REVERSE ENGINEERING ZUR BESTIMMUNG VON AUSLEGUNGSLASTFÄLLEN FÜR FLUGZEUGSTRUKTUREN MITTELS EVOLUTIONSBASIERTER SYMBOLISCHER REGRESSION

A. Hauffe, K. Wolf
Institut für Luft- und Raumfahrttechnik, Technische Universität Dresden
Helmholtzstraße 10, 01062 Dresden

Zusammenfassung

In der Praxis ergibt sich häufig die Notwendigkeit, ein bereits seit Jahren in einem Flugzeug eingesetztes Strukturbauteil konstruktiv verändern zu müssen. Mögliche Gründe dafür sind oft geometrische Modifikationen oder der Ersatz von Werkstoffen durch leistungsfähigere Materialien. Oft sind jedoch die für eine neue Auslegung notwendigen Lastfälle nicht mehr genau bekannt oder schlecht dokumentiert. Daher wird hier ein Verfahren vorgestellt, mit dem Auslegungslastfälle aus den meist verfügbaren Geometrie- und Materialdaten rekonstruiert werden können. Dazu wird mit Hilfe von Strukturanalysen und relevanten Versagenskriterien ein globaler Versagenskörper des Originalbauteils bestimmt. Zur einfacheren Handhabbarkeit wird für die ermittelten Belastungsgrenzen mittels Evolutionsbasierter Symbolischer Regression eine Approximationsformel generiert, die dann zur Auslegung modifizierter Strukturbauteile eingesetzt werden kann.

1. EINLEITUNG

In der Praxis stellt sich oft das Problem, dass strukturelle Bauteile oder Substrukturen älterer Flugzeuge modifiziert und somit neu ausgelegt werden müssen. Gründe dafür können der Einsatz neuer Werkstoffe, Änderungen an der Geometrie oder die Verwendung neuer Fertigungsverfahren sein. Um diese Aufgabe zu lösen und ein neues Bauteil entwickeln zu können, müssen die dimensionierenden Lastfälle und Auslegungskriterien des Bauteils bekannt sein. Insbesondere die Auslegungslastfälle sind jedoch häufig nicht mehr verfügbar. Allerdings sind von dem Originalbauteil in der Regel die Konstruktion, alle geometrischen Daten und die verwendeten Werkstoffe inklusive ihrer Eigenschaften bekannt. In dieser Arbeit wird nun eine Methodik vorgeschlagen, mit deren Hilfe aus bekannten strukturellen Eigenschaften eines Bauteils Auslegungslastfälle für eine modifizierte Struktur abgeleitet werden können. Dazu wird unter Berücksichtigung aller relevanten strukturellen Versagenskriterien ein globaler Versagenskörper für das Originalbauteil ermittelt, dessen Oberfläche der Einhüllenden aller zulässigen Lasten entspricht. Beispiele für typische Versagenskriterien sind statische Festigkeit, Stabilität, maximale Verformung oder die Betriebsfestigkeit. Mit den so ermittelten Lastfällen kann sichergestellt werden, dass ein modifiziertes Bauteil mindestens die strukturelle Leistungsfähigkeit der ursprünglichen Variante aufweist.

Die klassische Aufgabenstellung des Reverse Engineering ist die Rekonstruktion der Geometrie eines Bauteils aus Messwerten ([1], [2], [3]). Abweichend von dieser Problematik werden hier die von der Bauteilstruktur ertragbaren Lasten rekonstruiert. Die mit diesem Ansatz ermittelten Lasten können dann für eine Auslegung einer neuen Struktur verwendet werden. Die Belastungsgrenzen der Ausgangsstruktur werden mit Hilfe von Strukturanalysen bestimmt, indem verschiedene Lastkombinationen untersucht werden. Die ermittelten Grenzlasten bilden die Stützstellen eines globalen Versagenskörpers, der den zulässigen Belastungsraum beschreibt. Um möglichst wenige Strukturanalysen durchführen zu müssen, wird dieser Versagenskörper ab einer hinreichend großen Anzahl von Stützstellen approximiert.

Zur Approximation des Versagenskörpers wird die Evolutionsbasierte Symbolische Regression (ESR) verwendet. Dieses Verfahren besteht aus zwei Teilen: zum einen aus einem evolutionären Algorithmus zur Optimierung der Ansatzfunktion, dem Gene Expression Programming (GEP). Zum anderen aus einer nichtlinearen Variante der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur Anpassung der Regressionsparameter. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist eine geschlossene Formel, mit deren Hilfe Auslegungslastfälle für modifizierte Strukturbauteile generiert werden können.

Um die Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens zu demonstrieren, werden die Auslegungslasten für einen typischen Rumpfausschnitt eines Verkehrsflugzeugs rückgerechnet. Dazu wird der globale Versagenskörper der Struktur bestimmt und anschließend approximiert. Auf dieser Basis werden schließlich relevante Auslegungslastfälle abgeleitet.

2. BESTIMMUNG EINES GLOBALEN STRUKTURVERSAGENSKÖRPERS

Zunächst soll die grundlegende Vorgehensweise zur Bestimmung eines globalen Versagenskörpers vorgestellt werden. Der Versagenskörper entspricht der Einhüllenden der maximal zulässigen Lasten für das Bauteil. Ziel ist es in Folge dessen, die theoretischen Grenzlasten dieser Struktur zu bestimmen, um damit die Dimensionierungslastfälle definieren zu können. In Luftfahrtkonstruktionen fließen Versagens- bzw. Auslegungskriterien, wie zum Beispiel Materialversagen, Stabilitätsversagen, maximale Verformungen, Blitzschlag, Handling, Ermüdung, Resistenz gegen Schlagbelastungen (Vogel-, Hagel-, Steinschlag), statistische Betrachtungen ein. Diese sind im

Allgemeinen abhängig vom Werkstoff und der Position des Bauteils. Häufig werden die Kriterien in Form von Sicherheitsfaktoren berücksichtigt [4], [5]. Um diese Sicherheitsfaktoren werden die Auslegungslasten erhöht, was zu größeren Abmessungen der Strukturen (Wandstärken, Querschnitte) führt. Bei dem hier vorgestellten Verfahren sollten immer alle bekannten Auslegungskriterien zur Bestimmung des globalen Versagenskörpers angewendet werden. Alle unbekannten Kriterien, die Einfluss auf die Geometrie der Struktur haben, wie zum Beispiel Fertigungsaspekte, sind implizit durch die daraus resultierenden Bauteilabmessungen im Versagenskörper enthalten. Sollten ursprünglich für die Auslegung des Originalbauteils verwendete Kriterien nicht berücksichtigt worden sein, führt dies in der Regel zu höheren Auslegungslasten und damit zu größeren Sicherheitsfaktoren.

Eine weitere Voraussetzung ist die Definition der auftretenden Lasten. Als einfaches Prinzipbeispiel soll hier die Rumpfschale eines Flugzeugs dienen. Dabei handelt es sich um eine luftfahrttypische dünnwandige Struktur, an der die drei in Bild 1 dargestellten Lasten n_x, n_y und n_{xy} wirken. Ein Lastfall oder Lastverhältnis setzt sich damit aus diesen drei Lastkomponenten zusammen.

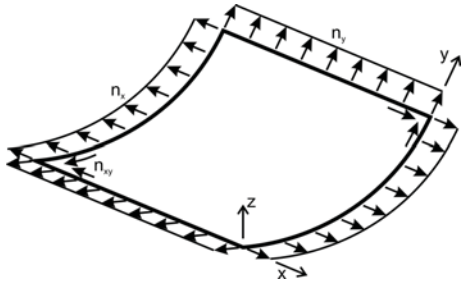

Bild 1: Lasten an einer Flugzeugschale

In Flugzeuglängsrichtung wirkt die Längskraft n_x, die durch Biegemomente oder Innendruck hervorgerufen wird. Die in Umfangsrichtung wirkende Lastkomponente n_y resultiert im Wesentlichen aus dem Innendruck. Dieser bewirkt in größeren Höhen eine Aufweitung des Rumpfes, wodurch Zuglasten in dieser Richtung entstehen. Der Schub n_{xy} entsteht durch Torsionsmomente oder Querkräfte. Alle Lastkomponenten sind hier Linienlasten bzw. Schnittkräfte mit der Einheit N je Millimeter Breite (N/mm).

Grundsätzlich lässt es die vorgestellte Methode zu, eine beliebige Anzahl weiterer Lasten zu berücksichtigen. Welche Lasten letztendlich verwendet werden sollen, hängt von der betreffenden Struktur, deren Komplexität und den Anforderungen an die Auslegungslastfälle ab und muss festgelegt werden und.

2.1 Bestimmung des Versagenskörpers

Für *n* wirkende Lastkomponenten ergibt sich ein *n*-dimensionaler Lastenraum. Dazu wird jede Komponente auf einer Koordinatenachse abgetragen. Für das in Bild 1 dargestellte Beispiel ergibt sich ein dreidimensionaler Lastenraum. Die Oberfläche des Körpers wird durch die strukturellen Grenzlasten definiert, d.h. alle Punkte auf der Oberfläche besitzen einen minimalen Reservefaktor von eins. Somit lassen sich aus der Form des Versagenskörpers kritische Lastfälle ableiten. Dieser Körper entspricht dem globalen Versagenskriterium des Bauteils.

Der prinzipielle Ablauf zur Ermittlung des globalen Versagenskörpers gestaltet sich, wie folgt:

1) Lastverhältnis festlegen
2) Berechnung des Strukturverhaltens (analytisch, numerisch)
3) Reservefaktoren ermitteln (auf Basis aller zur Verfügung stehenden Kriterien)
4) minimalen Reservefaktor bestimmen
5) Grenzlast berechnen
6) neues Lastverhältnis festlegen und mit Punkt 2) fortfahren

Um den vollständigen Körper bzw. dessen Oberfläche im Lastenraum zu erhalten, ist eine Vielzahl von Lastverhältnissen notwendig. Für statisch lineare Strukturberechnungen, ist der Betrag des Lastvektors an dieser Stelle nicht ausschlaggebend sondern nur die Richtung. Zur Definition der Lastverhältnisse sind mehrere Möglichkeiten denkbar. Diese sollen wiederum an den Lastkomponenten aus Bild 1 erläutert werden.

Die einfachste ist die Verwendung einer Einheitskugel. Damit ist der Betrag des Lastvektors immer 1. Die Einheitskugel ist im Lastenraum durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} n_{xy} &= \cos(\varphi)\cdot\cos(\lambda) \\ n_x &= \cos(\varphi)\cdot\sin(\lambda) \\ n_y &= \sin(\varphi) \end{aligned}$$

mit

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$
$$-\pi \le \lambda \le \pi$$

charakterisiert. Nun können für verschiedene φ und λ Stützstellen auf der Oberfläche der Einheitskugel definiert werden. Meist werden die Punkte äquidistant in φ und λ gewählt.

Ein Nachteil bei der Verwendung der Einheitskugel ist die Verdichtung der Punkte zu den Polen hin. Dies stellt für die angestrebte Approximation ein Problem dar, da die Werte im Bereich der Pole implizit stärker gewichtet werden. Da bei der Approximation Fehlersummen zur Qualitätsbewertung verwendet werden, liegt die Summe kleiner Fehler von vielen Punkten und großer Fehler von wenigen Punkten in einer Größenordnung.

Eine weitere Möglichkeit zur Definition der Lastverhältnisse ist die Verwendung eines Einheitswürfels. Bei diesem sind die Punkte auf der späteren Oberfläche des Versagenskörpers besser verteilt. Des Weiteren ist eine zufällige Auswahl von Lastverhältnissen denkbar. Generell hat die Wahl der Stützstellen großen Einfluss auf das spätere Approximationsergebnis. Die optimale Verteilung hängt stark von der Form des Versagenskörpers ab. Da dieser a priori nicht bekannt ist, kommen hier die Einheitskugel und der Einheitswürfel zur Anwendung, die beide erfahrungsgemäß gute Ergebnisse liefern.

Im letzten Schritt muss aus den vorgegebenen Lastkombinationen auf dem Einheitskörper die kritische Last auf der Oberfläche des Versagenskörpers bestimmt werden. Für statisch lineare Berechnungen erfolgt dies durch die Multiplikation aller Lastkomponenten eines Lastverhältnisses mit dem minimalen Reservefaktor. Der auf diese Weise bestimmte Versagenskörper kann nun verwendet werden Auslegungslastfälle zu definieren.

2.2 Rückrechnung des globalen Versagenskörpers am Bespiel einer Rumpfschale

Das beschriebene Verfahren soll nun auf eine repräsentative Rumpfschale eines Verkehrsflugzeugs angewendet werden. Ziel ist es verschiedene Auslegungslastfälle für diese Struktur rückzurechnen. Dabei soll es sich um Limit Load Lastfälle handeln. Das Beispiel wurde bewusst möglichst einfach und übersichtlich gehalten und dient ausschließlich der Verdeutlichung der Methodik.

Eine Flugzeugschale ist im Allgemeinen aus Hautfeldern, Stringern und Spanten aufgebaut. Um den Rechenaufwand für das Beispiel gering zu halten, wird hier nur ein Schalensegment mit Haut und Stringern betrachtet. Die Spanten werden durch entsprechend gewählte Randbedingung modelliert. Die untersuchte Schale ist in Bild 2 dargestellt.

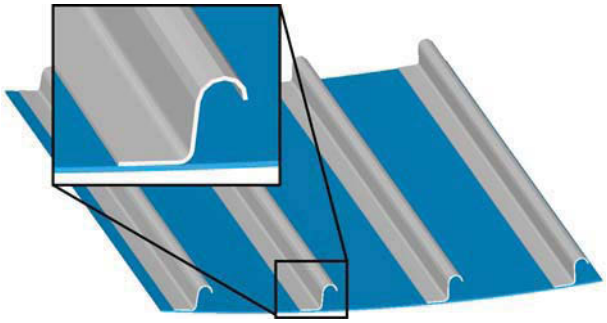

Bild 2: Darstellung der Beispielschale

Für die Beispielschale gelten folgende geometrische Größen:

Radius	1978 mm
Breite der Sehne	960 mm
Länge (axial)	533 mm
Hautdicke	1,8 mm
Stringerabstand	132 mm
Stringerprofil	J-Stringer
Stringeranzahl	4

Für die Haut wurde als Werkstoff eine Aluminiumlegierung 2024 mit einem E-Modul von 68947 MPa, einer Querkontraktionszahl von 0,33 und einer Dehngrenze von 248 MPa angenommen. Die angegebenen Daten gelten für Zugbelastungen. Alle Werte für Druck liegen oberhalb dieser Werte, sodass die ausgewählten Materialeigenschaften dem Minimum entsprechen.

Als Stringer wurde der in Bild 3 abgebildete J-Stringer gewählt. Die geometrischen Daten sind Tabelle 1 zu entnehmen. Der Stringer besteht aus der Aluminiumlegierung 7074, deren Materialeigenschaften ebenfalls in Tabelle 1 enthalten sind. Die Dimensionen des Stringers sind so gewählt, dass ausschließlich lokales Beulen in der Haut und den Stringern auftreten kann. Auf die Berücksichtigung von globalem Beulen wurde daher aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

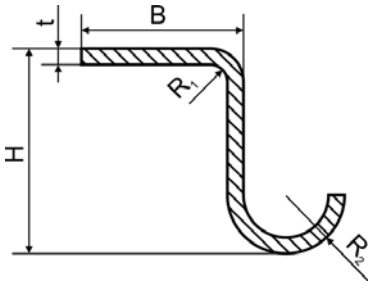

Bild 3: Geometrieparameter des J-Stringers

Tabelle 1: Geometrie- und Materialdaten des J-Stringers

Geometrie	
H	28 mm
B	22 mm
t	1,4 mm
R_1	3,0 mm
R_2	8 mm

Materialparameter	
E-Modul	71705 MPa
Schubmodul	27579 MPa
Poissonzahl	0,33 -
Dehngrenze $R_{p0,2}$	399 MPa

Die Anzahl der eingesetzten Versagens- bzw. Auslegungskriterien wurde hier auf zwei beschränkt. Somit sind nur Materialversagen und lokales Beulen berücksichtig worden. Zur Bestimmung des Reservefaktors bezüglich des Materialversagens wird die „von Mises“-Vergleichsspannung σ_v und die höchste in einem Element auftretende Spannung σ_{max} eingesetzt. Der Reservefaktor wird somit durch das Verhältnis

$$RF_{\sigma} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{max}}$$

definiert. Als Reservefaktor bezüglich der Stabilität RF_{stab} kann direkt der Eigenwert einer linearen Beulrechung verwendet werden. Der minimale Reservefaktor beider Versagenskriterien $RF_{min} = \min(RF_{\sigma}, RF_{stab})$ muss dann mit den aufgebrachten Lasten multipliziert werden, um die kritischen Lasten zu erhalten.

$$n_{x,krit.} = RF_{min} \cdot n_x$$
$$n_{y,krit.} = RF_{min} \cdot n_y$$
$$n_{xy,krit.} = RF_{min} \cdot n_{xy}$$

Als auftretende Lastkomponenten wurden die bereits aus Bild 1 bekannten Größen n_x, n_y und n_{xy} eingesetzt. Der Vektor $(n_{x,krit.}, n_{y,krit.}, n_{xy,krit.})^T$ stellt nun einen Punkt auf der Oberfläche des Versagenskörpers dar.

2.3 Das Finite Element Modell

Haut und Stringer der Schale werden mit 8-Knoten-Schalenelementen modelliert. Um die beim Schubbeulen auftretenden Verformungen hinreichend gut wiedergeben zu können, ist eine relativ hohe Anzahl an Elementen notwendig. Das hier verwendete Modell besteht aus ca. 7000 Elementen und 17000 Knoten (siehe Bild 4).

Die Anbindung der Stringer an die Haut erfolgt über Balkenelemente an jedem Knoten. Die Eigenschaften der Balken werden so gewählt, dass sie im Vergleich zur umgebenden Struktur sehr steif und somit eher als starre Verbindungen zu sehen sind.

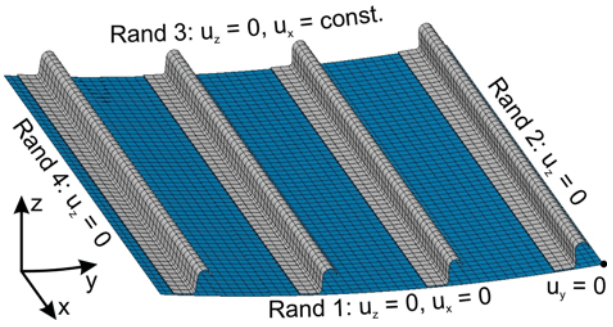

Bild 4: Finite Element Modell der Beispielschale mit Randbedingungen

Des Weiteren sind in Bild 4 die verwendeten Verschiebungsrandbedingungen dargestellt. Sie sind so gewählt, dass alle Belastungsvarianten (biaxialer Druck und Schub) gemeinsam aufgebracht werden können. Im statischen Fall wäre eine separate Betrachtung der Teillasten und eine anschließende Superposition zwar möglich, doch für die Beulrechnung müssen alle Lasten gleichzeitig aufgebracht werden.

Da das Schalensegment einem Zylinderausschnitt entspricht, sind alle Randbedingungen in einem zylindrischen Koordinatensystem definiert. An allen Rändern ist die Verschiebung in radialer Richtung u_z gesperrt. Dies ist am Rand 1 und 3 als Modellierung der Spante zu verstehen. Am Rand 2 und 4 entspricht dies einer Einspannung in einer Testvorrichtung. Das hier berechnete Segment ist so groß, dass die Randeinflüsse bis zur Mitte hin abgeklungen sind. Am Rand 1 ist zudem die Verschiebung in x-Richtung gesperrt, was zum einen den starren Spant repräsentiert und zum anderen eine Starrkörperverschiebung des gesamten Modells verhindert. Am Rand 3 sind die x-Verschiebungen aller Knoten gekoppelt. Der Rand bleibt somit trotz unterschiedlicher Steifigkeiten, die durch die Stringer hervorgerufen werden, gerade. An einem Eckpunkt der Schale ist zudem eine Verschiebung in y-Richtung gesperrt, um ein Abdriften des gesamten Schalensegments in diese Richtung zu vermeiden. Die Kräfte werden als Knotenlasten auf die Schale aufgebracht.

Durch die Stringermodellierung mit Schalenelementen kann sowohl ein Hautbeulen als auch das Beulen einzelner Stringersegment, wie z.B. der Stringersteg, berücksichtigt werden.

2.4 Ergebnis

Der berechnete Versagenskörper ist in Bild 5 dargestellt. Die Farben stehen für die verschiedenen Versagensmodi: Rot entspricht einem Materialversagen der Haut und Blau einem Stabilitätsversagen.

Es ist zu erkennen, dass im axialen Druckbereich vorwiegend die Stabilität die Grenze des Versagens darstellt. Mit steigender Querlast ändert sich der Versagenstyp hin zum Materialversagen. Bezüglich Schub ist der Versagenskörper erwartungsgemäß symmetrisch. Bedingt durch den isotropen Werkstoff ist die Oberfläche des Versagenskörpers verhältnismäßig glatt. Kanten entstehen nur an den Übergängen zwischen verschiedenen Versagenskriterien.

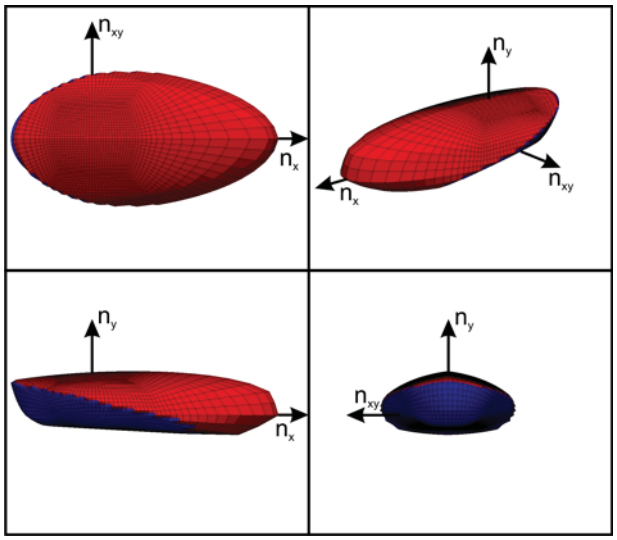

Bild 5: Verschiedene Ansichten des ermittelten globalen Versagenskörpers

Wie bereits erwähnt, enthält dieser Versagenskörper alle Auslegungskriterien und Sicherheitsfaktoren, die bei der ursprünglichen Auslegung eingeflossen sind und sich auf die Dimensionierung auswirken. Selbst fertigungsbedingte Veränderungen können somit enthalten sein. Auf dieser Basis ist es nun möglich eine neue Konstruktion zu entwickeln. Damit diese die gleiche Belastbarkeit wie das ursprüngliche Bauteil aufweist, müssen die ertragbaren Lastkombinationen der neuen Konstruktion auf oder außerhalb des ermittelten Versagenskörpers liegen. Werden neue Materialien eingesetzt gilt dies grundsätzlich nur für statische Lasten, da im Allgemeinen nicht davon ausgegangen werden kann, dass durch dynamische Lasten verursachte Effekte, wie z.B. Ermüdung, direkt auf das neue Material übertragen werden können, auch wenn diese im berechneten Versagenskörper der Ausgangsstruktur enthalten sind.

2.5 Ableitung von Auslegungslastfällen aus dem globalen Versagenskörper

Aus dem ermittelten Versagenskörper können nun verschiedene Auslegungslastfälle abgeleitet werden. Grundsätzlich lassen sich dazu alle Punkte der Oberfläche verwenden. In der Regel ist diese Vorgehensweise vor allem hinsichtlich der Zahl der Strukturanalysen zu aufwändig. Insofern ist es das Ziel die Anzahl der Lastfälle zu reduzieren und die wichtigsten Lastkombinationen zusammenzustellen. Die einfachste Möglichkeit ist, einen Quader (Box) um den Versagenskörper zu legen und dessen Abmessungen zu verwenden. Man erhält damit die Maximalwerte in jede Raumrichtung. Für das hier gezeigte Beispiel ergeben sich mit dieser Methode die in Tabelle 2 gelisteten Werte und somit sechs verschiedene Lastfälle, wobei es sich jeweils um einachsige Belastungen handelt, da die zwei anderen Lastkomponenten null sind.

Dieses Vorgehen ist sehr konservativ und führt in der Regel zu schweren und überdimensionierten Strukturen. Daher bietet sich eine weitere Methode an, bei der die Schnittpunkte der Körperoberfläche mit den Koordinatenachsen verwendet werden.

Dadurch sinken die Größen der Lasten leicht ab, wie Tabelle 3 zeigt. Auch hier ergeben sich wiederum sechs verschieden Lastfälle. Diese Lastfälle stellen eine gute Basis für die Auslegung dar und sind für jede Art von Problemstellung anwendbar.

Tabelle 2: Maximale Lasten des globalen Versagenskörpers

Last	Minimum	Maximum
n_x	-272 N/mm	625 N/mm
n_y	-66 N/mm	149 N/mm
n_{xy}	-229 N/mm	229 N/mm

Tabelle 3: Maximale Lasten in den Koordinatenachsenebenen des globalen Versagenskörpers

Last	Minimum	Maximum
n_x	-223 N/mm	611 N/mm
n_y	-66 N/mm	149 N/mm
n_{xy}	-219 N/mm	219 N/mm

Es ist aber zudem möglich problemspezifische Lasten abzuleiten. Für das hier gezeigte Beispiel einer Flugzeugschale ist häufig ein Innendruck vorgegeben, der nicht variiert werden soll. Insofern ist es möglich die Umfangslast im Vorhinein zu bestimmen. Für einen Innendruck von 0,066 MPa ergibt sich eine Umfangslast n_y von 53 N/mm. Nun lässt sich eine Ebene definieren, die parallel zur n_x-n_{xy}-Ebene liegt und die n_y-Achse bei 53 N/mm schneidet. Der Schnitt zwischen dieser Ebene und dem Versagenskörper ist in Bild 6 dargestellt.

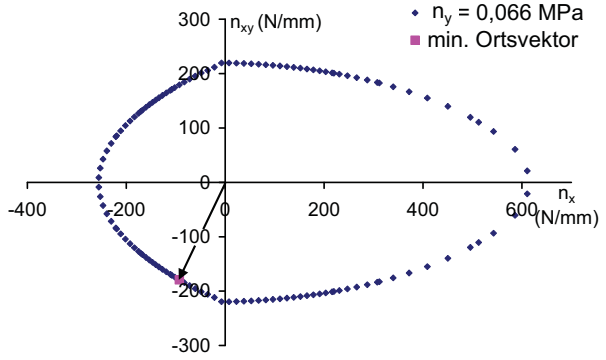

Bild 6: Schnitt durch den globalen Versagenskörper bei n_y = 53 N/mm

Mit diesem Schnitt ist es nun möglich verschiedene Lastfälle zu definieren. Zum einen können wiederum die Maximalwerte bestimmt werden. Diese sind in Tabelle 4 aufgelistet.

Tabelle 4: Maximale Lasten für n_y = 53 N/mm

Last	Minimum	Maximum
n_x	-255 N/mm	610 N/mm
n_{xy}	-219 N/mm	219 N/mm

Diese Lastfälle sind bereits kombinierte Lastfälle aus zwei Lastkomponenten, da n_y vorgegeben ist. Um Kombinationen aus allen drei Lastkomponenten zu erhalten, ist es möglich den Punkt mit dem kürzesten Ortsvektor zu bestimmen. Dieser ist in Bild 6 eingezeichnet. Man erhält als Auslegungslastfall die in Tabelle 5 zusammengestellte Kombination. Auf diese Weise hat man einen kritischen Lastfall bestimmt, der nun für die Auslegung verwendet werden kann und eine Kombination aller Lasten darstellt.

Tabelle 5: Lastkombination mit dem kleinsten Ortsvektor für n_y = 53 N/mm

Last	Wert
n_x	-93 N/mm
n_y	53 N/mm
n_{xy}	-179 N/mm

3. APPROXIMATION MITTELS EVOLUTIONSBASIERTER SYMBOLISCHER REGRESSION

Bei der in Abschnitt 2 verwendeten Methode zur Bestimmung des Versagenskörpers ist der Aufwand verhältnismäßig hoch. Für jeden Punkt auf der Oberfläche muss selbst für das einfache Beispiel eine statische Rechnung und eine Beulrechnung durchgeführt werden. Es ist daher anzustreben, die Zahl der notwendigen Strukturberechnungen zu reduzieren. Eine Möglichkeit besteht darin, die Oberfläche des Versagenskörpers zu approximieren. Dadurch wird es möglich, bereits mit wenigen Stützstellen gute Ergebnisse zu erhalten. Zudem ist eine Kopplung von Approximation und Versagenskörperbestimmung möglich. Dabei werden nur in den Bereichen der Oberfläche Berechnungen durchgeführt, für die der Approximationsfehler zu hoch ist. Weitere Probleme bestehen bei der Verwendung des globalen Versagenskörpers zur Auslegung eines neuen oder modifizierten Bauteils. So können z.B. benötigte Lastkombinationen zwischen diesen Stützstellen liegen. In solchen Fällen wird eine lineare Approximation zwischen den umliegenden Stützstellen des Versagenskörpers notwendig, wozu alle berechneten Lastkombinationen ausgewertet werden müssen.

Als einfachere Möglichkeit der Lösung dieser Probleme bietet sich die Approximation des Versagenskörpers durch eine geschlossene Formel an. Prinzipiell kann dieser Ansatz mit Hilfe einer nichtlinearen Variante der Methode der kleinsten Fehlerquadrate realisiert werden. Ein Nachteil dieser Lösung ist jedoch, dass die Ansatzfunktionen vorzugeben sind. Um diesen Nachteil zu umgehen, wird ein neues Verfahren vorgeschlagen, bei dem die Ansatzsfunktion durch Variation von mathematischen Operatoren mittels einer evolutionären Optimierung bestimmt wird. Dieses Verfahren wird Evolutionsbasierte Symbolische Regression (ESR) genannt.

Ziel ist es für eine gegebene Anzahl von m Stützstellen

$$(\mathbf{x}^l, f(\mathbf{x}^l)) \ , \ (l = 1,...,m)$$

mit

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} \subset \Re^n$$

eine geeignete Approximationsfunktion

$$\tilde{f} : \mathbf{X} \to \Re$$

zu finden, für die der relative Fehler

$$\frac{\left|\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\right|}{f(\mathbf{x})}$$

für die meisten Punkte $\mathbf{x}^l$ klein ist. Die verwendete Ansatzfunktion

$$f^a : \mathbf{X} \times \mathbf{W} \to \Re$$

hängt nichtlinear von den Eingangsgrößen $\mathbf{x}$ und den Regressionsparametern

$$\mathbf{w} = (w_1,...,w_p)^T \in \mathbf{W} \subset \Re^p$$

ab. Die nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist ein unbeschränktes Optimierungsproblem

$$\left|\mathbf{f}^a(\mathbf{w}) - \mathbf{f}\right|^2 \to \min$$

mit

$$\mathbf{f}^a(\mathbf{w}) := \left(f^a(\mathbf{x}^1, \mathbf{w}),...,f^a(\mathbf{x}^m, \mathbf{w})\right)^T$$

und

$$\mathbf{f} := \left(f(\mathbf{x}^1),...,f(\mathbf{x}^m)\right)^T .$$

Wird ein lokales oder ein globales Optimum für die Regressionsparameter $\hat{\mathbf{w}}$ gefunden, ist die Approximationsfunktion durch

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) := f^a(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{w}})$$

gegeben.

Zur Optimierung der Ansatzfunktion wird das Gene Expression Programming (GEP) eingesetzt ([6], [7], [8], [9]). Dabei wird ein algebraischer Ausdruck, der als Ansatzfunktion dienen könnte, wie z.B.

$$(x_1 + x_2)^{1/x_3} ,$$

zunächst durch eine Baumstruktur charakterisiert (siehe Bild 7).

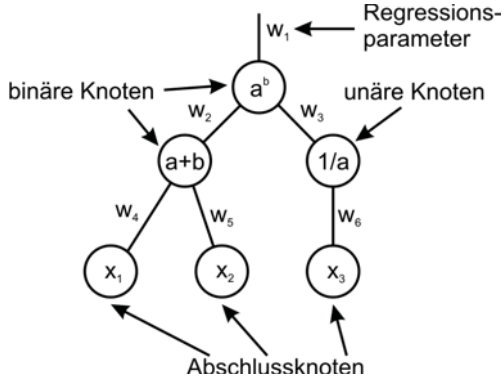

Bild 7: Baumstruktur für das Beispiel $(x_1 + x_2)^{1/x_3}$

Die Verzweigungspunkte bzw. Knoten der Baumstruktur werden in zwei Gruppen eingeteilt. Entweder handelt es sich um Abschluss- oder um Funktionsknoten (Operatorknoten). Eine entsprechende Übersicht ist in Tabelle 6 zu finden.

Tabelle 6: Knotentypen beim Gene Expression Programming (GEP)

Abschlussknoten	Eingangsgrößen: $x_1, x_2,..., x_n$ Regressionsparameter: $w_1, w_2,..., w_p$
Funktionsknoten	Mathematische Operatoren: $a+b, a-b, \frac{a}{b}, a^b,...$

Die Funktionsknoten können wiederum in zwei Gruppen geteilt werden. Zum einen werden unären Operatoren eingesetzt, die nur ein Argument benötigen. Ein Beispiel dafür ist die Sinusfunktion. Zum anderen sind binäre Knoten im Einsatz, welche zwei Operanden besitzen. Eine Übersicht der 15 verwendeten Operatoren ist in Tabelle 7 zu finden.

Tabelle 7: Tabelle der eingesetzten Operatoren

Unär	$a+b$, $a \cdot b$, $a-b$, a/b , a^b
Binär	e^a , $\sin(a)$, $\cos(a)$, $\tan(a)$, $\ln(a)$, $\sinh(a)$, $\cosh(a)$, $\tanh(a)$, $1/a$, $\sqrt{a}$

Einige der Operatoren könnten durch eine Kombination anderer ausgedrückt werden. So kann zum Beispiel der Zusammenhang *a - b* auch durch *a + (-1) b* beschrieben werden. Versuche haben jedoch gezeigt, dass ein gutes Ergebnis schneller erreicht wird, wenn solche Kombinationen ausgeschlossen werden. Zudem gilt für das genannte Beispiel die Regel: je mehr Operatoren vorhanden sind, desto kürzer und einfacher wird die Ansatzfunktion und desto schneller liefert die Optimierung ein gutes Ergebnis.

Um die Baumstruktur nun in einer Weise zu formulieren, die für eine Computeranwendung einsetzbar ist, wird das Gene Expression Programming verwendet (GEP). Der Genotyp des vorherigen Beispiels wird aus dem Phenotyp (Baumstruktur) wie folgt abgeleitet:

1	2	3	4	5	6	7
a^b	$a+b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_4

Diesen Ausdruck, der auch als Gen bezeichnet wird, erhält man durch das Aneinanderreihen aller Knoten des Baums von links nach rechts und von oben nach unten. Das Gen besteht aus einem Kopfabschnitt und einem Rest. Der Kopfabschnitt darf sowohl Funktions- als auch Abschlussknoten enthalten, wohingegen der Rest nur aus Abschlussknoten besteht.

Für jede Approximation muss die Länge des Genkopfes l_k definiert werden, mit welcher die maximale Anzahl an möglichen mathematischen Operationen angegeben wird. Die Anzahl der Restknoten wird über

$$l_r = l_k(n-1)+1$$

bestimmt, wobei *n* die maximale Anzahl an Operanden für einen Operator aus den Funktionsknoten ist. Da in der vorliegenden Arbeit nur unäre und binäre Operatoren verwendet werden, gilt *n* = 2. Die Länge des Genrestes entspricht der maximalen Anzahl an notwendigen Abschlussknoten. Es müssen aber nicht zwangsläufig alle verwendet werden. Dies ist sowohl im oberen Beispiel an Position 7 als auch im folgenden Beispiel zu sehen:

1	2	3	4	5	6	7
x_1	$a+b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_4

Das Gen repräsentiert die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1 .$$

Ansonsten entspricht das Gen dem ersten Beispiel. Der Vorteil des GEP liegt in der Einfachheit und der konstanten Länge der Gene, die ähnlich denen der Genetischen Algorithmen sind. Solange der Rest des Gens nur Abschlusselemente enthält, werden immer zulässige Baumstrukturen erzeugt. Es werden diesbezüglich keine weiteren Testalgorithmen benötigt. Die maximale Länge der Funktion wird nie überschritten, wie es für objektorientierte Strukturen oder Pointerstrukturen notwendig wäre. Dadurch sind sehr einfache genetische Operatoren möglich, die während einer Optimierung die Gene verändern.

Die eingesetzten genetischen Operatoren werden im Folgenden erläutert.

3.1 Mutation

Bei der Mutation wird jeweils ein Element eines Gens durch ein zufällig generiertes ersetzt. Dabei muss sichergestellt werden, dass der Aufbau der Gene erhalten bleibt. Soll also ein Kopfelement ersetzt werden, kann aus allen Knotentypen gewählt werden. Bei dem Restbereich dürfen allerdings nur Abschlussknoten eingesetzt werden. Dies wird am folgenden Beispiel für den Kopfbereich gezeigt. Hier wird die Addition im zweiten Operator durch eine Subtraktion ersetzt:

1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a+b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_4	Elternteil
1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a-b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_4	Kind

3.2 Rekombination

In der vorliegenden Arbeit werden die Einpunkt- und die Zweipunkt-Rekombination verwendet. In beiden Typen werden zwei Individuen zufällig ausgewählt, Eigenschaften zwischen beiden ausgetauscht und somit neue Individuen erzeugt.

In der Einpunkt-Rekombination werden die Gene an einem zufällig ausgewählten Punkt geteilt und der hintere Teil beider Gene ausgetauscht. Dies veranschaulicht das folgende Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7	
$a-b$	$a\cdot b$	x_1	x_3	x_1	x_2	x_1	Elternteil 1
1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a+b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_2	Elternteil 2
1	2	3	4	5	6	7	
$a-b$	$a\cdot b$	x_1	x_1	x_2	x_3	x_2	Kind 1
1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a+b$	$1/a$	x_3	x_1	x_2	x_1	Kind 2

Innerhalb der Zweipunkt-Rekombination wird der Bereich zwischen zwei zufällig ausgewählten Punkten ausgetauscht und somit zwei neue Individuen generiert:

1	2	3	4	5	6	7	
$a-b$	$a\cdot b$	x_1	x_3	x_1	x_2	x_1	Elternteil 1
1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a+b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_2	Elternteil 2
1	2	3	4	5	6	7	
$a-b$	$a\cdot b$	x_1	x_1	x_2	x_2	x_1	Kind 1
1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a+b$	$1/a$	x_3	x_1	x_3	x_2	Kind 2

3.3 Transposition

Bei der Transposition wird ein Fragment mit definierter Länge an eine andere Stelle innerhalb eines Gens verschoben:

1	2	3	4	5	6	7	
a^b	$a+b$	$1/a$	x_1	x_2	x_3	x_4	Elternteil
1	2	3	4	5	6	7	
a^b	x_1	x_2	x_1	x_2	x_3	x_4	Kind

Dabei muss beachtet werden, dass die Struktur des Gens nicht zerstört wird.

3.4 Optimierung der Regressionsparameter

Mit der beschriebenen Methode ist es möglich beliebige Ansatzfunktionen zusammenzustellen und optimal an die Form des globalen Versagenskörpers anzupassen. Maßgeblich für die Qualität der Approximation sind die Regressionsparameter. Um diese bei der Optimierung berücksichtigen zu können, sind prinzipiell zwei Ansätze möglich. Im ersten Fall werden sie einfach wie Operatoren behandelt und in die Baumstruktur eingebaut. Die zweite Möglichkeit orientiert sich an künstlichen neuronalen Netzwerken. Bei diesen wird jeder Verbindungslinie zwischen zwei Knoten ein Gewicht zugeordnet. Diese Methode wird hier gewählt. Dazu wird ein weiteres Gen eingeführt, das die Regressionsparameter enthält. Diese Werte dienen als Startvektor für die nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate, für die die frei verfügbare mathematische Software-Bibliothek MINPACK verwendet wird. Aus diesem Grund gibt es eine weitere Variante der Mutation, die auf die Regressionsparameter angewendet wird. Da die Optimierung der Regressionsparameter vom Startvektor abhängt und nicht zwangsläufig ein globales Minimum für den Fehler findet, werden durch diese Umsetzung mehrere Startvektoren geprüft und der Beste ausgewählt. Der prinzipielle Ablauf der Optimierung ist in Bild 8 dargestellt.

Die nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate kann somit als lokale Optimierung verstanden werden. Dabei wird die eigentliche Ansatzfunktion nicht verändert sondern ein Satz optimaler Regressionsparameter gesucht.

Von Polynomen und ähnlichen mathematischen Funktionstypen ist bekannt, dass sie bei Approximationen zu Oszillationen neigen. Somit ist es möglich, dass Regressionsparameter bestimmt werden, die für die Stützstellen selbst geringe Fehler hervorrufen, in den Zwischenräumen allerdings stark abweichen. Aus diesem Grund

wird die Menge der Stützstellen vor der Optimierung der Regressionsparameter in zwei Teilmengen zerlegt. Die erste wird zum Bestimmen der Regressionsparameter verwendet und die zweite zum Testen des Ergebnisses. Durch dieses Vorgehen kann die Wahrscheinlichkeit solcher Oszillationen verringert und die Qualität der Approximation verbessert werden.

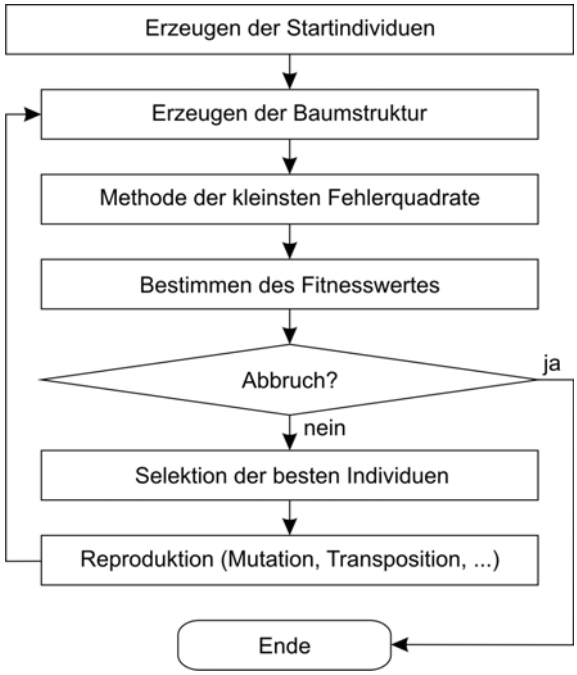

Bild 8: Ablaufdiagramm der ESR

3.5 Reduktion der Regressionsparameter

Die Regressionsparameter w_i an jeder Verbindung zwischen zwei Knoten (siehe Bild 7) verbessern die Ergebnisse für komplexe Probleme erheblich. Allerdings erhöht sich dadurch auch der Rechenaufwand. Für einige Operatoren ist jedoch eine Reduktion um mindestens einen Regressionsparameter möglich. In Tabelle 8 sind Beispiele für derart reduzierte mathematische Ausdrücke zusammengestellt.

Tabelle 8: Reduktion der Regressionsparameter für verschiedene Operatoren

Ursprünglicher Ausdruck	Reduzierter Ausdruck
$w_1\left(w_2x_1 + w_3x_2\right)$	$\left(\hat{w}_1x_1 + \hat{w}_2x_2\right)$
$w_1\left(w_2x_1 - w_3x_2\right)$	$\left(\hat{w}_1x_1 - \hat{w}_2x_2\right)$
$w_1\left(w_2x_1 \cdot w_3x_2\right)$	$\hat{w}_1\left(x_1 \cdot x_2\right)$
$w_1\left(\frac{w_2x_1}{w_3x_2}\right)$	$\hat{w}_1\frac{x_1}{x_2}$
$w_1\frac{1}{w_2x_1}$	$\frac{1}{\hat{w}_1x_1}$

3.6 Berechnung der Fitness

Die Qualität der einzelnen Approximationen wird anhand eines Fitness-Wertes bestimmt. Dazu wird der „Root Relative Squared Error“

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{f}_j - f_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\left(f_j - \bar{f}\right)^2}}$$

verwendet, wobei $\tilde{f}_j$ dem Näherungswert für den *j*-ten Datenpunkt und f_i dem Zielwert und somit der gegebenen Größe entspricht. $\bar{f}$ ist der Mittelwert der gegebenen Funktionswerte:

$$\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j$$

Der Fitness-Wert ist wie folgt definiert:

$$fitness = 1000 \cdot \frac{1}{1+E} \ .$$

Dieser ist auf einen Bereich zwischen 0 und 1000 beschränkt, wobei 1000 einem Fehler von 0% entspricht. Das Optimierungsproblem muss somit als Maximierungsproblem formuliert sein.

4. APPROXIMATION DES GLOBALEN VERSAGENSKÖRPERS

Für das Beispiel der Rumpfschale sind die Stützstellen des Versagenskörpers bekannt. Im nächsten Schritt soll eine geschlossene mathematische Beschreibung mit Hilfe der zuvor beschriebenen Evolutionsbasierten Symbolischen Regression ermittelt werden. Die Eingangsgrößen und somit die Variablen der Approximationsgleichung sind die drei Lastkomponenten n_x, n_y und n_{xy}. Als Ausgangsgröße erhält man den Reservefaktor. Somit gilt

$$RF = \tilde{f}\left(n_x, n_y, n_{xy}\right) \ .$$

Dadurch ist es möglich eine Approximation für jedes beliebige Lastverhältnis zu erhalten, das auf der Einheitskugel liegt, und man verfügt über eine geschlossene Formulierung der Oberfläche des globalen Versagenskörpers.

Für das vorliegende Beispiel werden zur Approximation 5402 Stützstellen verwendet. Diese Punkte wurden auf dem Einheitswürfel mit 31 Punkten pro Kante generiert und anschließen auf die Einheitskugel transformiert (siehe Bild 9).

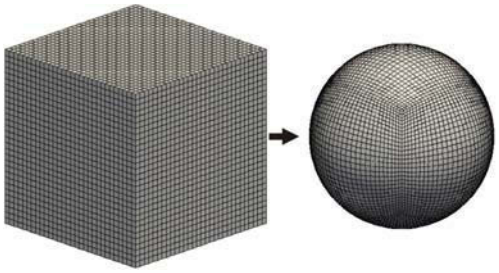

Bild 9: Stützstellendefinition auf dem Einheitswürfel mit Transformation auf die Einheitskugel

Dieses Vorgehen wurde gewählt, um die Vorteile der Einheitskugel mit dem Netz des Einheitswürfels zu verbinden. Es tritt somit keine Verdichtung der Stützstellen an den Polen auf und trotzdem werden Knicke, wie sie beim Einheitswürfel vorhanden sind, vermieden. Solche Knicke verschlechtern das Approximationsergebnis erheblich. Diese Transformation ist nur für die Approximation notwendig, nicht jedoch für das Berechnen des ursprünglichen Versagenskörpers. Somit kann die Transformation auch nach dem Bestimmen des Versagenskörpers mit

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{n}| &= \sqrt{{n_x}^2 + {n_y}^2 + {n_{xy}}^2} \\
n_{x,kug} &= n_x / |\mathbf{n}| \\
n_{y,kug} &= n_y / |\mathbf{n}| \\
n_{xy,kug} &= n_{xy} / |\mathbf{n}| \\
RF_{\min,kug} &= RF_{\min} \cdot |\mathbf{n}|
\end{aligned}
$$

durchgeführt werden.

Jede Stützstelle entspricht einem Lastverhältnis und somit einer Strukturberechnung. In nachfolgenden Arbeiten ist noch zu untersuchen inwieweit sich die Anzahl der Stützstellen weiter reduzieren lässt und ab welcher Grenze eine hinreichend genaue Approximation möglich ist. In dieser Arbeit sollte zunächst nachgewiesen werden, dass das Verfahren prinzipiell anwendbar ist.

Für das betrachtete Beispiel der stringerversteiften Schale ergibt sich folgende Approximationsgleichung für den globalen Versagenskörper

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} &= a_1 \tanh\left(a_2 \tan\left(a_3 f_1 + a_4 f_2\right)\right) + a_5 f_3 \\
f_1 &= \sin\left(a_6 \tanh\left(a_7 \left(a_8 n_x - a_9 - a_{10} n_{xy}\right) e^{a_{11} n_y}\right)\right) \\
f_2 &= \sqrt{\left|a_{12} - a_{13} \tanh\left(a_{14} + a_{15} n_{um}\right) + n_y\right|} \\
f_3 &= \cos\left(a_{16} \tanh\left(a_{17} + a_{18} n_x\right)\right)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 5{,}1877 & a_{10} &= 3{,}857 \cdot 10^{-5} \\
a_2 &= 0{,}0327 & a_{11} &= 1{,}27 \cdot 10^{-3} \\
a_3 &= -1{,}3512 & a_{12} &= 17{,}0398 \\
a_4 &= 0{,}0432 & a_{13} &= 1138{,}8566 \\
a_5 &= 1{,}1938 & a_{14} &= 0{,}1197 \\
a_6 &= 2{,}1234 & a_{15} &= 7{,}165 \cdot 10^{-3} \\
a_7 &= 0{,}0588 & a_{16} &= 1{,}2194 \\
a_8 &= -0{,}1434 & a_{17} &= -0{,}6206 \\
a_9 &= 13{,}7249 & a_{18} &= 0{,}0146 \\
a_4 &= 0{,}0432
\end{aligned}
$$

Die maximale Anzahl an Operationen wurde hier auf 30 beschränkt. Dabei handelt es sich nur um die maximale Anzahl an Funktionsknoten im Genkopf. Durch die Multiplikation mit den Gewichten auf jeder Verbindung von zwei Knoten liegt die Anzahl der wahren Operationen höher. Die erreichte Genauigkeit der Approximationsgleichung kann Tabelle 9 entnommen werden.

Tabelle 9: Fehlergrößen für den approximierten globalen Versagenskörper

mittlerer Fehler	2,42 %
maximale Fehler	16,09 %
Stützstellen mit Fehler < 5 %	87,08 %
Stützstellen mit Fehler < 10 %	98,20 %

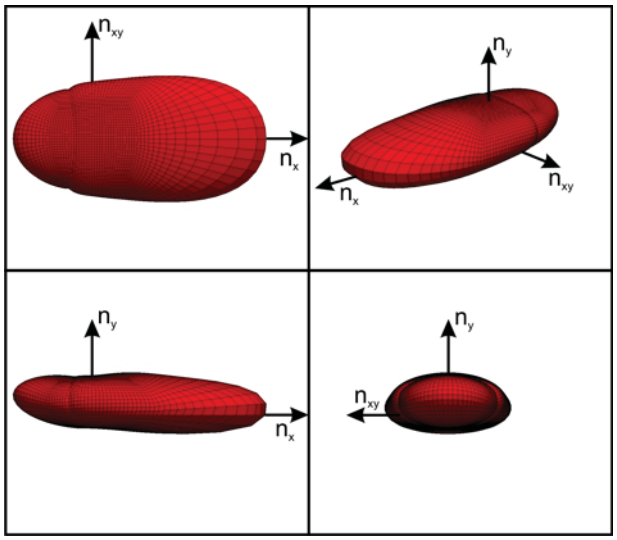

Bild 10: Approximierter globaler Versagenskörper

In Bild 10 ist die Approximation des globalen Versagenskörpers grafisch dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die globale Form des Körpers eine gute Übereinstimmung mit dem Original aufweist. Lokal ergeben sich aufgrund der beschränkten Funktionslänge der Approximation kleinere Abweichungen. Die Fehleranalyse nach Tabelle 9 zeigt jedoch, dass diese für praktische Zwecke tolerierbar sind.

Aus diesem approximierten Versagenskörper können nun mögliche Auslegungslastfälle abgeleitet werden. Beispielhaft sind diese in Tabelle 10 für die Extremwerte (Box) der Approximation aufgelistet.

Tabelle 10: Maximale Lasten des approximierten Versagenskörpers und Abweichungen zum Originalkörper

Last	Minimum	Maximum
n_x	-268 N/mm -1,47 %	582 N/mm -6,88 %
n_y	-64 N/mm -3,03 %	145 N/mm -2,68 %
n_{xy}	-214 N/mm -6,55 %	214 N/mm -6,55 %

In Tabelle 11 ist für einen Innendruck von 0,066 MPa der Lastfall mit dem minimalen Ortsvektor dargestellt. Die Werte liegen alle leicht unterhalb derer des Originalkörpers.

Tabelle 11: Lastkombination mit dem kleinsten Ortsvektor für n_y = 53 N/mm der Approximation und Abweichungen zum Originalkörper

Last	Wert
n_x	-77 N/mm -17,20 %
n_y	53 N/mm
n_{xy}	-168 N/mm -6,14 %

Dies zeigt, dass die Approximation auch zur Definition der Lastfälle verwendet werden kann und sinnvolle Lastfälle definierbar sind.

5. ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Umkonstruktion oder Modifikation vorhandener Flugzeugbauteile besteht häufig das Problem fehlender Lastfälle für die strukturmechanische Auslegung. Zur Lösung dieser Aufgabe wurde hier ein Verfahren vorgestellt, das die Bestimmung verschiedener Auslegungslastfälle aus Geometrie- und Materialdaten der ursprünglichen Struktur ermöglicht. Dabei kann eine beliebige Anzahl an Lastkomponenten und Auslegungskriterien zu Grunde gelegt werden. Auf Basis vorgegebener Lastkombinationen und den dazu berechneten Reservefaktoren, wird ein globaler Versagenskörper bestimmt. Dieser wird dazu verwendet, die Auslegungslastfälle der gesamten Struktur zu definieren. Das prinzipielle Vorgehen wurde an einem einfachen Beispiel einer stringerversteiften Rumpfschale demonstriert und veranschaulicht.

Der ermittelte globale Versagenskörper ist zunächst nur durch eine Vielzahl von Stützstellen auf seiner Oberfläche definiert, die die Lastgrenze zwischen Versagen und Nichtversagen des Bauteils darstellt. Durch die große Anzahl an notwendigen Stützstellen ist das Verfahren sehr aufwendig. Zudem ist diese Beschreibung der Grenzfläche für die praktische Anwendung nur schwer handhabbar. Aus diesem Grund wurde auf Basis der Evolutionsbasierten Symbolischen Regression ein Approximationsverfahren entwickelt, mit dem es möglich ist, eine geschlossene mathematische Funktion für den globalen Versagenskörper zu bestimmen. Auch diese Methode wurde am Beispiel der Rumpfschale demonstriert. Die ermittelte Approximationsgleichung wurde dem Originalversagenskörper gegenübergestellt. Der Vergleich der relativen Fehler zeigt eine gute Übereinstimmung. Somit konnte die Anwendbarkeit des vorgestellten Verfahrens auf praktische Probleme nachgewiesen werden.

LITERATUR

[1] URBANIC, R.; ELMARAGHY, H.; ELMARAGHY, W.: A reverse engineering methodology for rotary components from point cloud data. *In: The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 37 (2008) Nr. 11, S. 1146 – 1167

[2] GARCÍA, Manuel; BOULANGER, Pierre; HENAO, Miguel: Structural optimization of as-built parts using reverse engineering and evolution strategies. *In: Structural and Multidisciplinary Optimization* 35 (2008) Nr. 6, S. 541

[3] JAVIDRAD, F.; RAHMATI, R.: An integrated re-engineering plan for the manufacturing of aerospace components. *In: Materials und Design* 30 (2009) Nr. 5, S. 1524 - 1532

[4] BRISTOW, John W. ; IRVING, P. E.: Safety factors in civil aircraft design requirements. *In: Engineering Failure Analysis* 14 (2007) Nr. 3, S. 459 – 470

[5] NIU, Michael Chung-Yung: *Composite airframe structures.* Hong Kong: 2nd ed. Aufl. Conmilit Pr, 1993. - 9627128066

[6] XU, Kaikuo; LIU, Yintian; TANG, Rong; ZUO, Jie; ZHU, Jun; TANG, Changjie: A novel method for real parameter optimization based on Gene Expression Programming. *In: Applied Soft Computing* 9 (2009) Nr. 2, S. 725 – 737

[7] SERRATO PANIAGUA, Ramiro; FLORES ROMERO, Juan; COELLO COELLO, Carlos: A Genetic Representation for Dynamic System Qualitative Models on Genetic Programming: A Gene Expression Programming Approach. *In: MICAI 2007: Advances in Artificial Intelligence* (2007) S. 30

[8] FERREIRA, C.: Discovery of the Boolean Functions to the Best Density-Classification Rules Using Gene Expression Programming. *In: EuroGP 2002,LNCS 2278* (2002) S. 50-59

[9] FERREIRA, Cândida: Gene Expression Programming: A New Adaptive Algorithm for Solving Problems. *In: Complex Systems* 13 (2001) Nr. 2, S. 87-129