effekte, die eigentlich nicht eingeplant worden sind, einen stärkeren Einfluss haben und sich deshalb in den zusätzlichen Parametern eher als die antizipierten Effekte wiederfinden. Ohne physikalische Einsicht in das System kann es hierdurch zu falschen Schlussfolgerungen kommen.

4.2. Bewegungsformen beim Hubschrauber

BILD 6 zeigt die Lage der Polstellen für einen Koaxial-Hubschrauber aus einer nichtlinearen Simulation, wie sie in [8] beschrieben ist. Die verwendete Linearisierung wurde mit dem *linmod* Befehl unter MATLAB erzeugt.

Es lassen sich zwei Schwingungen erkennen, die für die Geschwindigkeitsinstabilität stehen. Außerdem sind die aperiodischen, stabilen Bewegung mit negativem Realteil zu erkennen. Mit zunehmender Geschwindigkeit erfolgt eine Verschiebung der Pole, die Leitwerke erreichen einen höheren Staudruck und das Verhalten ähnelt zunehmend dem eines Flugzeugs. Allerdings bleibt die Phugoiden beim Hubschrauber meist noch instabil.

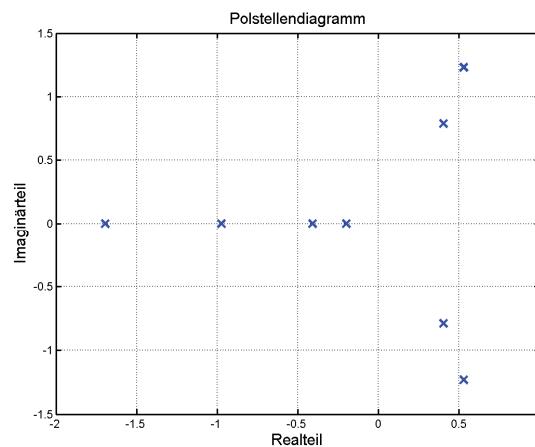


BILD 6. Pollage der Starrkörperdynamik eines Hubschraubers im Schwebeflug

Abgeleitet aus der Modellstruktur, wie sie allgemein für eine Betrachtung der 6-Freiheitsgrade Starrkörperdynamik aus den Bewegungsgleichungen ergibt, lässt sich die lineare Beschreibung als Zustandsmodell wiedergeben. Die Dynamik wird hierbei vereinfachend mit 8 Zuständen angeben. Dazu gehören die 3 translatorischen Geschwindigkeiten u v w , die 3 rotatorischen Winkelgeschwindigkeiten p q r und beiden Lagewinkel Φ und Θ zur Angabe der Neigung bezüglich der Horizontalen. Interessanterweise findet sich in der Literatur meist die gerade beschriebene Darstellung, in der die Ersatzgrößen aufgeführt sind. Die eigentlichen Derivate, die normalerweise bei Starrflüglern angegeben werden, fehlen. Ein Grund hierfür liegt in der Vernachlässigung des Staudrucks, da dieser im Schwebeflug nicht nur klein ist sondern meist auch nur unzureichend gemessen werden kann. Es ergibt sich ein Zustandsraummodell der Form:

$$(5) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$(6) \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

$$\text{mit } \mathbf{x} = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \Phi \ \Theta]^T, \mathbf{u} = [\vartheta_0 \ \vartheta_s \ \vartheta_c \ \delta_T]^T$$

Eine Modellstruktur wie oben reicht meist für die grundlegende Betrachtung der dynamischen Eigenschaften aus, auch wenn damit die höherfrequenten Effekte durch die fehlende Modellstruktur nicht abgebildet werden können.

4.3. Erweiterte Dynamik des Hubschraubers

Eine erweiterte Ordnung des zu identifizierenden Modells hat auch immer einen Mehraufwand an Instrumentierung und Messwertverarbeitung zur Folge. Höherfrequente Effekte sind hierbei meist stärker vom Messrauschen und kleinen Amplituden in den Messgrößen gekennzeichnet, so dass ein schlechteres „Signal zu Rauschen“-Verhältnis auftritt, was zu Lasten der Auswerte-Qualität geht. Ein gutes Beispiel stellt hier zum Beispiel die Auswertung der Rotordynamik bei gelenklosen Rotoren dar. Hierbei existiert kein direktes Gelenk an dem die Kipprichtung des Rotors bestimmt werden kann. Stattdessen muss auf der flexiblen Struktur des Blattes am Ort des äquivalenten Schlaggelenks ein Dehnungsmessstreifen aufgebracht werden [3], mit dessen Hilfe sich die Schlagwinkel des Blattes bestimmen lassen. Die Messung im drehenden System des Rotors ist naturgemäß mit Mehraufwand versehen (Schleifringe etc.). Außerdem ist der Rotor in Zusammenhang mit dem Antriebsstrang eine Hauptquelle der höherfrequenten Vibratoren mit den damit verbundenen Auswirkungen auf das Rauschen des Messsignals.

4.4. Besonderheiten durch die Instabilität

Durch die inhärente Instabilität des Hubschraubers sind einige wesentliche Randbedingungen zu berücksichtigen:

Zum einen muss der Hubschrauber als offener Regelkreis identifiziert werden. Dadurch will man verhindern, dass die Eigendynamik des Systems durch das gewünschte Eigenverhalten mit aktivem Regler überlagert wird. In [9] ist ein Fall beschrieben, wo Parameteridentifizierung genutzt worden ist, um das Regelungssystem eines Yamaha RMax Hubschraubers zu identifizieren. Dieses Vorgehen ist naturgemäß mit Einschränkungen versehen, da die

genaue Struktur des Reglers hier nicht bekannt ist und somit auch in die Modellstruktur des Gesamtsystems nicht miteinbezogen werden und bestenfalls abgeschätzt werden kann, insbesondere bei Nichtlinearitäten im Regler.

Im Allgemeinen wird in der Literatur darauf verwiesen, dass die Identifizierung als offene Regelstrecke zu erfolgen hat, um oben erwähnte Überlagerung auszuschließen. Dies hat durch die Instabilität allerdings direkt die Folge, dass sich das System von seinem Trimmpunkt entfernt und somit den Bereich kleiner Abweichungen, die für Linearisierungen gegeben sein müssen, verlässt. Dieses grundlegende Problem lässt sich nicht umgehen und muss entsprechend berücksichtigt werden. Im Flugregelungs- und Führungssystem muss daher eine Funktion implementiert werden, die das System zum einen stabilisiert, das Regelungssystem also aktiviert und zum anderen bei ausgeschaltetem Regelungssystem Identifizierungsmanöver generiert und aufzeichnet. Die Funktion kann prinzipiell im zeitlichen Wechsel erfolgen, allerdings müssen Abbruchkriterien definiert werden, die verhindern, dass der Hubschrauber in einen unkontrollierbaren Zustand gerät. Hierzu zählen insbesondere die Lagewinkel Φ und Θ , für die in der Literatur sinnvolle Begrenzungen bei +/- 30 Grad angegeben sind als auch vertikale Geschwindigkeit und Gierrate.

Obwohl teilweise in der Literatur die Identifizierung auch nur für einzelne Bewegungssachsen freigegeben wird, muss man sich daraus resultierenden Einschränkungen bewusst sein. Das Vorgehen erlaubt zwar die Identifizierung auf der freigegebenen Achse und somit auch die Betrachtung von Steuerwirkungen, allerdings können Kopplungen zu den anderen Achsen durch den Eingriff des Regelungssystems hiermit naturgemäß nicht vollständig erfasst werden. Allerdings wird auch in [10] darauf verwiesen, dass diese Kopplungseffekte teilweise nur schwer zu ermitteln sind. Darüber hinaus sind sie bei Koaxial-Hubschraubern durch die symmetrischere Konfiguration schwächer.

Die Erzeugung der Identifikationssignale sollte nach [1] einzeln in den entsprechenden Achse erzeugt werden um Korrelation zu vermeiden und die anschließende Auswertung auch in Hinblick auf Kopplungen zu verbessern, die ansonsten durch gleichzeitige Signaleingabe in die unterschiedlichen Achsen überlagert werden können.

5. SIMULATION

Die vorgestellten Methoden der Parameteridentifikation wurden anhand einer nichtlinearen, um den Schlagfreiheitsgrad erweiterten, Simulation unter *MATLAB/Simulink* untersucht. Hierbei wurde primär ein Simulationsansatz nach der Blattelemententheorie verwendet, so wie er in [7] beschrieben ist. Vergleichswerte wurden über eine Linearisierung mittels des *linmod* Befehls unter *MATLAB/Simulink* erzeugt. Es wurde die oben beschriebene Modellstruktur einer Starrkörperdynamik für den Schwebeflug verwendet.

Durch die vorhandene Struktur der Simulation und des integrierten Regelungssystems ist es vergleichsweise einfach, eine Funktionalität für die Generierung von Identifizierungsmanövern zu integrieren. Diese finden ohne aktives Regelungssystem statt, um eine Antwort des Systems in allen Achsen erfassen zu können, siehe oben. Die

Identifizierungsmanöver wurden als „3211“-Schritteinaben vorgenommen, wobei die Zeitschrittweite auf die zu erwartenden Eigenfrequenzen des Systems abgestimmt wurden.

Die Identifizierungsmanöver laufen im Wechsel mit der Aktivierung des Regelungssystems, um den Hubschrauber wieder auf seinen Arbeitspunkt zurückzuführen. Hierin liegt ein gewisser Nachteil, da für den Regler eine grundlegende Kenntnis des Systems vorhanden sein muss. Allerdings kann diese über entsprechende Regelungstheorien robust abgeschätzt werden und damit noch eine gewisse Diskrepanz zum wirklichen Verhalten aufweisen, dass mit der Identifizierung bestimmt werden soll. In den Beispielen ist jeweils nur eine Manöverabfolge vorhanden, in der Literatur sind aber auch Fälle von zusammengezogenen Manövern beschrieben [3],[1].

5.1. Ergebnisse aus der Anwendung der Identifizierungsalgorithmen in der Simulation

Im folgenden werden die Ergebnisse für die beiden als klassisch anzusehenden Ansätze der Gleichungs- und Ausgangsfehlermethode dargestellt. Darüber hinaus wurde ein Neuronales Netz als relativ neuartige Methode der Parameteridentifizierung untersucht. Bei allen drei Verfahren wurde die in [1] gegebene Software verwendet und für die Anwendung auf die Simulation leicht modifiziert.

Zur Anregung wurden „3211“-Manöver mit angepassten Zeitintervallen verwendet, wie sie in BILD 7 dargestellt sind. Für eine bessere Auswertbarkeit wurden diese getrennt in den Achsen erzeugt, wobei der Regler komplett inaktiv war, um auch Kreuz-Kopplungen in den Bewegungen erfassen zu können. Es wurde mit den aperiodischen Bewegungen begonnen, um die Zeit für die instabilen Bewegungen und damit die Abweichung vom Betriebspunkt nicht zu lang werden zu lassen. Die Begrenzung der Steuerausschläge liegt bei jeweils +/- 2 Grad.

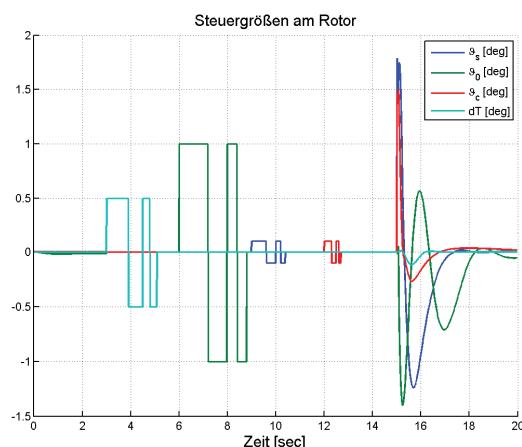


BILD 7. Steuergrößen am Rotor in der Simulation

Alle zu bestimmenden Parameter in den Matrizen A und B wurden als frei angenommen. Dies bedeutet insbesondere, dass die jeweiligen Zeilen für die Lagewinkel ebenfalls als unbekannt angenommen und mitidentifiziert wurden. Alle zur Identifizierung benötigten Daten werden aus der nichtlinearen Simulation ohne Messrauschen oder Umrechnung durch die Sensorposition direkt erzeugt und mit

100 Hz aufgezeichnet. Es wird ausschließlich die Phase ohne Regelung, in der die Identifizierungseingaben erzeugt werden, ausgewertet, da es ansonsten zu stärkeren Abweichungen kommen kann. Diese Phase erstreckt sich von 3 bis 15 Sekunden, danach führt der Regler den Hubschrauber zurück auf den Schwebezustand, siehe BILD 7-9. Es wurden weder Mess- noch Prozessrauschen in Form von Böen eingebracht, alle Abweichungen sind somit auf den Einfluss von Nichtlinearitäten und nicht modellierte Effekte zurückzuführen. Mit den beschriebenen Störungen würden die Ergebnisse ungenauer werden.

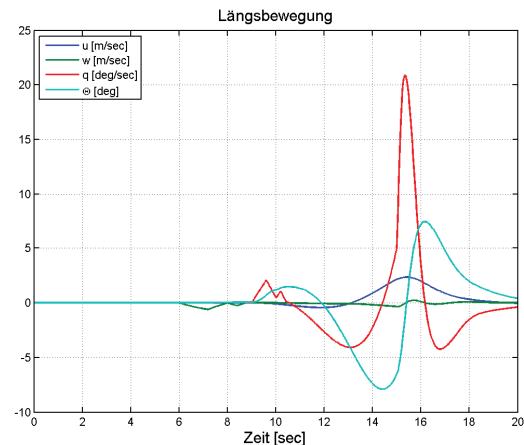


BILD 8. Längsbewegung in der nichtlinearen Simulation

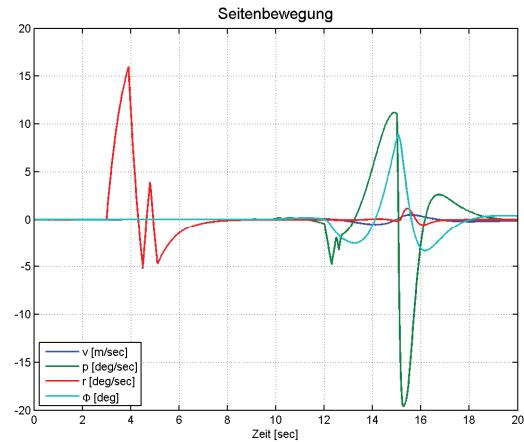


BILD 9. Seitenbewegung in der nichtlinearen Simulation

5.1.1. Gleichungsfehlermethode

Es werden die 8 Zustandsmessungen, deren Ableitungen sowie die 4 Steuergrößen erfasst. Über den Backslash Operator „\“ wird das System in MATLAB gelöst. Es ergibt sich das Pol-/Nullstellen Diagramm wie es in BILD 10 gezeigt ist.

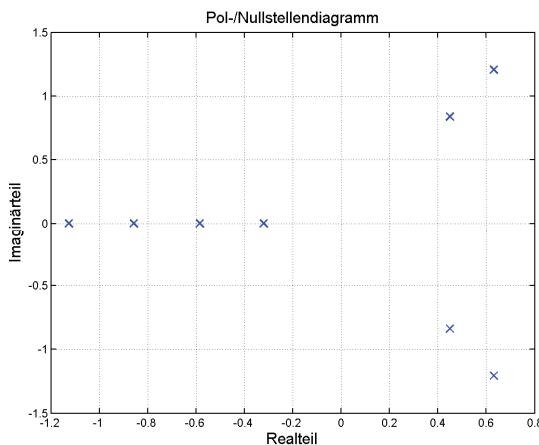


BILD 10. Pollage nach Gleichungsfehlermethode

Das identifizierte, nun allerdings lineare Modell, wird in die Ausgangssimulation überführt, um das gleiche Manöver noch mal zu erzeugen. Da die Modelle Abweichungen aufweisen, kommt es hierbei insbesondere in der nichtge Regelten Phase zu Abweichungen, die mit steigender Zeit und Entfernung vom Auslegungspunkt schnell größer werden.

Das Auswerte-Ergebnis zeigt sich zwar prinzipiell brauchbar, allerdings werden insbesondere kleinere Werte und zum Teil auch die Dämpfungen nicht richtig wiedergegeben. Außerdem zeigte sich in Versuchen, dass das Ganze stark abhängig vom zeitlichen Versatz zwischen den Größen auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung ist, da dies einen starken Einfluss auf die Änderung des Zustandsvektors hat. Es kommt zur Verschiebung der Polstellen im Vergleich zum BILD 6. Die Simulation zeigt für Zustände nahe am Betriebspunkt eine gute Übereinstimmung. Allerdings werden nach langerer Simulationszeit insbesondere die Abweichungen in den Drehraten offensichtlich, die durch die falsch ermittelte Dämpfung begünstigt werden, siehe BILD 11 und 12.

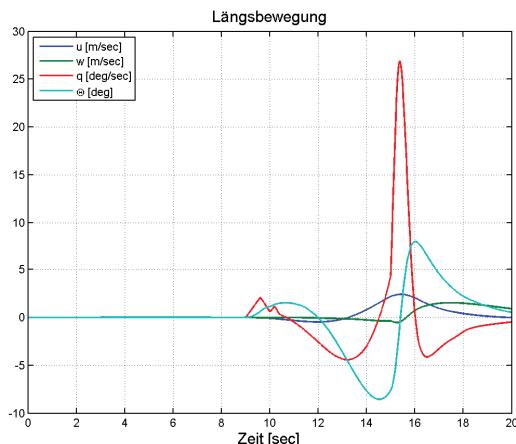


BILD 11. Längsbewegung in der linearen Simulation nach Gleichungsfehlermethode

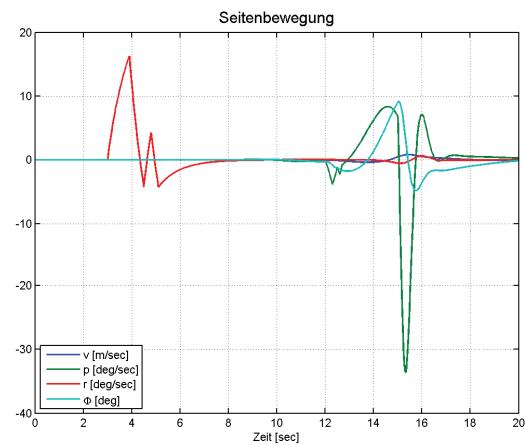


BILD 12. Seitenbewegung in der linearen Simulation nach Gleichungsfehlermethode

5.1.2. Ausgangsfehlermethode

Die Ausgangsfehlermethode wurde hier zur Bestimmung der Maximum-Likelihood Funktion mit dem Gauß Algorithmus ausgeführt. Die Initialisierung der Parameter wurde mit Abweichungen bis zu 60 % vorgenommen, die zufällig gesetzt waren.

Es zeigt sich eine relativ gute Übereinstimmung mit dem erwarteten Modell. Die Eigenwerte sind allerdings insbesondere für die aperiodischen Bewegungen etwas verschoben, siehe BILD 13.

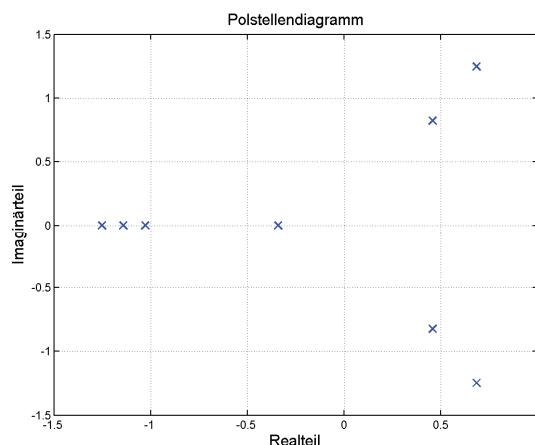


BILD 13. Pollage nach Ausgangsfehlermethode

Die Rechenzeit fällt allerdings auch länger aus, was mit den gesteigerten Aufwand für die Parameteranpassung und das Lösen der Zustands- und Beobachtungsgleichungen zusammenhängt. Es wurden die 64 Parameter der Systemmatrix und 32 Parameter der Steuermatrix ermittelt.

5.1.3. Neuronale Netze

Ähnlich wie bei der Gleichungsfehlermethode, kann ein Neuronales Netz genutzt werden, um direkt die zeitliche Änderung der Zustandsgrößen zu berechnen. Besitzt es

hierzu eine lineare Aktivierungsfunktion und die entsprechende Anzahl an Neuronen, so ist es äquivalent zur Gleichungsfehlermethode. Seine erweiterten Eigenschaften im Gegensatz zu dieser zeigen sich aber bei nichtlinearen Zusammenhängen. In diesem Fall können teilweise die linearen Ersatzgrößen durch Differenzenbildung ermittelt werden. Hierzu wird die Beschleunigung in einer Achse betrachtet, wenn ein Zustand oder eine Eingangsgröße um einen positiven und negativen Wert variiert wird und die sich dabei im Neuronalen Netz ergebende Änderung durch diese Differenz geteilt wird, siehe auch [1].

In BILD 14-15 ist eine entsprechende zeitliche Änderung für die Simulation des Koaxial-Hubschrauber UAVs dargestellt. Das Ergebnis wurde nach 200 Iterationen bei 15 Neuronen in der versteckten Schicht erreicht. Ausgang des Netzes sind die 8 Beschleunigungen, Eingang die 8 entsprechenden Zustandsgrößen sowie die 4 Steuergrößen.

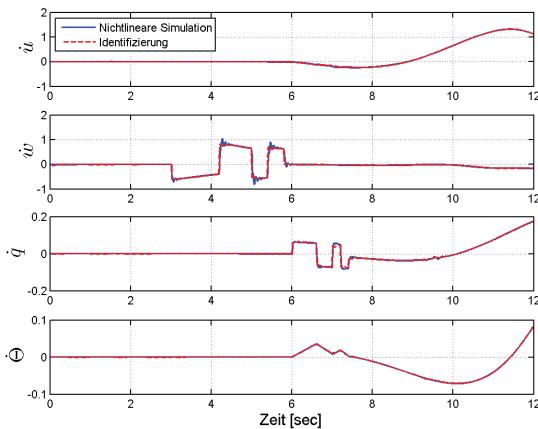


BILD 14. Zeitliche Änderung der Zustandsgrößen der Längsbewegung während der Identifizierung

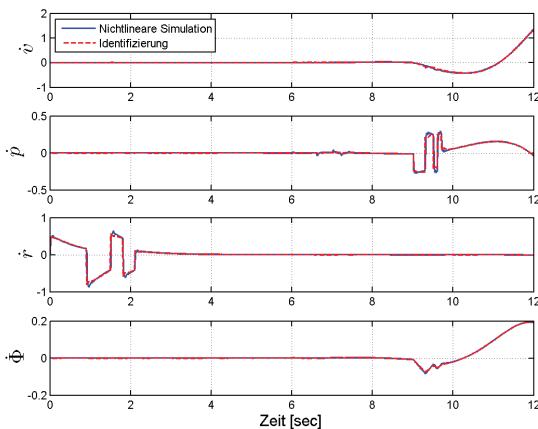


BILD 15. Zeitliche Änderung der Zustandsgrößen der Seitenbewegung während der Identifizierung

Es lässt sich eine gute Übereinstimmung zwischen der gemessenen blauen und der angenäherten roten Kurve erkennen. Außerdem sieht man bei den sprungartigen Wechseln, dass die Messkurve Schwingungen aufweist. Diese resultieren aus der Schlagbewegung in der nichtlinearen Simulation. Das Neurale Netz kann diese Schwingung allerdings nicht abbilden, der Fehler ist je-

doch als gering anzusehen, da der Effekt im Vergleich zur Starrkörperdynamik im niederfrequenten Frequenzbereich schnell abklingt und die Mittelwerte bedeutend genauer wiedergeben werden. Dadurch, dass die Ableitungen relativ gut getroffen werden, ist auch der Verlauf der Zustandsgrößen über eine Integration ausreichend genau anzunähern.

6. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Im vorliegenden Beitrag wurde ein Überblick über Identifizierungsmethoden und ihre Anwendung auf ein Koaxial-Hubschrauber UAV gegeben. Für die Gleichungs-, die Ausgangsfehlermethode und den Ansatz über Neuronale Netze wurden die Methoden anhand einer nichtlinearen 6-Freiheitsgradsimulation für den Schwebeflug validiert. Es zeigte sich, dass die Ausgangsfehlermethode geeignet ist, die Eigenwerte zu bestimmen. Allerdings ist sie von den Startwerten abhängig. Gute Ergebnisse wurden auch mit dem Ansatz der Neuronalen Netze erzielt, wohingegen die Gleichungsfehlermethode durch ihre Schnelligkeit und die ebenfalls guten Ergebnisse überzeugte. Allerdings ist sie stärker rauschabhängig und daher insbesondere für erste Abschätzungen geeignet. Die Gleichungsfehlermethode stellt die schnellste Lösung mit ein paar Sekunden Rechenzeit dar, während das Neurale Netz unter 1 Minute lag und die Ausgangsfehlermethode im zweistelligen Minutenbereich. Die Ergebnisse entsprechen im Wesentlichen den in der Literatur angegebenen [1-6] für Hubschrauber konventioneller Konfiguration. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass die hier erzeugten Ergebnisse unter vereinfachten Bedingungen erstellt wurden und die Auswertung von Flugversuchsdaten aufgrund der Datenaufbereitung und Messgüte ein erhebliches Maß an Mehraufwand mit sich bringt

Die verwendeten Methoden stellen eine gute Grundlage für die Identifizierung sowohl von Flugversuchsdaten als auch für die Validierung der Simulation des Koaxialhubschraubers dar. Eine Erweiterung der Störmodelle um Mess- und Prozessrauschen als auch für eine Erweiterung des Flugbereichs mit den damit verbundenen Änderungen der dynamischen Eigenschaften sollte Bestandteil zukünftiger Untersuchungen sein. Insbesondere die Interaktion der Rotoren untereinander könnte hier Unterschiede in den Ergebnissen zum konventionellen Hubschrauber aufweisen.

7. BEZEICHNUNGEN

δ_T	Differentieller Kollektivsteuerausschlag zum Gieren
ϑ	Einstellwinkel des Blattes in der Blattelementtentheorie
ϑ_s	Zyklischer Längssteuerausschlag
ϑ_c	Zyklischer Seitensteuerausschlag
ϑ_0	Kollektiver Steuerausschlag
A	Systemmatrix
B	Steuermatrix
C	Ausgangsmatrix
D	Durchgangsmatrix

<i>L</i>	Rollmoment um die körperfeste x-Achse bzw. mit Index entspr. Derivativ
<i>M</i>	Moment um das Schlaggelenk bzw. indiziert entsprechender Anteil
<i>M</i>	Nickmoment um die körperfeste y-Achse bzw. mit Index entspr. Derivativ
<i>N</i>	Giermoment um die körperfeste z-Achse bzw. mit Index entspr. Derivativ
<i>p</i>	Drehrate um körperfeste x-Achse
<i>q</i>	Drehrate um körperfeste y-Achse
<i>r</i>	Abstand eines Blattelements zur Rotordrehachse
<i>r</i>	Drehrate um körperfeste z-Achse
<i>u</i>	Eingangsvektor
<i>u</i>	Geschwindigkeit in körperfeste x-Achsenrichtung
<i>v</i>	Geschwindigkeit in körperfeste y-Achsenrichtung
<i>v</i>	Störvektor
<i>w</i>	Geschwindigkeit in körperfeste z-Achsenrichtung
<i>X</i>	Längskraft in körperfeste x-Richtung bzw. mit Index entspr. Derivativ
<i>x</i>	Zustandsvektor
<i>y</i>	Ausgangsvektor
<i>Y</i>	Querkraft in körperfeste y-Richtung bzw. mit Index entspr. Derivativ
<i>Z</i>	Vertikalkraft in körperfeste z-Richtung bzw. mit Index entspr. Derivativ
Θ	Nicklagewinkel
Θ	Parametervektor
<i>EKF</i>	Extended Kalman Filter
<i>GPS</i>	Global Positioning System
<i>INS</i>	Inertial-Navigationssystem
<i>MIMO</i>	Multiple Input Multiple Output
<i>UAV</i>	Unmanned Aerial Vehicle

- mechanischen Eigenschaften eines Koaxial- Hubschraubers, , Deutscher Luft- und Raumfahrt Kongress 2008, Darmstadt, 2008
- [8] Löchelt, S., Alles, W., *Modellierung und Simulation eines Koaxial-Hubschrauber UAVs*, Deutscher Luft- und Raumfahrt Kongreß 2008, Darmstadt, 2008
- [9] Durante, S., Conte, G., In Flight Identification of the augmented flight dynamics of the RMax unmanned helicopter, Proceeding of the 17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. Toulouse, France. 2007
- [10] Leith, D.J., *Identification of the SA-330 Puma helicopter*, IEEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 141, No. 2, March 1994
- [11] Beckmann, E. D., Borges, G. A., *Nonlinear modelling, identification and control for a simulated miniature helicopter*, IEEE Altin American Robotic Symposium, 2008
- [12] Tischler, M., *IDENTIFICATION TECHNIQUES FREQUENCY DOMAIN METHODS*, Advisory Group for Aerospace Research & Development (AGARD) Lecture Series 178, 1991

8. LITERATUR

- [1] Jategaonkar, R.V., *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Approach*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, USA, 2006
- [2] Banerjee, D., Harding, J. W., *Assessment of Rotorcraft identification as applied to the AH-64*, Advisory Group for Aerospace Research & Development (AGARD) Lecture Series 178, 1991
- [3] Kaletka, J., BO105 Identification Results, Advisory Group for Aerospace Research & Development (AGARD) Lecture Series 178, 1991
- [4] Chowdhary, G., Lorenz, S., *Control of a VTOL UAV via Online Parameter Estimation*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 2006
- [5] Mettler, B., Tischler, M. B., Kanade, T., *System Identification of Small-Size Unmanned Helicopter Dynamics*, 55th Forum of the American Helicopter Society, Montreal, Quebec, Canada, May 25-27, 1999
- [6] Fan,C., Song, B., Cai, X., *System Identification and Attitude Control of a Small Scale Unmanned Helicopter*, Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Robotics and Biometrics, Bangkok, Thailand, February 21-26, 2009. pp. 1342 – 1347
- [7] Linke, F., Löchelt, S., *Erstellung einer Free Wake Wirbelnachlaufsimulation zur Bestimmung der Flug-*