

VERFAHREN REDUZierter ORDNUng ZUR BERECHNUNG GENERALISierter LUFTKRÄFTE

D. Fleischer, C. Breitsamter,
Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München,
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching, Deutschland

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden generalisierte Luftkräfte im Zeitbereich und Frequenzbereich für die AGARD 445.6 Konfiguration präsentiert. Als Grundlage dafür dienen die ersten vier Eigenmoden der Struktur und zur Berechnung der generalisierten Luftkräfte kommen die Euler-Verfahren AER-Eu (Zeitbereich) und AER-SDEu (Frequenzbereich) zur Anwendung. Weiterhin wird ein sogenanntes „Reduced Order Model“ erstellt, das als lineares Zustandsraummodell eine schnelle Berechnung der generalisierten Luftkräfte im Zeitbereich erlaubt. Zur Erzeugung des ROMs werden die Impulsantworten der generalisierten Luftkräfte, die mittels AER-Eu berechnet wurden zur Systemidentifikation herangezogen. Es werden Ergebnisse für drei verschiedene Machzahlen (subsonisch bis transsonisch) und einer Reihe von reduzierten Frequenzen gezeigt. Die Ergebnisse werden sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich dargestellt. Der Übergang in den Frequenzbereich wird über die Fourieranalyse der Zeitreihen der Sinusantworten und der diskreten Fourier-Transformation der Impulsantworten der generalisierten Luftkräfte für modale Bewegungen des Flügels durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmungen zwischen dem vollständigen Euler-Verfahren und den Verfahren reduzierter Ordnung sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich.

1. EINLEITUNG

Im industriellen Flatteranalyseprozess basiert die Berechnung der instationären aerodynamischen Luftkräfte, verursacht durch die Umströmung der schwingenden Flügelstruktur, derzeit noch weitgehend auf Verfahren der (linearisierten) Potentialtheorie wie z.B. der Dipolgitterverfahren (DLM – **D**oublet **L**attice **M**ethod), [26]. Damit ist es möglich, in sehr kurzer Zeit ein Ergebnis für die aerodynamischen Größen der instationären Tragflügelumströmung zu erzeugen, wobei die Instationarität auf der Annahme von harmonischen Schwingungen der Struktur beruht. Allerdings werden die Strömungsgrößen vor allem im transsonischen Flugbereich ungenau wiedergegeben, aufgrund vereinfachender Annahmen bei der zugrundeliegenden Theorie (Drehungsfreiheit, homentropie Strömung, Linearität). Starke Verdichtungsstöße können nicht erfasst werden, so dass keine Informationen hinsichtlich Stoßintensität und Stoßlage vorliegen. Moderne CFD-Verfahren zur Lösung der Euler- oder RANS-Gleichungen (RANS – **R**eynolds **A**veraged **N**avier **S**tokes) erfassen die Strömungsphysik hinreichend genau. Damit sind aber relativ lange Rechenzeiten verknüpft und für aeroelastische Fragestellungen deshalb ungeeignet, da hier eine hohe Anzahl an Rechenparametern wie Machzahl, Anstellwinkel, reduzierte Frequenz und Eigenformen vorliegen.

Mit der Entwicklung von Verfahren reduzierter Ordnung versucht man die Genauigkeit von CFD-Verfahren beizubehalten, während der Rechenaufwand reduziert werden soll. Das sogenannte ROM steht für **R**educed **O**rdern **M**odel, und bezeichnet allgemein die Vereinfachung eines bestehenden physikalischen Modells, wobei die wesentlichen Eigenschaften des Systems möglichst exakt wiedergegeben werden sollen, aber mit massiv verkürzter Rechenzeit, so dass auch ein Einsatz in einem multi-

disziplinären Umfeld ermöglicht wird. Am Lehrstuhl für Aerodynamik der Technischen Universität München wurde basierend auf einem zeitechten Euler-Verfahren (AER-Eu) ein zeitlinearisiertes Euler-Verfahren (AER-SDEu; eine Form eines ROMs im Frequenzbereich) entwickelt, mit dem die direkte Berechnung der instationären Strömungsgrößen für harmonisch schwingende Strukturen ermöglicht wird, bei gleichzeitig voller CFD-Qualität der Lösung. Die Rechenzeit wird mit dieser Methode im Vergleich zu einer entsprechenden zeitgenauen Rechnung um bis zu einer Größenordnung reduziert [11]. Grundsätzlich unterscheidet man ROMs, die entweder im Zeitbereich oder im Frequenzbereich arbeiten. Weitere Möglichkeiten zur Erzeugung von ROMs im Zeitbereich bieten die Volterra-Theorie und die POD (**P**roper **O**rthogonal **D**ecomposition), deren Fokus speziell auf der Generierung von nichtlinearen ROMs liegt [19], [20], [15].

Zur Erzeugung eines linearen ROMs im Zeitbereich wird ein lineares Zustandsraummodell des CFD-Systems generiert. Das CFD-System wird beispielsweise mit einer impulsartigen Auslenkung der Struktur angeregt und als Antwort werden globale Strömungsgrößen aufgezeichnet, wie z.B. generalisierte Luftkräfte. Mit verschiedenen Algorithmen zur Systemidentifikation können dann die konstanten und zeitdiskreten Systemmatrizen des linearen Zustandsraummodells berechnet werden. Diese Methoden wurden schon von verschiedenen Autoren angewendet. Silva [23] verwendet den ERA Algorithmus [8] (**E**igensystem **R**ealization **A**lgorithm), um generalisierte Luftkräfte über ein Zustandsraummodell berechnen zu können und das aerodynamische ROM mit einem strukturdynamischen ROM zu koppeln. Silva [22], [21] und Kim [12] haben auch simultane Anregungen u. a. mittels orthogonaler Funktionen der Struktur vorgenommen, um weiter die Zeit zur Generierung des ROM zu verkürzen.

Am Lehrstuhl für Aerodynamik wurde in einer vorangegangenen Arbeit [13] basierend auf Sprungfunktionen und mit Hilfe des OKID Algorithmus [9] (**O**bserver **K**alman **I**dentification Algorithm) aus dem SOCIT Paket der NASA [7] (**S**ystem/**O**bserver/**C**ontroller Identification Toolbox) ein lineares Zustandsraummodell zur Berechnung der generalisierten Luftkräfte für den AGARD 445.6 Flügel generiert und Rechnungen für harmonische Schwingungen der ersten beiden Eigenformen durchgeführt. Die Ergebnisse des ROM zeigten im Vergleich mit der zeitechten CFD-Lösung von AER-Eu eine sehr gute Übereinstimmung. Weiterhin wurde in dieser Arbeit auch auf die Rechenzeit eingegangen, die mit dem ROM um einige Größenordnungen geringer ist, als ein vergleichbarer CFD-Rechenlauf.

Ein ähnlicher Weg wird auch in dieser Arbeit mit dem Euler-Verfahren AER-Eu beschritten und auf die AGARD 445.6 Konfiguration angewendet. Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein ROM in Form eines linearen Zustandsraummodells zu erzeugen. Zur Systemidentifikation wird allerdings hier der ERA Algorithmus [8] (aus dem SOCIT Paket) angewandt. Die Eingänge des im Weiteren als ROM/ERA bezeichneten Zustandsraummodells bilden modale Auslenkungen, während die Ausgänge wiederum generalisierte Luftkräfte darstellen. Anschließend werden die mit ROM/ERA berechneten Ergebnisse mit der entsprechenden Lösung von AER-Eu verglichen, um so Aussagen über die Ergebnisgüte des ROMs zu gewinnen. Die Ergebnisse der generalisierten Luftkräfte werden zunächst im Zeitbereich betrachtet. Ein weiterer Vergleich findet im Frequenzbereich statt. Der Übergang in den Frequenzbereich erfolgt mittels Fourier-Analyse der Zeitreihen und der diskreten Fourier-Transformation (DFT) der Impulsantworten. Dazu werden auch korrespondierende Ergebnisse, die mit dem zeitlinearisierten Verfahren AER-SDEu berechnet wurden, präsentiert.

2. THEORIE UND BERECHNUNGSVERFAHREN

2.1. CFD-Verfahren AER-Eu und AER-SDEu

Die hier verwendeten CFD-Verfahren sind AER-Eu und AER-SDEu. AER-Eu ist ein zellzentriertes multiblockfähiges Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung der instationären Euler-Gleichungen in konservativer Formulierung [11]. Unstetigkeiten, wie Verdichtungsstöße, sind damit Teil der Lösung und müssen nicht erst modelliert werden. Der Lösungsprozess erfolgt auf blockstrukturierten Gittern, wobei die Diskretisierung der konvektiven Flüsse auf dem „Upwind Flux Difference Splitting“ Verfahren nach Roe beruht [17]. Eine räumliche Genauigkeit zweiter Ordnung wird über die sogenannte MUSCL Extrapolation (**M**onotonic **U**pstream **S**cheme for **C**onservation **L**aws) realisiert. Die TVD-Eigenschaft (**T**otal **V**ariation **D**iminishing) wird über geeignete Limiter gewährleistet, so dass keine unphysikalischen Oszillationen im Stoßbereich entstehen. Als Randbedingungen sind Festköperrandbedingung, Symmetrierandbedingung und nichtreflektierende Randbedingungen am Fernfeldrand vorgegeben. Die Zeitintegration erfolgt je nach Wahl entweder explizit in Form eines Runge-Kutta-Verfahrens, oder implizit mittels LU-SSOR (**L**ower-**U**pper **S**ymmetric **S**uccessive **O**verrelaxation) [6], [3]. Zur Berechnung von stationären Fällen wird die Lösung in Form eines Pseudozeitschrittverfahrens berechnet. Für instationäre Problemstellungen findet ein sogenanntes „Dual-Time-

Stepping“-Verfahren Verwendung. Die Netzbewegung für instationäre Strömungsfälle wird durch lineare Interpolation für jeden Zeitschritt zwischen einem Referenzzustand und einem maximal verformten Zustand (Schwingungsamplitude) verwirklicht. Grundlage dafür ist ein entsprechendes Zeitgesetz, das entweder harmonisch oder impulsförmig sein kann. Mit dem AER-Eu-Verfahren können die instationären Strömungsgrößen (abhängig vom Zeitgesetz) für erzwungene Starrkörperschwingungen (Schlag- oder Nickschwingungen) oder erzwungene Schwingungen in den Eigenformen einer Struktur berechnet werden.

Das AER-SDEu-Verfahren basiert auf dem oben beschriebenen vollständigen Euler-Verfahren. Hier wurde jedoch eine Linearisierung bezüglich der Zeit vorgenommen. Für kleine Auslenkungen der Struktur kann die harmonische Netzbewegung in einen stationären, zeitunabhängigen Anteil und einen zeitabhängigen harmonischen Anteil mit der Auslenkung als Amplitude aufgeteilt werden. Da kleine Auslenkungen angenommen werden, antworten die instationären Strömungsgrößen auch harmonisch mit der gleichen Schwingungsfrequenz, allerdings mit einer Phasenverschiebung zur Strukturbewegung. Das Einsetzen dieser Annahmen in die Euler-Gleichungen und weiteres Umformen führt schließlich auf die Euler-Gleichungen bei kleinen Störungen wie sie beispielsweise in [11] zu finden sind. Die Euler-Gleichungen bei kleinen Störungen werden mit den gleichen numerischen Werkzeugen diskretisiert, wie sie auch für die vollständigen Euler-Gleichungen Verwendung finden.

Mit diesem Verfahren ist es also möglich, die instationären Strömungsgrößen in Form von realen und imaginären Anteilen (Amplituden- und Phaseninformation) für harmonische Schwingungen direkt zu berechnen. Den Referenzzustand, um den die Zeitlinearisierung durchgeführt wurde, stellt die stationäre Lösung dar, die im Vorfeld mit AER-Eu bestimmt wurde. Das stationäre Strömungsfeld kann strömungsphysikalisch als nichtlinear bezeichnet werden, beispielsweise im Sinne von „stationären“ Verdichtungsstößen. Da es sich bei AER-SDEu um die Lösung eines formal stationären Problems für die 1. Harmonische der Störgrößen handelt, wird mit diesem Verfahren die Rechenzeit um bis zu einer Größenordnung reduziert. Hervorzuheben ist, dass man mit diesem reduzierten Verfahren ausschließlich die Strömungsphysik für kleine Auslenkungen der Struktur erfassen kann, bei dem noch lineares Verhalten zwischen Strömungsgrößen und Strukturbewegung angenommen wird. Verdichtungsstöße, die sich erst während eines Bewegungszyklus entwickeln und wieder zurückbilden, können mit diesem Verfahren nicht erfasst werden. Im Rahmen der klassischen Flutteranalyse im Frequenzbereich, bei der man von kleinen Auslenkungen bei linearem Strukturverhalten ausgeht, eignet sich AER-SDEu durch Zeiteffizienz und der CFD-Qualität seiner Lösung sehr gut zur Modellierung der instationären Aerodynamik [4].

2.2. Aerodynamisches ROM – ROM/ERA

Zur Systemidentifikation des CFD-Systems wird hier der ERA Algorithmus aus der SOCIT Toolbox der NASA verwendet. Die ERA – Routinen liegen in MATLAB implementiert vor. Mit ERA kann ein lineares Zustandsraummodell über die sogenannten Markov-Parameter des betrachteten Systems erzeugt werden. Ein lineares

zeitinvariantes dynamisches System hat folgende zeitdiskrete (Zeitinkrement k) Zustandsraumdarstellung:

$$(1) \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$(2) \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

In Gl. (1) und Gl. (2) ist \mathbf{x} der n -dimensionale Zustandsvektor, \mathbf{u} der m -dimensionale Eingangsvektor und \mathbf{y} der p -dimensionale Ausgangsvektor. Hierbei ist n die Ordnung des dynamischen Systems, bzw. die Anzahl der Speicherelemente, m die Zahl der Eingangsgrößen und p die Anzahl der Ausgangsgrößen. Mit \mathbf{A} wird die Systemmatrix bezeichnet die eine Größe von $n \times n$ besitzt und das dynamische Verhalten des Systems beschreibt. Die Matrix \mathbf{B} ist die $n \times m$ Eingangsmatrix, \mathbf{C} die $p \times n$ Ausgangsmatrix und \mathbf{D} die $p \times m$ Durchschaltmatrix. Mit ERA werden konstante Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} generiert, so dass die Antwort eines betrachteten Systems für einen bestimmten Eingang mit dem zeitdiskreten Zustandsraummodell (Gl. (1) und Gl. (2)) bestimmt werden kann.

Zur Bestimmung der Systemmatrizen geht man von einem Dirac-Impuls mit N Zeitschritten ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) als Eingangsvektor aus:

$$(3) \quad \mathbf{u}(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 0 & (k=1, 2, \dots, N-1) \end{cases}$$

In Gl. (3) entspricht $\delta(k)$ der Dirac-Delta Funktion. Die zeitdiskreten Werte der Impulsantwort des Systems werden als *Markov-Parameter* [10] bezeichnet und sind folgendermaßen mit den Systemmatrizen verknüpft:

$$(4) \quad \mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}$$

Markov-Parameter werden üblicherweise zur Identifikation von mathematischen Modellen linearer dynamischer Systeme verwendet und Gl. (4) zeigt, dass die gesuchten Systemmatrizen in der Sequenz der Markov-Parameter eingebettet sind. Ausgehend von den Markov-Parametern kann jetzt die generalisierte Hankel-Matrix bestimmt werden [8]. Eine anschließende Singulärwertzerlegung der Hankel-Matrix und weiteres Umformen ergibt dann schließlich die gesuchten Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} des linearen Zustandsraummodells [8], [10]. Wie gezeigt wurde, dienen die Impulsantworten des zu identifizierenden Systems zur Systemidentifikation mit ERA. Andere Anregungsfunktionen, wie die Heaviside/Sprungfunktion oder periodische Funktionen können nicht mit ERA zur Systemidentifikation genutzt werden. Mit ERA können sowohl SISO- als auch MIMO-Systeme (SISO – Single Input Single Output; MIMO – Multiple Input Multiple Output) modelliert werden. Sind die Systemmatrizen bestimmt, so ist es möglich, auch für beliebige Eingangssignale die Antworten des Systems nach (1) und (2) zu bestimmen.

2.3. Generalisierte Luftkräfte

Im Folgenden werden grundlegende strukturdynamische Zusammenhänge vorgestellt und wie die Berechnung generalisierter Luftkräfte mit den CFD-Verfahren AER-Eu bzw. AER-SDEu realisiert wird.

Ausgehend von einer Diskretisierung der Struktur mittels einer FEM (Finite-Elemente-Methode), lautet die Grundgleichung mit dem Verschiebungsvektor $\mathbf{x}(t)$, der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} , der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und dem Vektor der äußeren Lasten $\mathbf{f}(t)$:

$$(5) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

Herrschen ausschließlich durch die Strukturbewegung hervorgerufene Luftkräfte vor, so kann der Kraftvektor $\mathbf{f}(t)$ (Luftkraftvektor) an einem Knoten i der diskretisierten Struktur durch den Druck und die Fläche des entsprechenden Oberflächenelementes i bestimmt werden.

$$(6) \quad \mathbf{f}_i(t) = q_\infty \cdot c_{p,i}(t) \cdot d\mathbf{S}_i \quad \text{mit} \quad q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$$

In Gl. (6) bedeuten: $d\mathbf{S}_i$ Flächenelementvektor am Knoten i , $c_{p,i}$ Druckbeiwert am Knoten i , q_∞ Staudruck der freien Anströmung.

Um den Rechenaufwand zur Lösung von Gl. (5) zu verringern, werden die Bewegungsgleichungen aus dem physikalischen Raum in den Modalraum transformiert (Entkopplung der Bewegungsgleichungen). Werden weiterhin nur die ersten M niederfrequenten Eigenmoden betrachtet, kann das Differentialgleichungssystem weiter vereinfacht werden:

$$(7) \quad \mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad \text{mit} \quad \Phi = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_m, \dots, \boldsymbol{\varphi}_M]$$

In Gl. (7) ist \mathbf{q} der Vektor der Modalkoordinaten. Die Modalmatrix Φ enthält als Spalten die Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_m$ ($m = 1, \dots, M$; M : Anzahl der betrachteten Eigenmoden/Eigenvektoren) der Strukturgleichung ohne äußere Anregung („wind-off condition“: $U_\infty = 0$ m/s bzw. $q_\infty = 0$ Pa). Einsetzen des Ansatzes aus Gl. (7) in Gl. (5) und Linksmultiplikation der Gleichung mit Φ^T liefert die aeroelastische Gleichung in generalisierten (modalen) Koordinaten:

$$(8) \quad \mathbf{M}_{gen} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}_{gen} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_{gen} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{gen}(t)$$

Generalisierte Massenmatrix: $\mathbf{M}_{gen} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$

Generalisierte Dämpfungsmatrix: $\mathbf{D}_{gen} = \Phi^T \mathbf{D} \Phi$

Generalisierte Steifigkeitsmatrix: $\mathbf{K}_{gen} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$

Vektor der generalisierten Kräfte: $\mathbf{f}_{gen} = \Phi^T \mathbf{f}$

Das m -te Element des Vektors der generalisierten Luftkräfte $\mathbf{f}_{gen}(t)$ berechnet sich demnach über folgendes Skalarprodukt:

$$(9) \quad f_{gen,m}(t) = \boldsymbol{\varphi}_m \circ \mathbf{f}(t) \quad \text{bzw.} \quad f_{gen,m}(t) = q_\infty \cdot \int_S c_{p,i}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_m d\mathbf{S}$$

Wird die Struktur in einer Eigenmode bewegt (findet also eine sogenannte modale Bewegung statt), so stellt sich die entsprechende zeitabhängige Druckverteilung aufgrund dieser Bewegung ein. Der Vektoreintrag $f_{gen,mn}$ bedeutet dann die m -te generalisierte Luftkraft aufgrund der Deformation in Mode n ($n = 1, \dots, M$):

$$(10) \quad f_{gen,mn}(t) = q_\infty \cdot \int_S c_{p,n}(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}_m d\mathbf{S}$$

Bei linearen zeitinvarianten dynamischen Systemen erhält man das (beliebige) Ausgangssignal $y(t)$ des Systems über die Faltung des (beliebigen) Eingangssignals $x(t)$ mit der Impulsantwort des Systems $h(t)$ [16]:

$$(11) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = (x * h)(t)$$

Mit der Annahme, dass die generalisierte Luftkraft linear mit der Amplitudenbewegung einer Eigenmode zusammenhängt (und dies ist für hinreichend kleine Amplituden gemäß der klassischen Flatteranalyse der Fall), ergibt sich der generalisierte Luftkraftvektor $\mathbf{f}_{gen}(t)$ (Ausgangssignal) als Faltung zwischen der Impulsantwort aufgrund eines Einheitsimpulses in einer Mode und der generalisierten Koordinate \mathbf{q} (Eingangssignal) [26]:

$$(12) \quad \mathbf{f}_{gen}(t) = q_{\infty} \cdot \int_0^t \mathbf{Q}(t-\tau) \cdot \mathbf{q}(\tau) d\tau = q_{\infty} \cdot \mathbf{Q} * \mathbf{q}$$

wobei die Matrix \mathbf{Q} die Impulsantwort von Mode m aufgrund einer impulsförmigen Auslenkung von Mode n als Spalte enthält und eine Übertragungsmatrix im Zeitbereich darstellt (Faltungsoperator $*$, [16]).

Es gilt weiterhin, dass die Faltung zweier Signale im Zeitbereich äquivalent ist zur Multiplikation der beiden Signale im Frequenzbereich [16]. Die klassische Flattergleichung resultiert aus der Überführung von Gl. (8) in den Frequenzbereich mit dem Ansatz $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}$:

$$(13) \quad (-\omega^2 \mathbf{M}_{gen} + i\omega \cdot \mathbf{D}_{gen} + \mathbf{K}_{gen} - q_{\infty} \mathbf{GAF}(k_{red}, Ma_{\infty})) \cdot \mathbf{q}_0 = 0$$

In Gl. (13) stellt die komplexe Matrix $\mathbf{GAF}(k_{red}, Ma_{\infty})$ (**G**eneralized **A**erodynamic **F**orces) die Transfermatrix \mathbf{Q} im Frequenzbereich dar. Das komplexe Matricelement \mathbf{GAF}_{mn} ist der Beitrag der m -ten generalisierten Luftkraft aufgrund einer harmonischen Bewegung von Mode n mit der Kreisfrequenz ω bzw. der reduzierten Frequenz $k_{red} = \omega \cdot l_{ref} / U_{\infty}$.

Der Flatterpunkt (Struktur führt indifferente Schwingungen aus) kann im Zeitbereich oder im Frequenzbereich bestimmt werden. Im Zeitbereich wird Gl. (8) für verschiedene Staudrücke und Machzahlen direkt gelöst und man betrachtet den zeitlichen Verlauf der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}(t)$ die entweder gedämpft, indifferent oder angefacht verlaufen. Im Frequenzbereich wird ein komplexes Eigenwertproblem gelöst, das durch Gl. (13) beschrieben wird. Dazu finden Lösungsverfahren wie die k -Methode, p - k -Methode oder ZAEROs g -Methode in Abhängigkeit des Parameters q_{∞} Verwendung [26], [2]. Die errechneten Eigenwerte zeigen dann an, ob ein stabiler oder instabiler Systemzustand vorliegt. In der Industrie wird die Berechnung des Flatterpunktes häufig im Frequenzbereich durchgeführt und so kommt der Bestimmung der GAF-Matrix besondere Bedeutung zu. Die GAF-Matrix wird meist über Verfahren bestimmt, die für diskrete reduzierte Frequenzen die Einträge der Matrix berechnen. Dazu zählen beispielsweise wie eingangs erwähnt die DLM. Ähnlich arbeitet auch das höherwertigere Verfahren AER-SDEu wie in 2.1 gezeigt wurde. Für GAF-Werte, die zwischen den berechneten Frequenzen gesucht werden, wird linear zwischen den entsprechenden Stützstellen interpoliert.

Mit dem zeitechten Euler-Verfahren AER-Eu ist es möglich, eine Spalte der zeitabhängigen Matrix $\mathbf{Q}(t)$ nach Gl. (10) mit einem Rechengang zu bestimmen. Die jeweilige Mode wird impulsartig ausgelenkt (Gl. (3)) und die resultierende generalisierte Luftkraft (normiert mit dem Staudruck q_{∞}) über die Zeit aufgezeichnet. Die Impulsantworten der generalisierten Luftkräfte werden auch für

die Systemidentifikation mit ERA zur Generierung des aerodynamischen ROMs als Zustandsraummodell gebraucht. Der Eingang für dieses ROM sind die amplitudennormierten modalen Auslenkungen und die Ausgänge die generalisierten Luftkräfte.

Die Verfahren AER-Eu und AER-SDEu lösen die enddimensionierten Euler-Gleichungen bzw. Euler-Gleichungen bei kleinen Störungen [11]. Damit stehen die Luftkräfte $c_{p,i}(t) \cdot d\mathbf{S}_i / l^2$ in dimensionsloser Form zur Verfügung. Durch Multiplikation mit dem Staudruck q_{∞} und dem Quadrat der Normierungslänge l^2 erhält man die dimensionsbehafteten Luftkräfte, vgl. (6). Analoge Umrechnungen müssen auch auf die restlichen Gleichungen angewandt werden, um die CFD-Ergebnisse in den dimensionsbehafteten Raum zu überführen. Zudem ist auch die dimensionslose Zeit auf die reale physikalische umzurechnen ($t \leftrightarrow \tau$).

Die Überführung der generalisierten Luftkräfte in den Frequenzbereich kann direkt über die Matrix \mathbf{Q} mittels der diskreten Fourier-Transformation (DFT) realisiert werden. Die Fouriertransformierte der Matrix \mathbf{Q} entspricht dann der GAF-Matrix im Frequenzbereich. Die Werte liegen für diskrete Frequenzen (bzw. reduzierte Frequenzen) vor, deren Frequenzabstand (Frequenzauflösung) durch die Anzahl der Zeitschritte und der Zeitschrittweite festgelegt wird. Es gelten die Beziehungen:

$$(14) \quad DFT(\mathbf{Q}(t)) = \mathbf{GAF}(k_{red}, Ma_{\infty})$$

bzw. für beliebige Ein-/Ausgangskombinationen (Voraussetzung Linearität):

$$(15) \quad \frac{DFT(\mathbf{f}_{gen}(t, Ma_{\infty}))}{DFT(\mathbf{q}(t, Ma_{\infty}))} = \mathbf{GAF}(k_{red}, Ma_{\infty})$$

Im Frequenzbereich kann die GAF-Matrix über das zeitlinearisierte Euler-Verfahren AER-SDEu ermittelt werden. AER-SDEu berechnet Real- und Imaginärteil der Strömungsgrößen, wie z.B. des Druckbeiwerts, für eine bestimmte reduzierte Frequenz k_{red} . Aus diesem Ergebnis kann man anschließend die komplexe Matrix GAF (normiert mit q_{∞}) über folgenden Zusammenhang bestimmen:

$$(16) \quad \text{Re } \mathbf{GAF}_{mn} = \int_S \text{Re } c_{p,n}^1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_m \cdot d\mathbf{S}^0 + \int_S c_p^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_m \cdot d\mathbf{S}_n^1$$

$$(17) \quad \text{Im } \mathbf{GAF}_{mn} = \int_S \text{Im } c_{p,n}^1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_m \cdot d\mathbf{S}^0$$

In Gleichung (16) und (17) bezeichnen $\text{Re } c_{p,n}^1$ und $\text{Im } c_{p,n}^1$ den Real- und Imaginärteil der komplexen Amplitude des Druckbeiwerts aufgrund einer harmonischen Schwingung in Eigenmode n . Der Superskript 1 verdeutlicht, dass hier die 1. Harmonische des periodischen Antwortsignals (hier Druckverteilung c_p) betrachtet wird bzw. berechnet wurde. Mit c_p^0 wird die 0. Harmonische des Druckbeiwerts bezeichnet, der dem Druckbeiwert der stationären Lösung entspricht (siehe 2.1). Weiterhin sind in Gleichung (16) und (17) die Größen $d\mathbf{S}^0$ und $d\mathbf{S}_n^1$ zu finden, die jeweils der Oberflächenvektor des unverformten Körpers und der Störfächenvektor der Störmetrik von Eigenmode n sind [4], [11].

Werden generalisierte Luftkräfte für harmonische Schwingungen einer Mode n im Zeitbereich über AER-Eu oder ROM/ERA berechnet, so erhält man die Spalte n der Matrix **GAF** über die Fourieranalyse der periodischen Zeitreihe der generalisierten Luftkraft $f_{\text{gen},mn}(t)$. Die Fourierkoeffizienten der 1. Harmonischen werden dann den Anteilen der komplexen Amplituden zugeordnet. Damit ist die Phasenlage und die Amplitude für eine diskrete Schwingungsfrequenz der Struktur bestimmt und die komplexen Anteile werden als Spalten in die GAF-Matrix eingetragen.

3. ERGEBNISSE

3.1. AGARD 445.6 Flügelkonfiguration

Die CFD-Berechnungen wurden, wie eingangs erwähnt, für die AGARD 445.6 Konfiguration durchgeführt. Hierbei handelt es sich um einen aeroelastischen Standardtestfall, für den umfangreiche Validierungsergebnisse vorliegen [25], [14], [18]. Diese Konfiguration ist ein Halbflügel mit einer Streckung von $\Lambda = 1.65$, Pfeilung $\phi_{0.25} = 45^\circ$, Zuspitzung $\lambda = 0.66$ und einer Wurzelsehnenlänge von $c_r = 0.558$ m. Die Halbspannweite beträgt $s = 0.762$ m bei einer Oberfläche von 0.353 m². Der Flügel besitzt ein NACA 65A004 Profil, BILD 1.

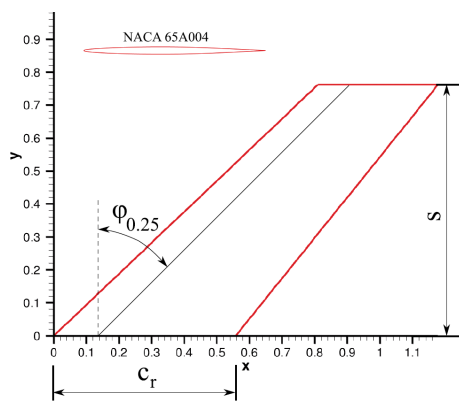


BILD 1. Grundriss der AGARD 445.6 Konfiguration

Alle Rechennetze (d. h. das Rechennetz des unverformten Flügels und die Rechennetze der Eigenmoden des Flügels) wurden mit dem kommerziellen Netzgenerierungswerkzeug ICEM-CFD [1] erzeugt und anschließend mit dem hausinternen elliptischen Netzglätter GRIDFLM geglättet. Das CFD-Netz des unverformten Flügels besitzt eine C-H 1-Block Topologie mit insgesamt 450560 Zellen, wobei in Tiefen-, Spannweiten- und Normalenrichtung jeweils 176, 64 und 40 Zellen verteilt wurden, siehe BILD 2. Zur Diskretisierung der Flügeloberfläche wurden 6144 Zellen verwendet. Die Normierungslänge beträgt $\bar{l} = 1$ m, so dass beispielsweise die dimensionslose Wurzelsehnenlänge des CFD-Netzes $c_r = 0.558$ beträgt. Der Abstand der körpfernächsten Zellreihe beträgt $10^{-3} \cdot c_r$ und der Fernfeldabstand ist in Tiefen-, Spannweiten- und Normalenrichtung auf $10 \cdot c_r$ festgelegt. Ähnliche Zellverteilungen wurden auch schon von anderen Autoren verwendet [18] und die gewählte Zellverteilung wird als ausreichend für die numerische Simulation mittels AER-Eu betrachtet. Die Eigenmoden wurden über die FEM bestimmt und eine Spline-Interpolation der Strukturnetzpunkte auf die CFD-Oberflächennetzpunkte dient

dazu, für die ersten vier Eigenmoden jeweils ein CFD-Netz zu erstellen. Die Topologie der Rechengitter der verformten Oberflächen sind analog zum CFD-Netz des unverformten Flügels aufgebaut, BILD 3. Die maximalen Amplituden der Eigenmoden wurden so skaliert, dass die maximale Auslenkung im Rechennetz 0.5% der dimensionslosen Halbspannweite ($s = 0.762$) des Flügels beträgt und die Annahme von kleinen Auslenkungen (kleine Störungen) für das zeitlinearisierte Euler-Verfahren noch Gültigkeit besitzt.

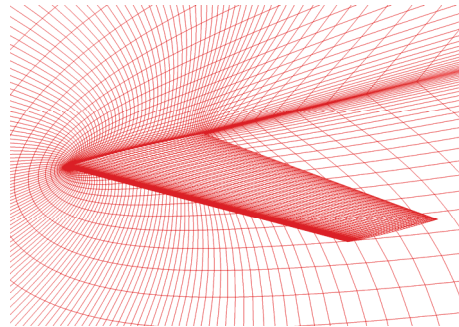


BILD 2. Diskretisierte Flügeloberfläche und Symmetrieebene des Rechennetzes

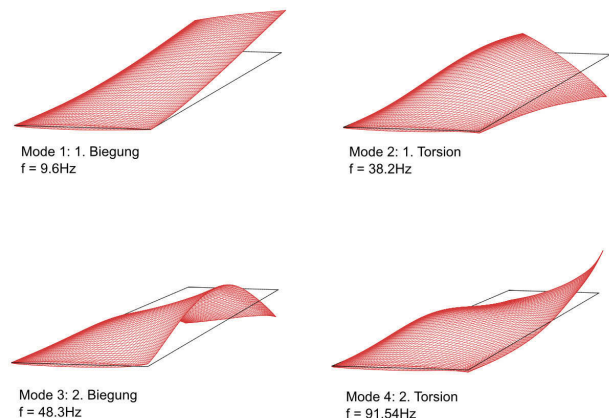


BILD 3. Die ersten vier Eigenformen der AGARD 445.6 Konfiguration (50-fach überhöht dargestellt)

3.2. Stationäre Lösung

In dieser Arbeit wurden die Anströmmachzahlen $Ma_\infty = 0.678$, $Ma_\infty = 0.901$ und $Ma_\infty = 0.954$ untersucht. Den Anfangswert zur Berechnung der instationären Lösung (Impulsantwort und Frequenzgang) bildet das stationäre Strömungsfeld. In BILD 4, BILD 5 und BILD 6 ist das stationäre Ergebnis in Form des c_p -Verlaufs für die betrachteten Machzahlen an der spannweiten Position $\eta = 0.25$ dargestellt. Der Anstellwinkel beträgt jeweils $\alpha = 0.0^\circ$. Alle Simulationen (stationäre, zeitecht instationäre und zeitlinearisiert instationäre Rechnungen) wurden beendet, nachdem die L_2 -Norm der Dichte normiert mit dem Wert nach der ersten Iteration unter einen Wert von $1.0 \cdot 10^{-5}$ gefallen ist. BILD 4 und BILD 5 zeigen eine Druckverteilung auf dem AGARD 445.6 Flügel, die als typisch subsonisch charakterisiert werden kann. Der kritische Druckbeiwert $c_p^* = -0.188$ wird auch bei $Ma_\infty = 0.901$ aufgrund des dünnen Profils (4% Dicke) an keinem Punkt

unterschritten, obwohl die Machzahl der freien Anströmung auf transsonische Strömungsverhältnisse schließen lassen würde. Mit der Steigerung der Machzahl auf $Ma_\infty = 0.954$ findet ein Übergang von hoher subsonischer zu transsonischer Strömung statt (siehe BILD 6). Der kritische Druckbeiwert $c_p^* = -0.081$ wird bei $x/c \approx 0.2$ unterschritten, womit an diesem Punkt die lokale Machzahl den Wert $Ma = 1.0$ überschreitet. Der starke Gradient des c_p -Verlaufs ab $x/c \approx 0.6$ weist auf die Existenz bzw. Entwicklung eines schwachen Stoßes mit noch moderater Rekompensation auf lokale Unterschallströmung hin. Die Bilder zeigen, dass der AGARD 445.6 Flügel einen Testfall beschreibt, für den über einen weiten Machzahl-Bereich (bis $Ma_\infty = 0.901$) noch eine lineare bzw. schwach nichtlineare Strömungstopologie vorliegt ($Ma_\infty = 0.954$). Zu einer ersten Validierung von numerischen Verfahren ist diese Konfiguration deshalb gut geeignet.

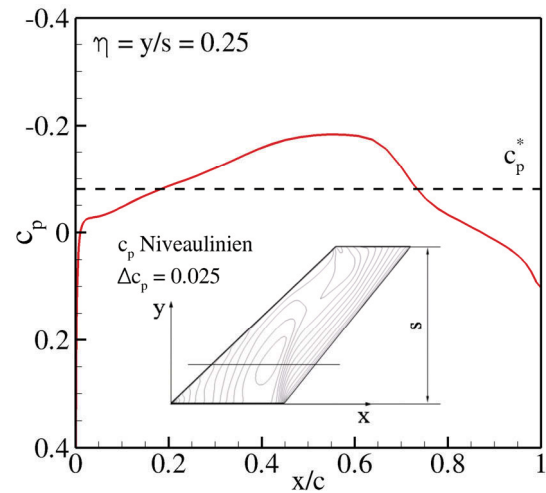


BILD 6. Stationäre Druckverteilung bei $Ma_\infty = 0.954$ an der Position $\eta = 0.25$

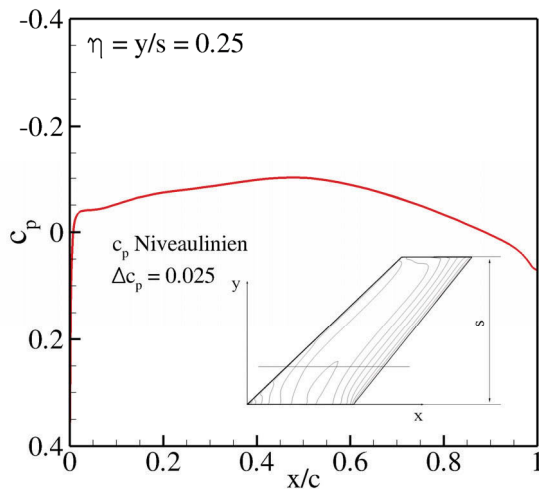


BILD 4. Stationäre Druckverteilung bei $Ma_\infty = 0.678$ an der Position $\eta = 0.25$

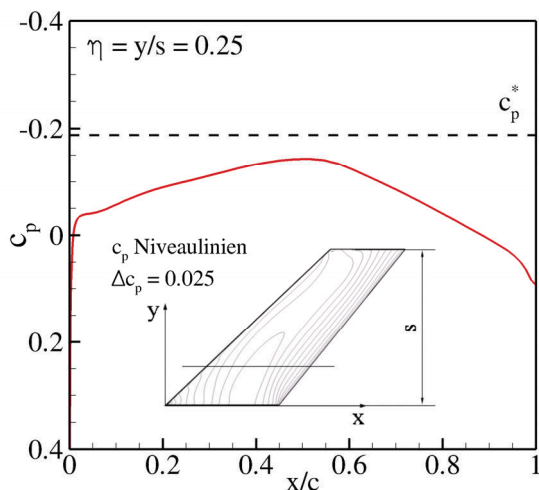


BILD 5. Stationäre Druckverteilung bei $Ma_\infty = 0.901$ an der Position $\eta = 0.25$

3.3. Instationäre Lösung

Die instationären Rechnungen wurden analog zu der schematischen Darstellung in BILD 7 realisiert. Grundlage zur Durchführung der instationären CFD-Rechnungen ist ein stationäres Ergebnis für die jeweilige Machzahl (und Anstellwinkel), siehe 3.2. Als Referenzwerte werden mit AER-Eu direkt generalisierte Luftkräfte für harmonische Schwingungen berechnet, vgl. Pfad 1 in BILD 7. Die Impulsantworten werden für jede der drei betrachteten Machzahlen für jede Eigenmode mit AER-Eu nacheinander bestimmt und die Zeitreihe der generalisierten Luftkräfte berechnet, vgl. Pfad 2 in BILD 7. Mit einem Rechengang wird somit eine Spalte der Matrix $\mathbf{Q}(t)$ bestimmt. Ausgehend von den Impulsantworten wird dann für jede Mode ein Zustandsraummodell über ERA generiert. Mit dem Vorliegen des Zustandsraummodells ROM/ERA hat man die Möglichkeit, auch für harmonische bzw. „beliebige“ Eingangssignale die resultierenden generalisierten Luftkräfte zu bestimmen. Die Überführung der Ergebnisse in den Frequenzbereich erfolgt über die Fourier-Analyse der periodischen generalisierten Luftkraftantwort für eine diskrete Frequenz. Da alle Ergebnisse Lösungen der dimensionslosen Euler-Gleichungen darstellen bzw. auf Lösungen der dimensionslosen Euler-Gleichungen basieren, sind alle generalisierten Luftkräfte $\mathbf{f}_{\text{gen}}(\tau)$ mit dem Staudruck q_∞ normiert zu verstehen. Wie in 2.3 erwähnt, ergibt die DFT der Impulsantworten bzw. der Matrix \mathbf{Q} die GAF-Matrix im Frequenzbereich, BILD 7. Mit AER-SDEu werden für ausgewählte reduzierte Frequenzen Rechnungen im Frequenzbereich durchgeführt und die GAF-Matrix generiert, vgl. Pfad 3 in BILD 7. Damit können die Lösungen der Verfahren AER-Eu, AER-SDEu, ROM/ERA und der DFT der Impulsantworten direkt über die GAF-Matrix verglichen werden, siehe 3.3.3.

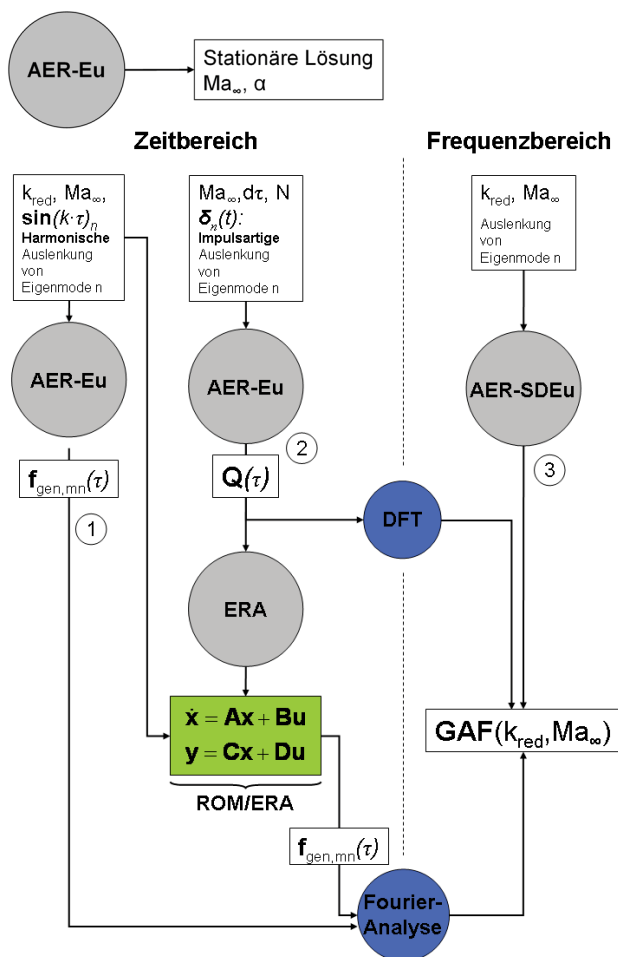


BILD 7. Schematische Darstellung der Rechenprozedur

3.3.1. Impulsantwort und ROM/ERA

Die Impulsantworten wurden für $N = 2000$ Zeitschritte und einer dimensionslosen Zeitschrittweite $\Delta\tau = 0.1$ mit AER-Eu berechnet. Damit ergibt sich ein Zeitfenster von $T = 200$ (dimensionslos). Diese Einstellungen wurden für jede der drei betrachteten Machzahlen beibehalten. Die Darstellung aller Ergebnisse (also drei Machzahlen, 4×4 Zeitreihen der Impulsantworten pro Machzahl etc.) wäre im Rahmen dieses Beitrags zu umfangreich, so dass man sich im Folgenden auf die Darstellung von ausgewählten Ergebnissen beschränkt. In BILD 8 sind die Impulsantworten in den ersten 4 Moden für die Machzahlen $Ma_\infty = 0.678$, $Ma_\infty = 0.901$ und $Ma_\infty = 0.954$ über der dimensionslosen Zeit τ aufgetragen. Die Diagonalelemente zeigen betragsmäßig den größten Ausschlag, da sie jeweils die generalisierte Luftkraft aufgrund der Bewegung in der eigenen generalisierten Koordinate darstellen. Weiterhin zeigt sich für steigende Machzahlen (beginnend bei $Ma_\infty = 0.678$) eine Abnahme in der Amplitude der Impulsantwort, was mit der Verminderung des lokalen Anstellwinkels mit steigender Anströmgeschwindigkeit bei gleichbleibender Deformationsgeschwindigkeit zu erklären ist.

Ausgehend von den Impulsantworten wird für jede Mode ein Zustandsraummodell über ERA generiert, das über einen Eingang (Auslenkung in Mode n) und vier Ausgänge ($f_{gen,mn}(\tau)$) verfügt („SIMO“-System). Die Auslenkung einer

Mode als Eingang ergibt die 4 Elemente des generalisierten Luftkraftvektors. Eine Variation der Systemordnung n des Zustandsraummodells für einen ausgewählten Fall ($Ma_\infty = 0.901$) zeigte für $n = 200$ die beste Beschreibung/Abbildung des Systems. Deshalb wurde die Systemordnung für jedes generierte Zustandsraummodell auf $n = 200$ gesetzt. In BILD 9 und BILD 10 sind die Elemente Q_{11} und Q_{22} der Matrix Q über der dimensionslosen Zeit für die drei Machzahlen dargestellt. Q_{11} entspricht der generalisierten Luftkraft in Mode 1 aufgrund einer impulsartigen Auslenkung von Mode 1 (Q_{22} analog). Die in BILD 9 und BILD 10 gezeigten Werte sind einerseits die Impulsantworten, die auch zur Systemidentifikation verwendet wurden, andererseits sind Impulsantworten aufgetragen, die über das ROM/ERA berechnet wurden. Es ergibt sich eine nahezu vollständige Übereinstimmung zwischen den entsprechenden Ergebnissen.

3.3.2. Harmonische Schwingungen

Mit AER-Eu wurden für fünf reduzierte Frequenzen zeitechte instationäre Rechnungen für harmonische Schwingungen in den vier Eigenmoden des AGARD 445.6 Flügels durchgeführt. Auch hier wurden die Zeitreihen der generalisierten Luftkräfte aufgezeichnet. Entsprechende Rechnungen für vier reduzierte Frequenzen wurden im Frequenzbereich mit AER-SDEu durchgeführt und in eine Zeitreihe umgewandelt, die als ideal-harmonische Antwort auf die sinusförmige Auslenkung aufgefasst werden kann. Eine Auflistung der berechneten reduzierten Frequenzen mit den hier verwendeten Verfahren zeigt TAB 1. Mit dem zeitlinearisierten Verfahren AER-SDEu ist es auch möglich, den quasistationären Fall ($k_{red} = 0$) direkt zu berechnen. Das ist mit AER-Eu und ROM/ERA nur bedingt möglich, indem man $k_{red} \rightarrow 0$ betrachtet.

Die reduzierte Frequenz k_{red} ist in dieser Arbeit wie folgt definiert:

$$(18) \quad k_{red} = \frac{\omega \cdot l_{ref}}{U_\infty}$$

Sie wird nach Gl. (18) mit der Kreisfrequenz ω , der Anströmgeschwindigkeit U_∞ und einer Referenzlänge l_{ref} gebildet, die in dieser Arbeit durch die Flügelwurzel-sehnenlänge bestimmt ist. Den Zusammenhang zwischen reduzierter Frequenz k_{red} und der dimensionslosen Kreisfrequenz k gibt Gl. (19) an. Aus k lässt sich die dimensionslose Periodendauer T berechnen.

$$(19) \quad k = k_{red} \cdot Ma_\infty \cdot \sqrt{\kappa}, \quad T = 2\pi / k$$

Zur Berechnung der instationären Aerodynamik für harmonische Schwingungen mit AER-Eu werden drei Parameter eingestellt:

- reduzierte Frequenz k_{red}
- Anzahl der Schwingungszyklen n_{Phase}
- Anzahl der Zeitintervalle in einer Periode N_{AER-Eu}

Aus k_{red} bzw. der dimensionslosen Kreisfrequenz k , ergibt sich die dimensionslose Periodendauer T , vgl. Gl. (19) und mit N_{AER-Eu} die Zeitschrittweite $\Delta\tau$. Für die Diskretisierung einer Periode wurden 100 Zeitintervalle eingestellt ($N_{AER-Eu} = 100$).

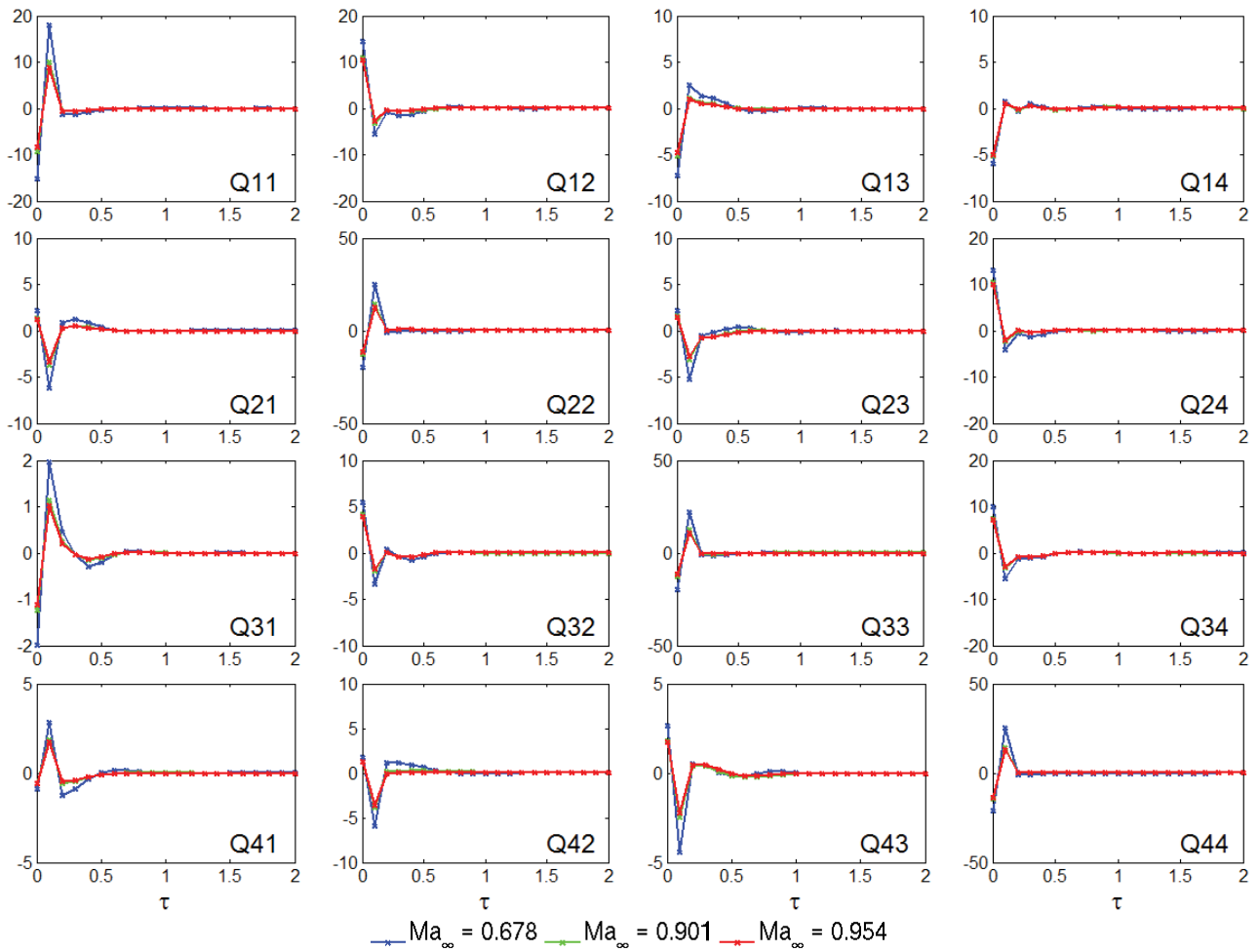


BILD 8. Impulsantworten in Mode 1 bis 4 für die Machzahlen $\text{Ma}_\infty = 0.678$, $\text{Ma}_\infty = 0.901$ und $\text{Ma}_\infty = 0.954$

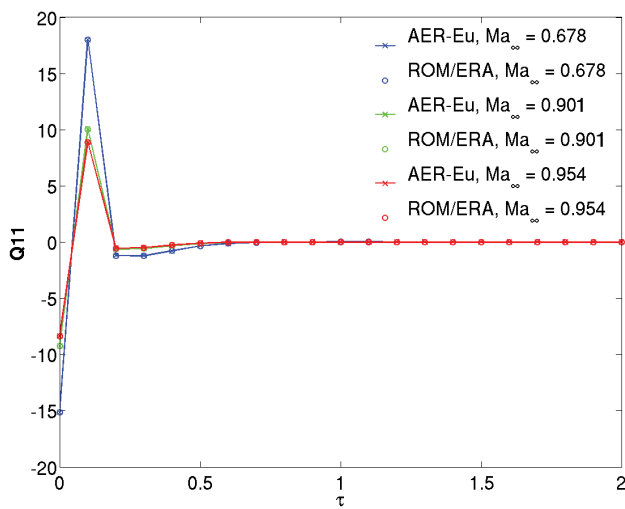


BILD 9. Matricelement Q_{11} für $\text{Ma}_\infty = 0.678$, $\text{Ma}_\infty = 0.901$ und $\text{Ma}_\infty = 0.954$

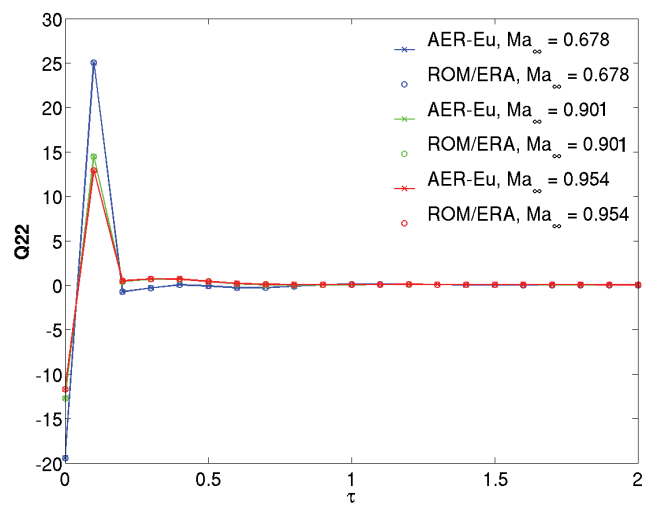


BILD 10. Matricelement Q_{22} für $\text{Ma}_\infty = 0.678$, $\text{Ma}_\infty = 0.901$ und $\text{Ma}_\infty = 0.954$

Bei gleicher Anströmmachzahl ergeben sich für die betrachteten reduzierten Frequenzen deshalb unterschiedliche Zeitskretisierungen ($d\tau = T / N_{\text{AER-Eu}}$). Für niedrige k_{red} ergeben sich große Zeitschritte und umgekehrt. Mit AER-Eu wurden drei Schwingungszyklen gerechnet, da man aus Erfahrung davon ausgehen kann, dass der Einschwingvorgang in dieser Zeit weitgehend abgeklungen ist. Für das aerodynamische ROM, das über die Systemidentifikation mit ERA erzeugt wurde, ist man hingegen auf den Zeitschritt beschränkt, der zur Berechnung der Impulsantwort mit AER-Eu verwendet wurde (siehe 3.3.1). Die zeitdiskreten Systemmatrizen des Zustandsraummodells gelten nur für diesen Zeitschritt, sodass für große Schwingungsfrequenzen eine relativ grobe zeitliche Auflösung vorliegen kann. Die Antwortsignale wurden mit ROM/ERA für elf reduzierte Frequenzen berechnet (TAB 1).

Verfahren \ k_{red}	AER-Eu	ROM/ERA	AER-SDEu
0.000			x
0.043	x	x	x
0.425	x	x	x
0.850		x	
1.276	x	x	x
1.700		x	
2.125		x	
2.550		x	
3.000	x	x	
3.400		x	
3.825		x	
4.252	x	x	x

TAB 1. Betrachteter Frequenzbereich und berechnete Frequenzpunkte

In BILD 11, BILD 12 und BILD 13 ist die generalisierte Luftkraft $f_{\text{gen},11}$ für die Machzahl $Ma_{\infty} = 0.901$ für die Frequenzen $k_{\text{red}} = 0.425$, $k_{\text{red}} = 1.276$ und $k_{\text{red}} = 4.252$ dargestellt. Der Vergleich zwischen den Ergebnissen von AER-Eu und ROM/ERA zeigt, dass abhängig von der vorliegenden Frequenz die Übereinstimmung variiert. Die Ergebnisse von AER-Eu werden grundsätzlich als Referenzwert angesehen. Das Ergebnis von $f_{\text{gen},11}$, berechnet mit ROM/ERA für $k_{\text{red}} = 1.276$, gibt sehr gut den Verlauf von $f_{\text{gen},11}$ aus AER-Eu wieder. In den Bildern ist auch der Kraftverlauf zu sehen, der sich aus der quasi rein harmonischen Antwort des zeitlinearisierten Verfahrens AER-SDEu ergibt, der für alle Frequenzen etwa die gleiche Abweichung von der AER-Eu-Lösung aufweist. Für $k_{\text{red}} = 0.425$ errechnet das ROM die Amplitude etwas verschoben im Vergleich mit AER-Eu. Bei der Frequenz $k_{\text{red}} = 4.252$ zeigen sich die stärksten Unterschiede zwischen den Lösungen des ROM/ERA und AER-Eu. Dies ist vor allem auf die für alle betrachteten Fälle identische Zeitschrittweite zurückzuführen, die bei der Systemidentifikation von ROM/ERA gewählt wurde. Damit kann nur eine gewisse maximale Frequenz einer Schwingungsform hinreichend genau dargestellt werden. Um eine bessere Korrelation der Ergebnisse ROM/ERA und AER-Eu für die größte betrachtete Frequenz zu erhalten, muss man den Zeitschritt zur Systemidentifikation an den Zeitschritt des zeitechten Euler-Verfahrens anpassen, der sich für die größte zu erfassende Frequenz ergibt.

Bei einer festgehaltenen reduzierten Frequenz von $k_{\text{red}} = 1.276$ und unterschiedlichen Anströmmachzahlen

korrelieren die Resultate von ROM/ERA und AER-Eu sehr gut miteinander, vgl. BILD 12, BILD 14, BILD 15. In den Bildern (BILD 11 - BILD 15) ist auch der Einschwingvorgang zu Beginn des Zeitintervalls zu erkennen, der vom ROM ebenfalls gut erfasst wird.

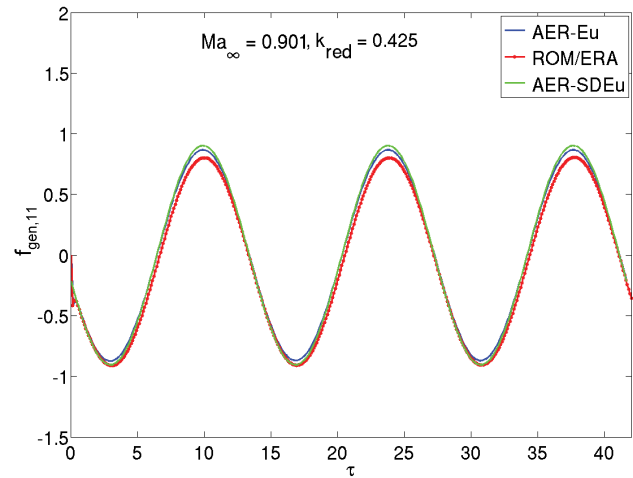


BILD 11. $f_{\text{gen},11}$ für eine harmonische Auslenkung mit $k_{\text{red}} = 0.425$ bei $Ma_{\infty} = 0.901$

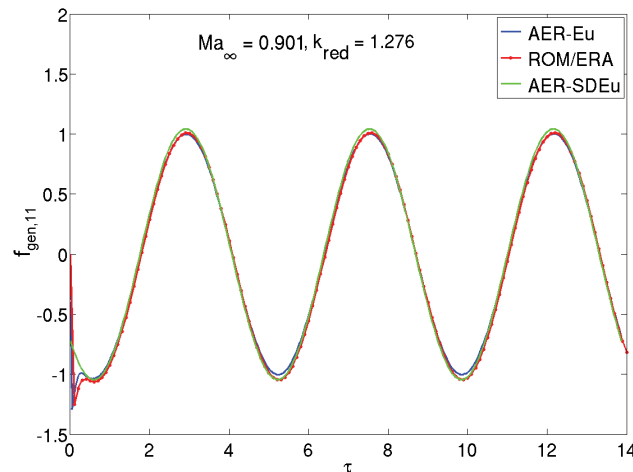


BILD 12. $f_{\text{gen},11}$ für eine harmonische Auslenkung mit $k_{\text{red}} = 1.276$ bei $Ma_{\infty} = 0.901$

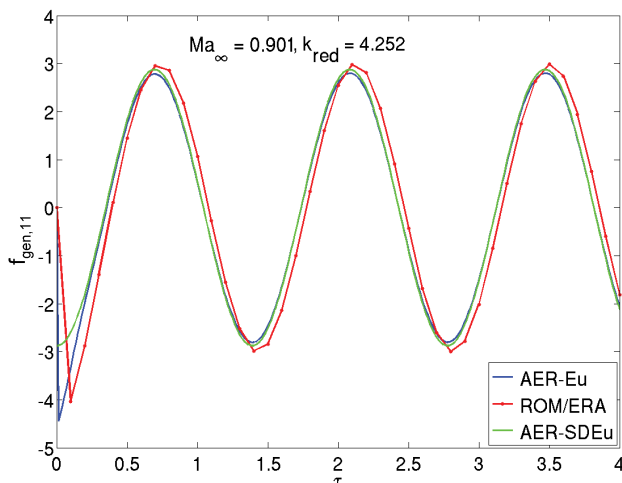


BILD 13. $f_{\text{gen},11}$ für eine harmonische Auslenkung mit $k_{\text{red}} = 4.252$ bei $Ma_{\infty} = 0.901$

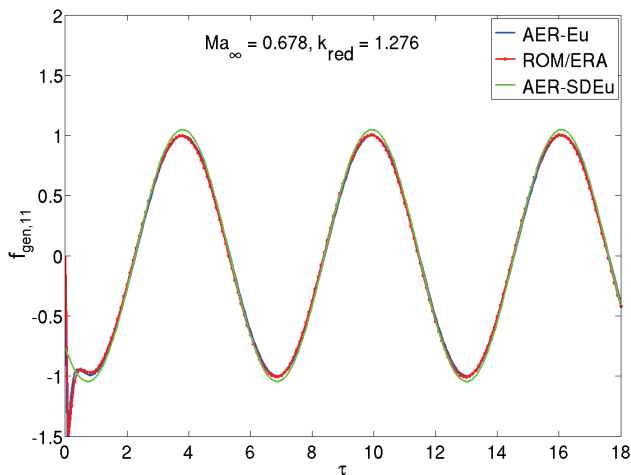


BILD 14. $f_{\text{gen},11}$ für eine harmonische Auslenkung mit $k_{\text{red}} = 1.276$ bei $Ma_{\infty} = 0.678$

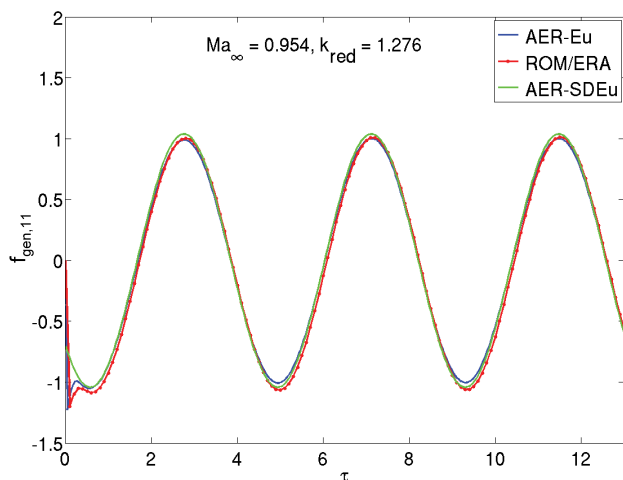


BILD 15. $f_{\text{gen},11}$ für eine harmonische Auslenkung mit $k_{\text{red}} = 1.276$ bei $Ma_{\infty} = 0.954$

3.3.3. Frequenzbereich

Die Überführung der Ergebnisse für harmonische Schwingungen in den Frequenzbereich erfolgt durch eine Fourier-Analyse der Zeitreihen. Dabei wird für alle Ergebnisse (AER-Eu und ROM/ERA) immer der dritte Schwingungszyklus (eingeschwungener Zustand) analysiert und Real- und Imaginärteil bezüglich der 1. Harmonischen der Fourierreihe zur Auswertung herangezogen. Damit lassen sich die Luftkraftamplitude und der relativ zur Bewegungsform vorliegende Phasenwinkel der Luftkraft angeben.

Die DFT der Matrix \mathbf{Q} wurde mit der `fft(x)`-Funktion in MATLAB durchgeführt. Dargestellt werden die Real- und Imaginärteile der komplexen Fourierkoeffizienten. Es ergibt sich bei der hier verwendeten Zeitschrittweite und Zeitreihenlänge (siehe 3.3.1) eine dimensionslose Frequenzauflösung von $f = 0.005$ bzw. eine reduzierte Frequenzauflösung von $k_{\text{red}} = 0.0392$, $k_{\text{red}} = 0.0295$ und $k_{\text{red}} = 0.0278$ für die Machzahlen $Ma_{\infty} = 0.678$, $Ma_{\infty} = 0.901$ und $Ma_{\infty} = 0.954$ respektive (siehe auch Gl. (19)). Ein Vorteil der Methode, die GAF-Matrix mittels DFT der Impulsantworten zu berechnen liegt darin, dass man GAF-Werte für eine hohe Anzahl von Frequenzen im betrachteten Frequenzbereich (theoretisch bis zur Nyquist-Frequenz $f_{\text{max}} = 1/(2 \cdot \Delta t)$) ohne großen Berechnungs-

aufwand erhält.

In BILD 19 sind die GAF-Werte der ersten vier Eigenmoden für die Anströmmachzahl $Ma_{\infty} = 0.901$ dargestellt. BILD 16, BILD 17 und BILD 18 zeigen einen etwas vergrößerten Ausschnitt der GAF-Werte von Mode 1 und Mode 2 für die drei Machzahlen $Ma_{\infty} = 0.678$, $Ma_{\infty} = 0.901$ und $Ma_{\infty} = 0.954$. In den Diagrammen sind die Ergebnisse aller verwendeten Verfahren eingetragen, wobei dem Realteil die Farbe rot und dem Imaginärteil die Farbe blau zugewiesen wurde. Werden die Lösungen des zeitlichten Euler-Verfahrens AER-Eu wiederum als Referenzdaten angesehen, so lässt sich sagen, dass alle Lösungen gut korrespondieren. Abweichungen der ROM/ERA Ergebnisse sind im höheren Frequenzbereich zu erkennen (ab $k_{\text{red}} \approx 3$). Die Ergebnisse von AER-Eu und AER-SDEu passen insgesamt sehr gut zusammen, so dass die Annahme der Linearität als gerechtfertigt erscheint. Eine gute Übereinstimmung mit den AER-Eu Ergebnissen weisen ebenfalls die Lösungen aus der DFT der Impulsantworten auf.

In TAB 2 sind die prozentualen Abweichungen der Verfahren AER-SDEu, ROM/ERA und DFT bezogen auf das AER-Eu Ergebnis für die Frequenzen $k_{\text{red}} = 0.425$ und $k_{\text{red}} = 1.276$ zusammengestellt. Die Abweichungen der Ergebnisse aus AER-SDEu liegen bei maximal 6.24% für Real- und Imaginärteil. Größere relative Fehler sind für ROM/ERA und der DFT im Imaginärteil für $k_{\text{red}} = 0.425$ festzustellen. Der Realteil wird mit allen drei Verfahren für die gezeigten Frequenzen in TAB 2 hinreichend genau berechnet.

Relativer Fehler in % für GAF₁₁, $Ma_{\infty} = 0.901$

k_{red}	AER-SDEu	ROM/ERA	DFT
Realteil			
0.425	3.83	1.45	0.84
1.276	2.76	1.29	4.48
Imaginärteil			
0.425	6.24	11.94	7.29
1.276	5.81	3.34	2.78

TAB 2. Relativer Fehler von GAF11 bei $Ma_{\infty} = 0.901$

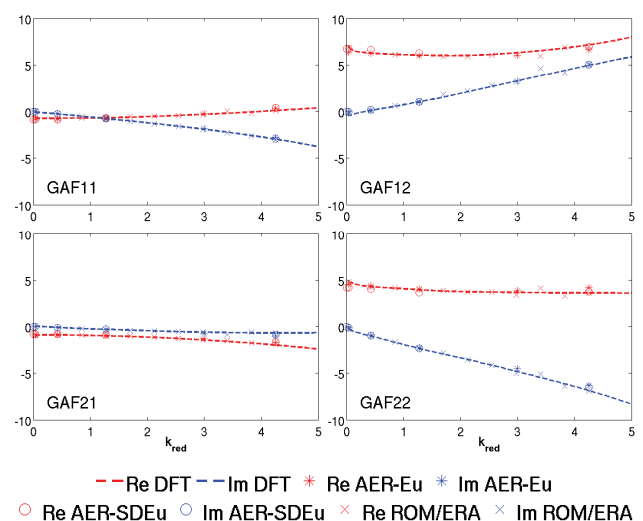
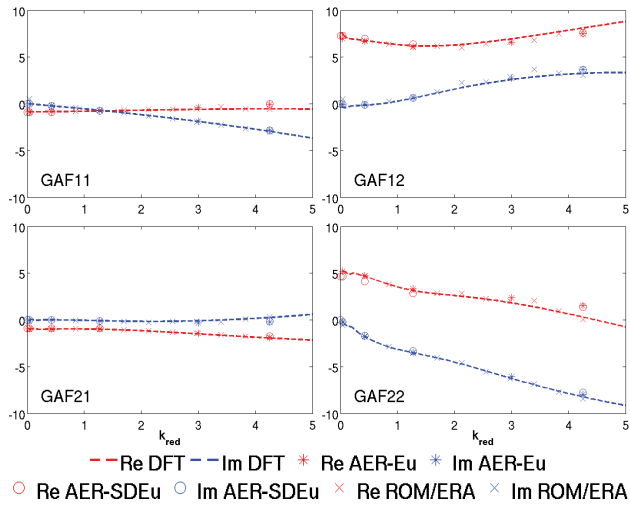
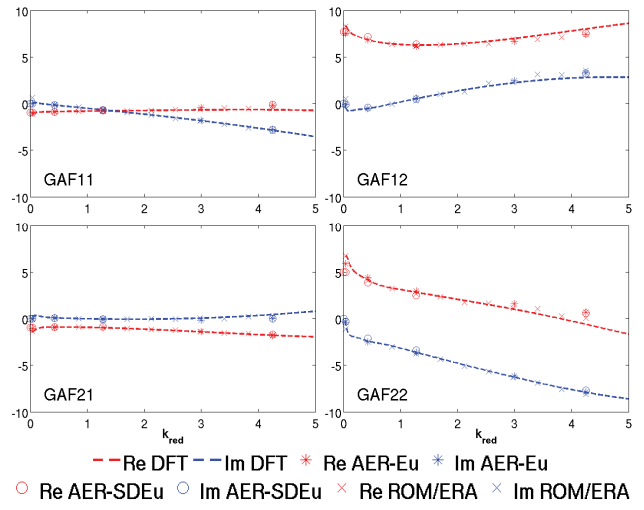
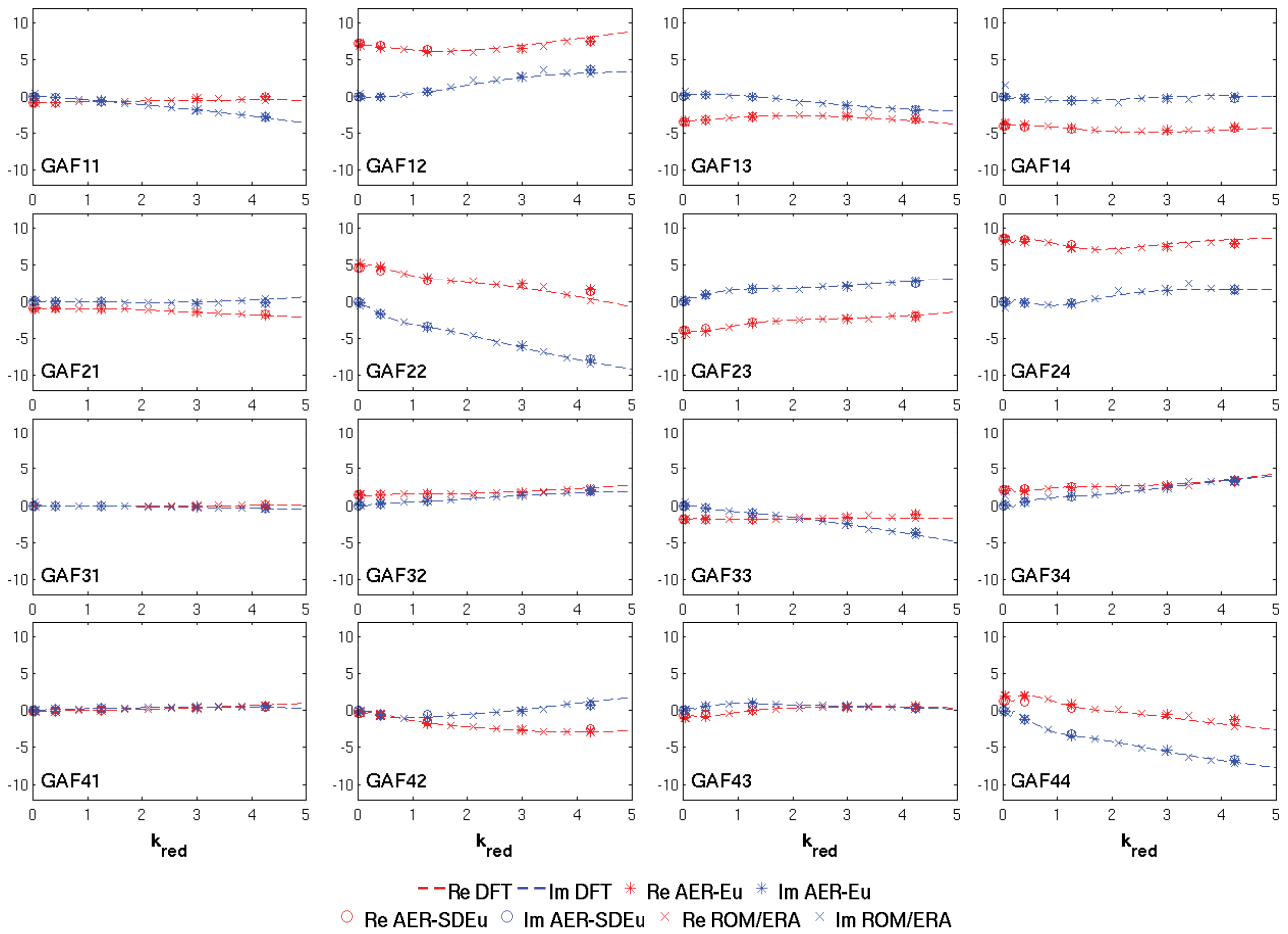


BILD 16. GAF-Werte der ersten zwei Moden für $Ma_{\infty} = 0.678$


 BILD 17. GAF-Werte der ersten zwei Moden für $Ma_\infty = 0.901$

 BILD 18. GAF-Werte der ersten zwei Moden für $Ma_\infty = 0.954$

 BILD 19. GAF-Werte der ersten vier Moden bei $Ma_\infty = 0.901$

3.4. Rechenzeit

CFD-Rechnungen und MATLAB Routinen wurden auf dem Linux-Cluster des LRZ-München ausgeführt. Genutzt wurde speziell das AMD-Opteron Cluster mit 8-Way Opteron Dual Core 2.6 GHz Prozessoren. Beim Vergleich der Rechenzeiten zwischen AER-EU und ROM/ERA, müssen auch die Rechenzeiten berücksichtigt werden, die für die Generierung des ROM mittels ERA bzw. die Berechnung der Impulsantworten mit AER-Eu im Vorfeld der Systemidentifikation benötigt wurden, vgl. TAB 3. Die Berechnung der Systemmatrizen spielt sich im Minutenbereich ab und dauert für $Ma_\infty = 0.901$ für alle fünf Moden ca. 3 Minuten.

TAB 4 zeigt den Vergleich der CPU-Zeiten zur Berechnung der Antwort der generalisierten Luftkraft auf eine harmonische Auslenkung mit einer reduzierten Frequenz von $k_{red} = 1.276$ bei $Ma_\infty = 0.901$. Hier zeigt sich der wesentliche Vorteil des ROMs. Während man für eine einzige reduzierte Frequenz mit AER-Eu ca. 3.5h benötigt, liefert das ROM in sekundenschnelle das Ergebnis für 11 reduzierte Frequenzen (siehe auch TAB 1).

Impulsantwort	CPU-Zeit [s]
Mode 1	4672
Mode 2	5144
Mode 3	4317
Mode 4	4726

TAB 3. CPU-Zeit zur Berechnung der Impulsantworten mit AER-Eu für $Ma_\infty = 0.901$

	AER-Eu	ROM/ERA
CPU-Zeit	12889s ($k_{red} = 1.276$)	< 2s (für 11 k_{red} , vgl. TAB 1)

TAB 4. CPU-Zeit zur Berechnung einer harmonischen Schwingung in Mode 1 ($Ma_\infty = 0.901$)

4. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In diesem Beitrag wurden generalisierte Luftkräfte mit unterschiedlichen aerodynamischen Verfahren für die ersten vier Eigenmoden der AGARD 445.6 Konfiguration bestimmt. Ergebnisse der generalisierten Luftkräfte wurden für den Zeit- und Frequenzbereich gezeigt. Neben den CFD-Verfahren AER-Eu und AER-SDEu kam auch ein aerodynamisches ROM, das durch eine Systemidentifikation mit Hilfe des ERA-Algorithmus erzeugt wurde, zum Einsatz. Dieses ROM wird durch ein zeitdiskretes Zustandsraummodell beschrieben, dessen Eingänge die Auslenkung der jeweiligen Eigenmode und die Ausgänge die entsprechende generalisierte Luftkraft sind. Das ROM/ERA liefert in sekundenschnelle akzeptable Ergebnisse im Vergleich zu einer entsprechenden CFD-Lösung sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich. Mit einer diskreten Fourier-Transformation der Impulsantworten der einzelnen Moden lässt sich ebenfalls die GAF-Matrix im Frequenzbereich erzeugen. Die Ergebnisse der unterschiedlichen Verfahren stimmen gut überein. Bisher wurden die Moden nacheinander ausgelenkt und die Impulsantwort aufgezeichnet. Zur weiteren Reduzierung der Rechenzeit werden zusätzliche Untersuchungen vorgenommen, auch simultane Anregungen der Eigenmoden mit AER-Eu zu

verwirklichen und auf Basis dieses Antwortsignals die Systemidentifikation durchzuführen. Die Entwicklung eines nichtlinearen ROM im Zeitbereich mittels Volterra-Reihen ist Gegenstand weiterer Arbeiten.

5. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Ansys Icem CFD Hexa Version 11.0, Operating Manual.
- [2] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman, "Aeroelasticity", Dover Publications, New York, 1996.
- [3] J. Blazek, "Investigations of the Implicit LU-SSOR Scheme", Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Rept. DLR-FB 93-51, Braunschweig, Germany, July 1993.
- [4] D. Fleischer, C. Vidy, M. Iatrou, C. Breitsamter, C. Weishäupl, "Linear Flutter Prediction For Low Aspect Ratio Wings Using A Small Disturbance Euler Method", International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, 2009, IFASD-2009-055.
- [5] K. C. Hall, E. F. Crawley, "Calculation of Unsteady Flows in Turbomachinery Using the Linearized Euler Equations", AIAA Journal, Vol. 27, No. 6, 1989, pp. 777-787.
- [6] A. Jameson, E. Turkel, "Implicit Schemes and LU-Decompositions", Mathematics of Computation, Vol. 37, No. 156, 1981, pp. 385-397.
- [7] J.-N. Juang, L. G. Horta, M. Phan, "System/Observer/Controller Identification Toolbox", NASA TM-107566, 1992.
- [8] J.-N. Juang, R. S. Pappa, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction" Journal of Guidance, Vol. 8, No. 5, 1984, pp. 620-627.
- [9] J.-N. Juang, M. Phan, L. G. Horta, R. W. Longman, "Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments", NASA TM-104069, 1991.
- [10] J.-N. Juang, "Applied System Identification", Prentice-Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [11] E. Kreiselmaier, B. Laschka, "Small Disturbance Euler Equations: Efficient and Accurate Tool for Unsteady Load Prediction", Journal of Aircraft, Vol. 37, No. 5, 2000, pp. 770-778.
- [12] T. Kim, "Efficient Reduced-Order System Identification for Linear Systems with Multiple Inputs", AIAA Journal, Vol. 43, No. 7, 2005, pp. 1455-1464.
- [13] A. Koelzsch, "Numerische Verfahren reduzierter Ordnung zur Ermittlung instationärer Luftkräfte", Diplomarbeit, Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München, 2009.
- [14] E. M. Lee-Rausch, J. T. Batina, "Wing Flutter Boundary Prediction Using Unsteady Euler Aerodynamic Method", Journal of Aircraft, Vol. 32, No. 2, 1995, pp. 416-422.
- [15] D. J. Lucia, P. S. Beran, W. A. Silva, "Reduced-order models: new approaches for computational physics", Progress in Aerospace Sciences 40, 2004, pp. 51-117.
- [16] K. Meyberg, P. Vachenauer, "Höhere Mathematik 2", Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [17] P.L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes", Journal of Computational Physics, Vol. 43, No. 2, 1981, pp. 357-372.
- [18] D.E. Raveh, Y. Levy and M. Karpel, "Efficient Aeroelastic Analysis Using Computational Unsteady

- Aerodynamics", *Journal of Aircraft*, Vol. 38, No. 3, 2001, pp. 547-556.
- [19] W. A. Silva, D. E. Raveh, "Development of unsteady aerodynamic state-space models from CFD-based pulse responses", *AIAA Paper* 2001-1213.
 - [20] W. A. Silva, "Reduced Order models based on linear and nonlinear aerodynamic impulse responses", *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 1999, pp. 369-379.
 - [21] W. A. Silva, V. N. Vatsa, R. T. Biedron, "Development of Unsteady Aerodynamic and Aeroelastic Reduced-Order Models Using the FUN3D Code", *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 2009, IFASD-2009-030.
 - [22] W. A. Silva, "Simultaneous Excitation of Multiple-Input/Multiple-Output CFD-Based Unsteady Aerodynamic Systems", *Journal of Aircraft*, Vol. 45, No. 4, 2008, pp. 1267-1274.
 - [23] W. A. Silva, R. E. Bartels, "Development of Reduced-Order Models for Aeroelastic Analysis and Flutter Prediction Using the CFL3Dv6.0 Code", *Journal of Fluids and Structures*, 19, 2004, pp. 729-745.
 - [24] C. Weishäupl, B. Laschka, "Small Disturbance Euler Simulations for Delta Wing Unsteady Flows due to Harmonic Oscillations", *Journal of Aircraft*, Vol. 41, No. 4, 2004, pp. 782-789.
 - [25] E. C. Yates Jr., "AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response. Candidate Configuration I.-Wing 445.6", *NASA TM-100492*, 1987.
 - [26] *ZAERO Theoretical Manual*, 02-12.4 ed. Zona Technology Inc., Scottsdale, AZ, Mar. 2008.