

ENTWICKLUNG EINES SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS CODES ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG DES PRIMÄRZERFALLS AN BRENNSTOFFEINSPRITZDÜSEN

C. Höfler, R. Koch, H.-J. Bauer

Institut für Thermische Strömungsmaschinen, Karlsruher Institut für Technologie,
Kaiserstr. 12, 76128 Karlsruhe, Deutschland

Zusammenfassung

Ein gitterfreier Partikelcode, welcher auf der Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Methode [1] [2] basiert, wurde entwickelt. SPH liegt die gitterfreie Lagrangesche Betrachtungsweise zugrunde, bei der das Fluid nicht mittels ortsfester Gitterzellen, sondern durch räumlich mitbewegte Massepunkte, sog. Partikel, diskretisiert wird. Ziel der hier vorgestellten Entwicklung ist es, einen sogenannten virtuellen Düsenprüfstand zu generieren, der die dreidimensionale strömungsmechanische Simulation verschiedenster Fluidströmungen ermöglicht. Verschiedene Benchmark-Tests werden präsentiert, welche die Vielseitigkeit und einfache Anwendbarkeit dieser vielversprechenden Methode aufzeigen. Diese gestattet es, unter Auswahl geeigneter Randbedingungen, unterschiedlichste technische Systeme wirkungsvoll und effektiv zu simulieren.

1. EINLEITUNG

Heutzutage unterliegt die zivile Luftfahrt strengen Schadstoffemissionsvorschriften, welche auch in Zukunft immer restriktiver werden. Damit geht die Forderung nach höheren Wirkungsgraden und somit effektiveren Triebwerken einher. Da in Flugtriebwerken Flüssigkraftstoff zum Einsatz kommt, muss dieser vor der eigentlichen Verbrennung vorverdunstet und möglichst homogen in der Brennkammer verteilt werden. Dies wiederum kann durch geringe Tropfengrößen des Kraftstoffs bzw. feine Sprays verwirklicht werden. Des Weiteren wird durch eine schnelle Vorverdunstung die Aufenthaltszeit der Tropfen in der Brennkammer und somit deren nötige Mindestlänge minimiert, wodurch Einsparungen bezüglich des Bauraumes und des Gewichts möglich sind. Die Tropfengröße kann durch geeignete Zerstäuberkonzepte optimiert werden.

Bis heute ist die Berechnung des Primärzerfalls eines Flüssigkeitsstrahls in Einzeltropfen nicht oder mittels gitterbasierten Methoden nur mit erheblichem Rechenaufwand [3] [4] mit bis zu 110 Mio. Zellen möglich. Des Weiteren arbeiten diese Berechnungen mit der Volume-of-Fluid Methode, welche gewisse Ungenauigkeiten beinhaltet. Zur Verfolgung der Grenzfläche kommen sogenannte surface-tracking Verfahren zum Einsatz. Gängige Praxis zur Vorhersage der Emissionen sind daher experimentelle Messungen der Tropfengrößen- und Tropfengeschwindigkeitsverteilungen im Spray stromab der Düsenöffnung. Diese Messwerte werden dann als Startbedingungen zur Simulation des Verbrennungsvorgangs verwendet. Bekannte hierzu verwendete Messmethoden wie z.B. Phasen-Doppler-Anemometrie, Laser-Doppler-Anemometrie oder Particle-Image-Velocimetry sind teuer und zeitaufwändig. Zusätzlich werden entsprechende Prüfstände für die Messungen benötigt. Diese Düsen müssen also entwickelt, konstruiert, getestet und gegebenenfalls verändert werden. Um diesen iterativen Prozess zu beschleunigen bzw. zu umgehen werden effektive

Simulationsprogramme benötigt. Eine Alternative zu den rechenaufwändigen gitterbasierten Simulationsmethoden bietet SPH [1] [5]. Dem Verfahren liegt die Lagrangesche Betrachtungsweise der kontinuumsmechanischen Grundgleichungen zugrunde. Ziel ist es, mittels der gitterfreien SPH Methode den Rechenaufwand zu reduzieren und den Primärzerfall modellieren zu können. Ein weiterer Vorteil von SPH ist die einfache Handhabung von komplexen Geometrien, da der Aufwand der Gittergenerierung komplett entfällt.

Die räumliche Diskretisierung beruht nicht auf der ortsfesten Betrachtung von Volumenzellen und den daraus resultierenden Strömen über die Grenzflächen, sondern auf der mitbewegten Betrachtung eines Massepunkts, eines sog. Partikels mit üblicherweise konstanter Masse, im Strömungsfeld. Voraussetzung hierfür ist die Darstellung der Erhaltungsgleichungen in Lagrange-Form. Einem Partikel sind eine Masse, eine Geschwindigkeit und weitere, für das strömungsmechanische Problem wichtige, Größen zugeordnet.

2. GRUNDGLEICHUNGEN

Die partiellen Differentialgleichungen der Kontinuumsmechanik werden im SPH Formalismus zu paarweise auftretenden Kräften und Flüssen zwischen den Partikeln. Die Berechnung der Strömungsgrößen an den diskreten mitbewegten Stützstellen im Raum erfolgt über eine Interpolation über die benachbarten Stützstellen und Gewichtung mittels einer Kernelfunktion.

Eine beliebige räumliche Funktion $A(r)$ kann exakt durch ihre Faltung mit der Dirac-Funktion $\delta(r)$ wiedergegeben werden, wobei r bzw. r' den Ortsvektor darstellen.

$$(1) \quad A(r) = \int A(r')\delta(r - r')dr'$$

Da die Dirac-Funktion keine Berücksichtigung von Nachbarpartikeln, sprich $r \neq r'$, zulässt, wird diese im Folgenden durch eine Glockenkurve, eine sog. Kernelfunktion $W(r-r', h)$, approximiert. Somit ergibt sich die Integralinterpolation der Feldgröße $A_i(r)$ zu

$$(2) \quad A_i(r) = \int A(r') W(r - r', h) dr'$$

Die Kernelfunktion muss die folgenden Voraussetzungen erfüllen:

$$(3) \quad \int W(r - r', h) dr' = 1 \quad (\text{Normierung})$$

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} W(r - r', h) = \delta(r - r') \quad (\text{Grenzwert})$$

$$(5) \quad W(r - r', h) = 0 \quad \text{für } |r - r'| > r_{\max} \quad (\text{Kompaktheit})$$

Hierbei ist die Glättungslänge h ein Maß für die räumliche Auflösung und bestimmt bei gegebener Kernelfunktion den maximalen Einflussradius r_{\max} eines Massepunktes.

Die Integralfunktion wird aufgrund der räumlichen Diskretisierung in Stützstellen in eine Quadratur überführt, woraus sich die Summeninterpolation für die Feldgröße $A_s(r)$ herleiten lässt:

$$(6) \quad A_s(r) = \sum_b A_b V_b W(r - r_b, h)$$

A_b ist die Strömungsgröße des Nachbarpartikels b , V_b dessen repräsentiertes Volumen. Somit ist die Ortsabhängigkeit nur in der Kernelfunktion enthalten. Der Gradient einer Feldgröße lässt sich daher wie folgt darstellen.

$$(7) \quad \nabla A_s(r) = \sum_b A_b V_b \nabla W(r - r_b, h)$$

Ein Nachteil ist jedoch, dass Gl. (7) nicht symmetrisch ist bzw. die Reziprozität nicht erfüllt [6]. Dies bedeutet, die Wirkung von Partikel a auf Partikel b entspricht nicht dem Betrag der Wirkung von Partikel b auf Partikel a und widerspricht somit dem dritten Newtonschen Axiom „actio = reactio“.

Die beiden meist verwendeten symmetrisierten Gleichungen zur Berechnung von Gradienten des Partikels a sind im Folgenden aufgeführt. Es soll gelten

$$W(r_a - r_b, h) = W_{ab} \text{ und } \nabla W(r_a - r_b, h) = \nabla W_{ab}.$$

$$(8) \quad \nabla A_s(r_a) = \frac{1}{\rho_a} \sum_b m_b (A_b - A_a) \nabla W_{ab}$$

$$(9) \quad \nabla A_s(r_a) = \rho_a \sum_b m_b \left(\frac{A_b}{\rho_b^2} + \frac{A_a}{\rho_a^2} \right) \nabla W_{ab}$$

Mit der Dichte ρ eines Partikels und dessen zugehöriger Masse m . Die Gl. (8), (9) lassen sich aus Gl. (7) durch Anwendung der Ketten- und Quotientenregel herleiten.

Mittels dieser Summenapproximationen lassen sich nun die Navier-Stokes-Gleichungen in den SPH-Formalismus überführen.

2.1. Massenerhaltung

Die Kontinuitätsgleichung kann auf zwei Arten im SPH Formalismus dargestellt werden. Entweder durch direktes Einsetzen der Dichte ρ in Gl. (6)

$$(10) \quad \rho_a = \sum_b m_b W_{ab}$$

oder durch Verwendung von Gl. (8) für die Divergenz der Geschwindigkeit v in der Kontinuitätsgleichung

$$(11) \quad \frac{D\rho}{Dt}_a = \sum_b m_b (v_a - v_b) \nabla W_{ab}.$$

Da die Masse eines Partikels normalerweise als zeitlich konstant angenommen wird, garantiert Gl. (10) die exakte Erhaltung der Masse. Jedoch kommt es in Fällen mit freien Oberflächen zu einer unphysikalischen Dichteabnahme, und somit Druckschwankungen hin zur Oberfläche, aufgrund einer zu geringen Partikelanzahl innerhalb des Einflussradius. Mit Gl. (11) kann diese Instabilität vermieden werden, jedoch wird die Massenerhaltung nach den algebraischen Gleichungen nicht strikt erfüllt. Dies stellt jedoch bei den meisten Anwendungen kein Problem dar [7].

2.2. Impulserhaltung

Die Terme der Impulserhaltung werden jeder für sich, nach den in Kap. 2 vorgestellten Prinzipien in den SPH Formalismus überführt.

Hier sei nur eine der möglichen Formen des Druckterms erwähnt.

$$(12) \quad -\frac{\nabla p}{\rho_a} = -\sum_b m_b \left(\frac{p_b}{\rho_b^2} + \frac{p_a}{\rho_a^2} \right) \nabla W_{ab}$$

p_a und p_b repräsentieren die jeweiligen Drücke an den Stützstellen bzw. der Partikel a und b .

Analog dazu kann der Dissipationsterm über doppelte Summen [8] gebildet werden oder auf ein von Morris [9] aus einer Taylorreihenentwicklung hergeleitetes Modell zurückgegriffen werden. Die direkte Berechnung der zweiten Ableitungen im Dissipationsterm mittels der zweiten Ableitung der Kernelfunktion ist nicht

empfehlenswert, da dieser Ausdruck für ungeordnete Partikelverteilungen schnell instabil wird und große numerische Fehler in die Rechnung einträgt.

2.3. Energieerhaltung

Die Umformung der Terme der Energieerhaltungsgleichung gestaltet sich analog. Aus Gründen des Umfangs und der Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle auf die Herleitung verzichtet.

2.4. Zustandsgleichung

Die Schließung des Gleichungssystems erfolgt durch die Verwendung einer fallabhängigen Zustandsgleichung. Für deren Definition liegen unterschiedliche Ansätze vor, die einen direkten Zusammenhang zwischen den thermodynamischen Größen ρ , p , T herstellen. In der SPH Methode ist die Dichte abhängig von der die Strömung repräsentierenden Partikelbewegung, welche wiederum vom Dichtegradienten induziert wird. Da die SPH-Gleichungen aus den kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen entwickelt werden und die Zustandsgleichung einen direkten Zusammenhang zwischen Druck und Dichte darstellt, ist es folglich nicht erforderlich eine Poisson-Gleichung zur Bestimmung des Druckfeldes zu lösen.

Um die Simulation inkompressibler Medien zu ermöglichen, wird eine Quasi-Inkompressibilität durch die Zustandsgleichung erzwungen. Dies bedeutet die Limitierung der Dichteschwankungen unter 1%, wofür der Zusammenhang zwischen Dichteänderung $\Delta\rho/\rho$ und Machzahl M maßgeblich ist.

$$(13) \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} \sim M^2$$

Hieraus ergibt sich die Forderung an die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen bzw. an die Schallgeschwindigkeit c in Abhängigkeit der Maximalgeschwindigkeit v_{\max} .

$$(14) \quad c > 10 \cdot v_{\max}$$

Jedoch sollte die Schallgeschwindigkeit nicht zu hoch gewählt werden, um unnötig kleine Zeitschritte aufgrund der CFL-Bedingung zu vermeiden und somit Rechenzeit einzusparen.

Implementierte Zustandsgleichungen sind unter anderem die Taitsche Zustandsgleichung für Wasser [10]

$$(15) \quad p = p_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

mit $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \approx 7$ und den Referenzgrößen p_0 , ρ_0 .

Geringe Dichteänderung rufen somit hohe Druckänderungen hervor. Die Subtraktion von 1 erfolgt, um störende Randeffekte an freien Oberflächen zu vermeiden.

Eine weitere mögliche Darstellung der Zustandsgleichung ist die von Morris [9] vorgeschlagene Gleichung für inkompressive Medien

$$(16) \quad p = \rho \cdot c^2,$$

welche für Probleme ohne freie Grenzflächen verwendet werden kann.

2.5. Kernelfunktion

Hier soll nur eine der möglichen Kernelfunktionen aufgeführt werden, welche jeweils eine Funktion des dimensionslosen Abstands $q = |r|/h$ und der Glättungslänge h sind. Die kubische Gewichtungsfunktion besteht aus abschnittsweise definierten Splines und wurde von Monaghan [9] bereits genauer untersucht.

Der Vorfaktor α_d ergibt sich je nach Dimensionalität ($d = 1, 2, 3$) der aufgesetzten Rechnung aus der Bedingung aus Gl. (3).

$$(17) \quad W = \begin{cases} \alpha_d \left[\frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3 \right] & 0 \leq q \leq 1 \\ \alpha_d \frac{1}{6}(2 - q^3) & 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & 2 \leq q \end{cases}$$

In der Literatur ist bereits eine Vielzahl weiterer Kernelfunktionen untersucht worden [5] [11].

3. RANDBEDINGUNGEN

Ränder werden wie das Fluid selbst durch Partikel dargestellt. Diese unterscheiden sich vorerst in ihren Eigenschaften in keiner Weise von den Fluidpartikeln und werden in die Summation zur Berechnung der Änderungsgrößen mit einbezogen. Jedoch werden je nach Berechnungsfall deren Werte nicht aktualisiert. Wie in Kap. 6.1 beschrieben, bleibt beispielweise deren örtliche Position konstant.

Das Durchdringen von Wänden, die durch Randpartikel dargestellt werden, kann durch verschiedene Methoden verhindert werden. Reflektierende Wände werden durch eine geometrische Reflektionsbedingung umgesetzt. Repulsive Randbedingungen lassen sich anhand eines abstoßenden Kraftterms verwirklichen, d.h. sobald ein Fluidpartikel sich innerhalb eines definierten Abstands eines Randpartikels befindet, erfährt es eine Kraft in Gegenrichtung.

4. ZEITDISKRETISSIERUNG

Für SPH werden in der Regel explizite Zeitschrittverfahren angewendet, da der Rechen- bzw. Speicheraufwand für implizite Verfahren zu hoch wäre. Das hier verwendete Verfahren entspricht einem expliziten Prädiktor-Korrektoren-Verfahren [7] und ist somit zweiter Ordnung genau. Im ersten Schritt werden die Partikeleigenschaften zum Halbzeitschritt nach dem expliziten Euler-Verfahren berechnet.

Anschließend werden ohne erneute Nachbarsuche diese Größen verwendet, um Änderungsarten, Drücke und auftretende Kräfte, welche auf die Partikel zum Halbzeitschritt wirken, zu berechnen. Unter Berücksichtigung der aktuellen Änderungen und Kräfte werden die Größen an den Diskretisierungspunkten daraufhin entsprechend korrigiert. Letztlich werden die Strömungsgrößen am Ende des vollen Zeitschritts dargestellt.

Die Festlegung der Zeitschrittweite ergibt sich aus drei Stabilitätskriterien. Zum einen muss die Courant-Bedingung, welche schon aus gitterbasierten Verfahren bekannt ist, erfüllt werden. Des Weiteren müssen die Restriktionen, die sich aus der viskosen Diffusion und der Beschleunigung ergeben, eingehalten werden.

5. NACHBARSUCHE

Wichtigster und auch rechenaufwändigster Teil der SPH Simulation ist die Suche der benachbarten Diskretisierungspunkte, welche innerhalb des Einflussradius eines Partikels liegen.

Die direkte Suche, bei der der Abstand aller Partikel zueinander verglichen wird, stellt die einfachste, jedoch auch rechenaufwändigste Vorgehensweise dar. Durch Annahme von paarweisen Wechselwirkungen wird der Aufwand bei gegebener Anzahl N an Stützstellen auf $\sum_{i=1}^N (N - i)$ reduziert.

Weitere, durchaus effizientere Methoden stellen die Algorithmen der Listensuche ($O(N)$) [5] [12] und der Baumsuche ($O(N \log N)$) [13] dar. Diese reduzieren den Rechenaufwand deutlich, wie in BILD 1 zu sehen ist. Außerdem bietet die Listensuche, aufgrund ihrer Eigenschaft das Rechengebiet in Würfel zu unterteilen, die Möglichkeit periodische Ränder einfach zu implementieren.

Bei Strömungsproblemen mit relativ gleichmäßiger Partikelverteilung im gesamten Strömungsgebiet oder hoher Partikeldichte ist die Listensuche besser geeignet als der Baumsuchalgorithmus, da bei diesem jedem Partikel eine eigene Zelle zugewiesen wird. Bei großen Simulationsgebieten hingegen mit nur vereinzelt auftretenden Partikeln bietet die Baumsuche Vorteile hinsichtlich des Rechenaufwands.

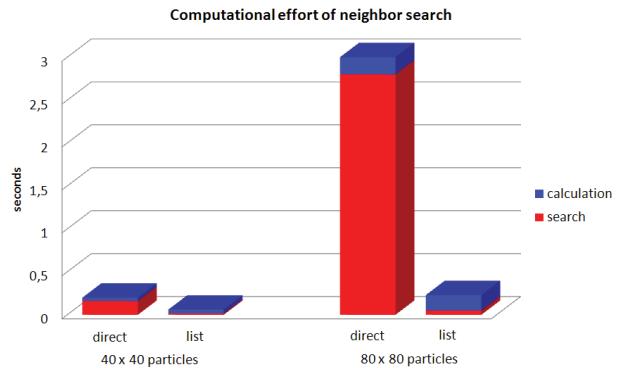


BILD 1. Rechenaufwand der Suchalgorithmen

6. TESTFÄLLE

Zur Validierung des Codes wurden zunächst einfache, bereits aus der Literatur bekannte Testfälle herangezogen. Hier soll im Folgenden sowohl auf einphasige Testfälle mit festen Wänden, als auch auf Strömungen mit periodischen Randbedingungen eingegangen werden. Die Validierung erfolgt anhand analytischer Lösungen oder Simulationen mittels Finite-Volumen-Methoden. Außerdem wird eine Zweiphasenströmung genauer untersucht. Hierbei wird das Aufsteigen einer Blase eines leichten Fluids, welche von einem Fluid mit doppelt so hoher Dichte umgeben ist, betrachtet. Schließlich wird die Strömung aus einer generischen Düse mittels einer zweidimensionalen Simulation beschrieben.

6.1. Kavitätsströmung

Fluidströmungen in technischen Anwendungen, wie z. B. in Kraftstoffzuleitungen in Flugtriebwerken oder am Austritt aus einer luftgestützten Zerstäuberdüse, sind meist von hohen Geschwindigkeitsgradienten im Medium hin zur Wand geprägt, woraus hohe Wandschubspannungen resultieren. Ähnliche Schubspannungen sind auch in einer Kavitätsströmung [5] zu beobachten, die im Folgenden mit der hier entwickelten SPH Methodik untersucht werden soll.

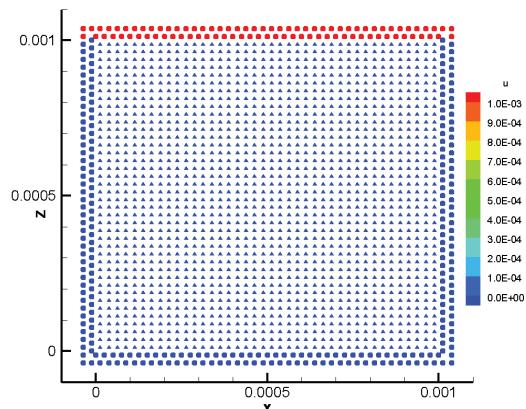


BILD 2. Initialisierung der Kavitätsströmung

Als Ausgangskonfiguration wird, wie in BILD 2 dargestellt, ein quadratisches, zweidimensionales Feld mit der Kantenlänge $L = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ und einer geordneten Partikelverteilung von 40×40 Partikeln initialisiert. Diese befinden sich anfänglich in Ruhe ($\vec{v} = 0$). Die Reynoldszahl beträgt $Re = 1$. Die festen Wände, wie auch der mit $u = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewegte Deckel werden

durch zwei versetzt angeordnete Reihen von Randpartikeln dargestellt. Diese besitzen dieselben Eigenschaften wie die Fluidpartikel. Sie werden bei den Summationen mit berücksichtigt, bleiben jedoch trotz ihrer aufgeprägten Geschwindigkeit ortsfest. Die Glättungslänge h entspricht etwa dem einfachen Abstand der Fluidpartikel voneinander.

Das sich einstellende stationäre Strömungsprofil entspricht einem laminaren Wirbel im Inneren der Kavität. Die u -Komponente der Geschwindigkeitsverteilung auf der vertikalen Mittelachse ist in BILD 3 für die SPH Methode mit verschiedenen Gewichtungsfunktionen im Vergleich zu einer FVM Lösung mittels OpenFOAM aufgetragen. Die gestrichelten Linien stellen eine $\pm 10\%$ Abweichung von der FVM Lösung dar.

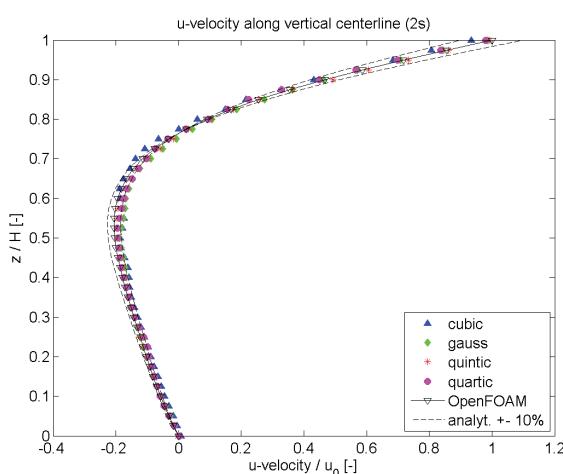


BILD 3. u -Komponente der Geschwindigkeit auf der Mittelachse

Zur Auswertung der Geschwindigkeitsverteilung wurden die Partikeldaten auf ein Hintergrundgitter interpoliert und dessen Zellwerte zur Darstellung herangezogen. Die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung ist mit der Geschwindigkeit des bewegten Deckels normiert, die Position auf der vertikalen Mittelachse z mit der Höhe H der Kavität. Die Geschwindigkeitsprofile für die verschiedenen Gewichtungsfunktionen stimmen untereinander sehr gut überein. Die Glättungslänge h wurde bei allen Rechnungen konstant gehalten. Es zeigt sich, dass das Geschwindigkeitsprofil mit SPH mit ausreichender Genauigkeit sehr gut wiedergegeben werden kann. Besonders an den kritischen Stellen ist eine gute Übereinstimmung zu erkennen. Sowohl an der festen Wand, als auch an der mitbewegten Wand werden die Geschwindigkeiten exakt berechnet. Die Position des Geschwindigkeitsnullpunkts stimmt mit der mittels FVM berechneten Lösung gut überein.

6.2. Couette Strömung

Zur Verifikation von periodischen Rändern wurde eine inkompressible Couette Strömung ausgewertet. Für die Simulation kam eine ähnliche Initialisierung wie für die Kavitätsströmung zur Anwendung. Der Unterschied besteht darin, dass der linke und rechte Rand bzw. deren Randpartikel entfernt wurden, und dafür an diesen Stellen periodische Ränder angenommen wurden.

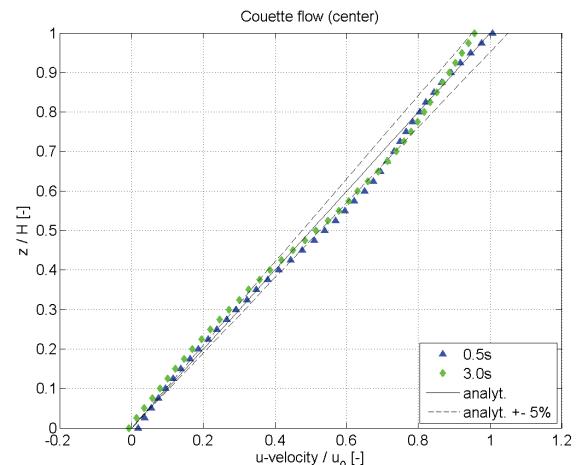


BILD 4. Couette Strömung

Wie aus der Geschwindigkeitsverteilung über die Höhe ersichtlich ist (s. BILD 4), stimmen die mittels SPH berechneten Ergebnisse sehr gut mit den analytischen Werten für die stationäre Strömung überein. Die zeitlichen Schwankungen in den SPH Ergebnissen ergeben sich aufgrund der sich zeitlich ändernden Verteilung der mitbewegten Partikel und somit der Interpolation der Strömungsgrößen auf das zur Auswertung hinterlegte Interpolationsgitter. Die in BILD 5 und BILD 6 dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen nahe der periodischen Ränder links und rechts stimmen mit dem in BILD 4 gezeigten Geschwindigkeitsverlauf überein.

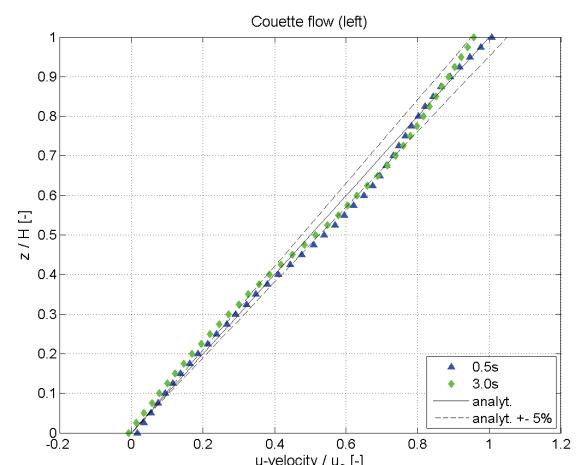


BILD 5. Linker Rand der Couette Strömung

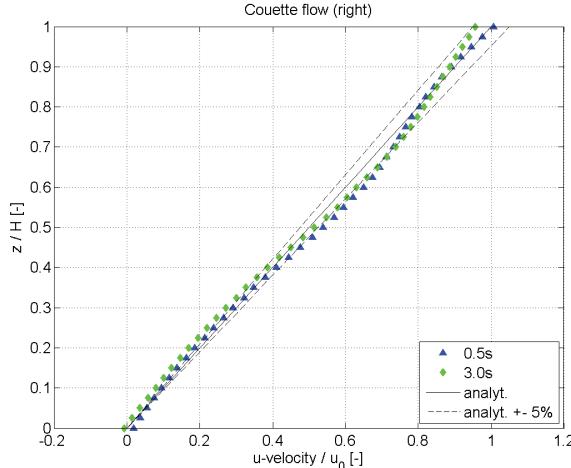


BILD 6. Rechter Rand der Couette Strömung

6.3. Zweiphasenströmung

Besonders wichtig für die korrekte Simulation des primären Strahlzerfalls beim Austritt aus einer Airblast-Düse ist die Modellierung der Zweiphasenströmung aus Luft und Kraftstoff. Ausserdem hat die Düseninnenströmung, bei der Kavitation auftreten kann, großen Einfluss auf die Spraybildung. Ein Test hierzu ist das Aufsteigen einer Blase mit geringer Dichte ρ_1 in einem umgebenden Medium höherer Dichte ρ_2 [14]. Der zeitliche Verlauf ist in BILD 7 zu sehen. Das Dichteverhältnis der Medien beträgt $\rho_1 / \rho_2 = 0.5$.

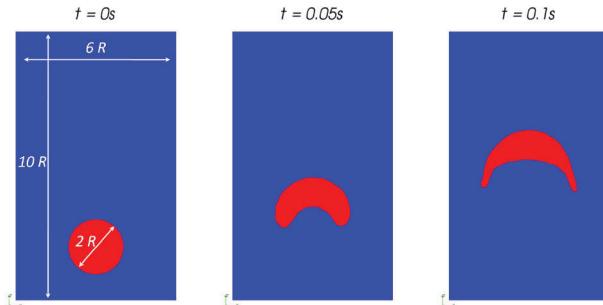


BILD 7. Aufsteigen der Flüssigkeitsblase zu versch. Zeitpunkten (rot: Medium 1; blau: Medium 2)

Da jeweils Dichte und Masse erhalten bleiben, ändert sich auch das Volumen der jeweiligen Phasen nicht. Durch geeignete Wahl der Kontinuitätsgleichung und der Zustandsgleichung können somit Zweiphasenströmungen von Medien unterschiedlicher Dichte mit der SPH Methode berechnet werden.

6.4. Düsenströmung

Nach erfolgreicher Berechnung der vorherigen Testfälle, wurde eine generische zweidimensionale Düsenströmung simuliert. Hierzu wird der in BILD 8 gezeigte Aufbau betrachtet.

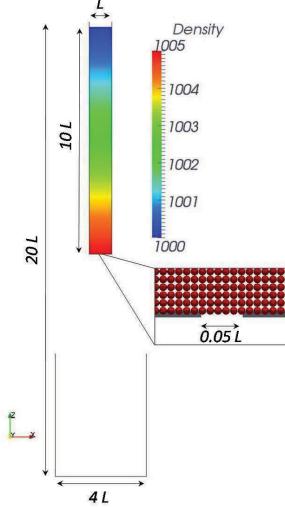
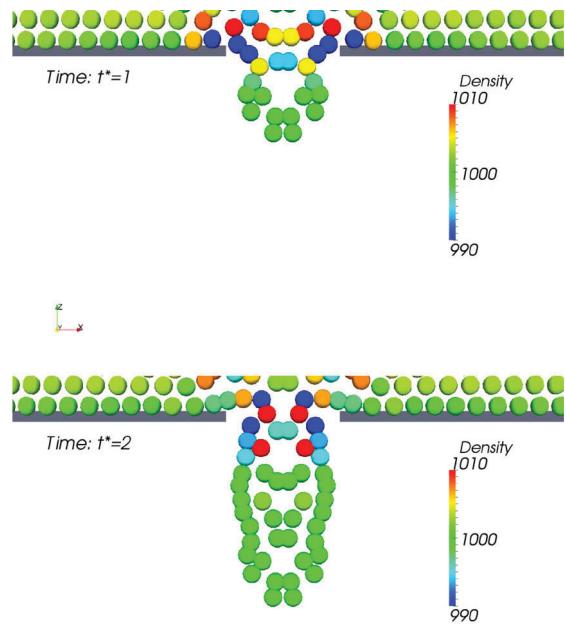


BILD 8. Initialisierung der Düsenströmung

Zum Startzeitpunkt ist die Bohrung am Boden der Wassersäule geöffnet, damit Wasser ausströmen kann. Die Schwerkraft wirkt in negative z-Richtung und prägt der Wassersäule somit gleich zu Beginn den hydrostatischen Druck auf, wodurch ein Druckgefälle über die Höhe zustande kommt.

Die Ränder werden durch eine Reihe Randpartikel mit repulsiven Eigenschaften modelliert. Anfänglich werden 100×1000 Fluidpartikel in geordneter Verteilung gesetzt. Zur Strömungsberechnung kommen die Gl. (11), (12), (15), sowie die kubische Gewichtungsfunktion für den zweidimensionalen Fall (Gl. (17)) zum Tragen. Die Dissipationsterme der Impuls- und Energiegleichung werden über ein künstliches Viskositätsmodell [15] mit den Konstanten $\alpha = 1$, $\beta = 0$ gebildet.



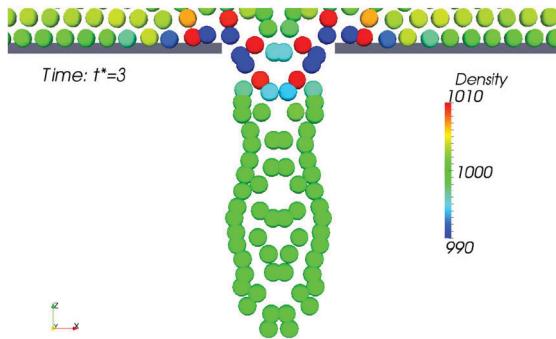


BILD 9. Tropfenbildung beim Austritt aus der Bohrung

In BILD 9 ist die Ausbildung eines Tropfens bzw. Ligaments über die Zeit beim Austritt aus der Öffnung deutlich zu erkennen. Im Bereich der Austrittsbohrung ergeben sich geringe Dichteschwankungen aufgrund der Geschwindigkeitsunterschiede der Fluidpartikel untereinander und zwischen Fluid- und Randpartikeln. Dadurch werden gemäß Gl. (11) Änderungsraten in der Dichte hervorgerufen. Im weiteren Verlauf der Simulation bilden sich Wellen auf der Strahloberfläche aus. Bei starker Einschnürung scheren sich Flüssigkeitsligamente ab, wie in BILD 10 zu sehen ist.

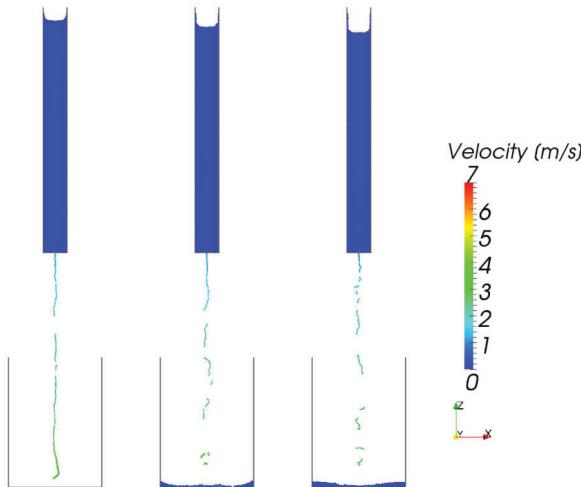


BILD 10. Auftretende Geschwindigkeiten in der Düsenströmung zur Zeit $t = 0.25\text{s}$, $t = 0.5\text{s}$ und $t = 0.75\text{s}$

7. SCHLUSSFOLGERUNG

Der entwickelte Code zur Strömungsberechnung mittels der SPH Methode liefert für die simulierten Testfälle sehr gute Ergebnisse. Durch geeignete Auswahl der Gleichungen können verschiedene Fluide in beliebig komplexen geometrischen Systemen berechnet werden. Die implementierte SPH Methode bietet die Möglichkeit ein-, zwei- und dreidimensionale Simulationen durchzuführen. Die Simulation von Zweiphasenströmungen und Strömungen mit freien Flächen kann ohne explizite Verfolgung der Oberflächen erfolgen. Das nächste Ziel ist es, den Primärzerfall am Düsenaustritt

unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung zu modellieren.

8. SCHRIFTTUM

- [1] Gingold, R. and Monaghan J.; *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical Stars*; Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181, 375 - 389
- [2] Lucy, L.; *A Numerical Approach to the Testing of Fission Hypothesis*; The Astronomical Journal, 1977, 82, 1013 – 1024
- [3] Herrmann, M.; *Detailed Simulations of the Breakup Process of Turbulent Liquid Jets in Subsonic Crossflows*; ICLASS 2009, 11th Triennial Int. Ann. Conf. on Liquid Atomization and Spray Systems, Vail, Colorado, USA
- [4] Desjardins, O.; *Detailed numerical investigation of turbulent atomization of liquid jets*; ICLASS 2009, 11th Triennial Int. Ann. Conf. on Liquid Atomization and Spray Systems, Vail, Colorado, USA
- [5] Liu, G. and Liu, M.; *Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method*; World Scientific, New Jersey, NJ, 2007
- [6] Monaghan, J.; *Smoothed Particle Hydrodynamics*; Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1992, 30, 543 - 574
- [7] Morris, J.; *Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications*; PhD Thesis Monash University, 1996
- [8] Takeda, H. et al.; *Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics*; Progress of Theoretical Physics, 1994, 92, 939 – 960
- [9] Morris, J. et al.; *Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH*; Journal of Computational Physics, 1997, 136, 214 - 226
- [10] Batchelor, G.; *An introduction to fluid dynamics*; Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000
- [11] Monaghan, J.; *Particle methods for hydrodynamics*; Computer Physics Reports, 1985, 3, 71 – 124
- [12] Hockney, R. and Eastwood, J.; *Computer simulation using particles*; Hilger, Bristol, 1992
- [13] Hernquist, L. and Katz, N.; *TreeSPH: A unification of SPH with the hierarchical tree method*; The Astrophysical Journal Supplement Series, 1989, 70, 419 – 446
- [14] Colagrossi, A. and Landrini, M.; *Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics*; Journal of Computational Physics, 2003, 191, 448 - 475
- [15] Monaghan, J. and Gingold, R.; *Shock Simulation by the Particle Method SPH*; Journal of Computational Physics, 1983, 52, 374 – 389