

# SÄGEZAHNFLUG-OPTIMIERUNG ZUR MAXIMIERUNG DER REICHWEITE VON MOTORSEGLERN MIT KLAPPTRIEBWERK

G. Sachs, J. Lenz und F. Holzapfel  
Lehrstuhl für Flugsystemdynamik  
Technische Universität München  
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching

## Übersicht

Die Maximierung der Reichweite von Motorseglern mit Klapptriebwerk wird als Problem der periodischen Optimalsteuerung betrachtet. Diese Art eines periodischen Fluges ist unter der Bezeichnung Sägezahnflug bekannt, bei dem sich jeweils Flugphasen mit ausgefahrenem und eingefahrenem Triebwerk abwechseln. Unter Verwendung eines realistischen flugmechanischen Modells für einen Motorsegler mit Klapptriebwerk und eines effizienten Optimierungsverfahrens werden Ergebnisse für den optimalen Sägezahnflug mit maximaler Reichweite vorgelegt. Die damit erzielbare Reichweite ist erheblich größer als die maximale Strecke, die mit dem besten stationären Reiseflug bei ständig ausgefahrenem Triebwerk erreicht werden kann.

## 1. EINLEITUNG

Motorsegler sind Segelflugzeuge, die mit oder ohne Antrieb fliegen können. Hierbei gibt es eine Vielzahl von möglichen Ausführungen, die sich hinsichtlich des Antriebssystems (Installation, Position, Betrieb u.ä.) unterscheiden [1]. Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Motorsegler, die über ein Klapptriebwerk verfügen.

Motorsegler mit Klapptriebwerk weisen zwei aerodynamische Konfigurationen auf, die sich in ihrer Widerstands-Auftriebs-Charakteristik stark unterscheiden [2, 3]. Die Konfiguration mit eingefahrenem Triebwerk, vergleichbar einem reinen Segelflugzeug, besitzt eine hohe aerodynamische Güte mit einem kleinen Widerstands-Auftriebs-Verhältnis. Demgegenüber weist die Konfiguration mit ausgefahrenem Triebwerk eine große Widerstandszunahme auf, die durch das Ausfahren des Triebwerks bedingt ist.

Der große Unterschied im Widerstand hat dazu geführt, dass sich die Flugmethode des Sägezahnfluges herausgebildet hat. Der Sägezahnflug ist ein periodischer Vorgang, dessen sich wiederholende Zyklen aus zwei Phasen bestehen, jeweils eine mit und eine ohne Antrieb. In der Antriebsphase mit ausgefahrenem Triebwerk erfolgt ein Steigflug, dem sich in der antriebslosen Phase ein Gleitflug mit eingefahrenem Triebwerk anschließt. Der Sägezahnflug ermöglicht eine erhebliche Vergrößerung der Reichweite gegenüber dem besten Streckenflug mit andauerndem Antrieb bei ständig ausgefahrenem Triebwerk. [2-6]. Obwohl Kenntnis über diesen Sachverhalt besteht, ist eine detaillierte mathematische Behandlung und Optimierung nicht bekannt.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, den Sägezahnflug unter Verwendung eines effizienten Optimierungsverfahrens mit dem Ziel zu behandeln, die Reichweite zu maximieren. Hierfür wird eine realistische flugmechani-

sche Modellierung für einen Motorsegler einschließlich des Ein- und Ausfahrvorganges des Triebwerks entwickelt.

## 2. MATHEMATISCHES MODELL

Für das hier zu behandelnde Problem der periodischen Optimalsteuerung kann man ein mathematisches Modell ansetzen, das auf der Massenpunktdynamik basiert. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{F - W}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{A}{mV} - \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ \dot{s} &= V \cos \gamma\end{aligned}\tag{1}$$

Für die aerodynamischen Kräfte Auftrieb und Widerstand lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}W &= C_W(\rho/2)V^2S \\ A &= C_A(\rho/2)V^2S\end{aligned}\tag{2}$$

wobei

$$C_W = C_W(C_A)\tag{3}$$

Bei der Modellierung der Widerstands-Auftriebs-Charakteristik wurde Bezug auf realistische Konfigurationswerte genommen [6]. In den Bildern 1 und 2 sind die Widerstandspolaren für die beiden Konfigurationen mit ein- bzw. ausgefahrenem Triebwerk wiedergegeben.

Für den in Gl. (3) zu verwendenden Widerstandskoeffizienten ist bei eingefahrenem Triebwerk entsprechend Bild 1 anzusetzen

$$C_W = C_{WEin}(C_A)$$

Bei ausgefahrenem Triebwerk gilt unter Verwendung von Bild 2

$$C_W = C_{W,Aus}(C_A)$$

Leistung und Schub des Triebwerks wurden folgendermaßen modelliert

$$P = P_{\max} \delta_P \quad (4)$$

und

$$F = \eta_P \frac{P_{\max} \delta_P}{V} \quad (5)$$

Die Leistung wird als unabhängig von der Geschwindigkeit, jedoch abhängig von der Höhe betrachtet. Hierfür kann nach [7] angesetzt werden

$$P_{\max} = P_{\max 0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n_P} \quad (6)$$

Für den Treibstoffverbrauch wird die folgende Beziehung verwendet

$$\dot{m}_B = \dot{m}_{B0} + b_P P \quad (7)$$

wobei der Term  $\dot{m}_{B0}$  den Leerlauf-Zustand kennzeichnet.

Zur Beschreibung der Atmosphäre wurde eine Modellierung verwendet, die mit der ICAO Standard Atmosphäre übereinstimmt [8].

### 3. MODELLIERUNG VON EIN- UND AUSFAHRVORGANG DES TRIEBWERKS

Ein Zyklus des Sägezahnflugs kann in die folgenden vier Abschnitte unterteilt werden (Bild 3):

- Steigflug mit ausgefahrenem Triebwerk
- Einfahrvorgang des Triebwerks
- Gleitflug mit eingefahrenem Triebwerk
- Ausfahrvorgang des Triebwerks

Danach folgt der nächste Zyklus, der die gleichen Merkmale wie der vorherige aufweist.

Während des Ein- bzw. Ausfahrvorgangs findet eine Änderung der aerodynamischen Konfiguration statt. Der Beginn dieser beiden Vorgänge liegt nicht fest, sondern wird im Rahmen der Optimierung bestimmt. Demgegenüber wird die Dauer des Ein- bzw. Ausfahrvorgangs,

die in Bild 3 jeweils mit  $\Delta t_{Ein}$  bzw.  $\Delta t_{Aus}$  gekennzeichnet ist, als vorgegeben betrachtet.

Der Ein- und Ausfahrvorgang des Triebwerks findet in Form einer Schwenkbewegung statt, wie sie in Bild 4 dargestellt ist. Sie kann über den Schwenkwinkel  $\phi_{Tr}$  erfasst werden, dessen Arbeitsbereich ist gegeben durch

$$0 \leq \phi_{Tr} \leq 90^\circ \quad (8)$$

Für den Ein- und Ausfahrvorgang wird jeweils die gleiche Dauer angesetzt, so dass gilt

$$\Delta t_{Ein} = \Delta t_{Aus} \quad (9)$$

Weiter wird angenommen, dass die Schwenkgeschwindigkeit konstant ist

$$\dot{\phi}_{Tr,Aus} = -\dot{\phi}_{Tr,Ein} = \text{const} \quad (10)$$

Daher gilt am Beispiel des Ausfahrvorgangs

$$\phi_{Tr}(\tau) = \dot{\phi}_{Tr,Aus} \tau \quad (11)$$

wobei  $\tau$  die Zeit zwischen Beginn und Ende des Schwenkvorgangs darstellt

Die Änderung des Widerstands während des Ausfahrvorgangs wird in der folgenden Form modelliert

$$C_W = C_{WEin} + (C_{W,Aus} - C_{WEin}) \sin \phi_{Tr}(\tau) \quad (12)$$

Diese Modellierung basiert auf der Annahme, dass die Vertikalprojektion des Triebwerks einschließlich des Propellers eine aerodynamische Fläche ergibt, die im Sinne der Widerstandswirkung effektiv ist.

In analoger Weise wird für die Widerstandsänderung während des Einfahrvorgangs angesetzt

$$C_W = C_{W,Aus} - (C_{W,Aus} - C_{WEin}) \sin \phi_{Tr}(\tau) \quad (13)$$

### 4. FORMULIERUNG OPTIMIERUNGSPROBLEMS

Das Optimierungsproblem besteht darin, diejenige Flugbahn zu bestimmen, die die größte Reichweite pro Treibstoffverbrauch ergibt. Aufgrund der Periodizität des Sägezahnflugs genügt es, einen Zyklus zu betrachten. Die Zielfunktion kann daher folgendermaßen formuliert werden

$$J = \frac{s(t_{Zyk})}{m_B(t_{Zyk})} \quad (14)$$

wobei  $t_{Zyk}$  die Zykluszeit darstellt.

Für die Masse des Motorseglers wird während eines Sägezahnflug-Zyklus ein konstanter Wert angesetzt. Dies beruht darauf, dass die während eines Zyklus verbrauchte Treibstoffmasse als klein gegenüber der Gesamtmasse des Motorseglers angesehen werden kann.

Aufgrund der Periodizität des Sägezahnflugs gelten die folgenden Randbedingungen für einen Zyklus

$$\begin{aligned} V(0) &= V(t_{Zyk}) \\ \gamma(0) &= \gamma(t_{Zyk}) \\ h(0) &= h(t_{Zyk}) \end{aligned} \quad (15)$$

Für die Steuergrößen,  $C_L$  und  $\delta_p$ , sind Beschränkungen zu berücksichtigen, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} C_{L\min} &\leq C_L \leq C_{L\max} \\ 0 &\leq \delta_p \leq 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Auch für die Zustandsgrößen liegen Beschränkungen vor:

$$\begin{aligned} h_{\min} &\leq h \\ n_{\min} &\leq n \leq n_{\max} \\ \bar{q} &\leq \bar{q}_{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

Das Optimalsteuerungsproblem kann nun dahingehend formuliert werden, dass die Steuergrößen  $C_L(t)$  und  $\delta_p(t)$ , die Anfangswerte  $V(0)$ ,  $\gamma(0)$  und  $h(0)$ , die Anfangszeit des Triebwerk-Einfahrtvorgangs,  $t_1$ , sowie die Zykluszeit  $t_{Zyk}$  zu bestimmen sind, die die Zielfunktion  $J = s(t_{Zyk}) / m_B(t_{Zyk})$  maximieren, wobei das dynamische System, Gl. (1), die Randbedingungen, Gl. (15), sowie die Beschränkungen nach den Gln. (16) und (17) zu berücksichtigen sind.

Die Lösung des beschriebenen Problems erfordert leistungsfähige Optimierungsverfahren. Hierfür wurde das Verfahren nach [9, 10] verwendet.

## 5. ERGEBNISSE

Die Optimierung des Sägezahnflugs ergibt für die Maximierung der Reichweite das folgende Ergebnis

$$\frac{s_{Zyk,\max}}{m_B} = 56,92 \frac{\text{km}}{\text{kg}}$$

Im Vergleich zum besten stationären Streckenflug bei ständig ausgefahrenem Triebwerk und andauerndem Schub zeigt sich, dass der optimale Sägezahnflug eine große Steigerung der Reichweite ermöglicht. Hierfür gilt

$$\frac{s_{Zyk,\max}}{s_{stat,\max}} = 3,05$$

wobei  $s_{stat,\max}$  die maximale Reichweite des stationären Streckenflugs bezeichnet.

Der optimierte Verlauf der Höhe ist in Bild 5 dargestellt. Daraus sind die vier Flugabschnitte ersichtlich, die zusammen einen Zyklus bilden. Die Abschnitte des Triebwerk-Einfahrtvorgangs und des -Ausfahrtvorgangs sind vergleichsweise kurz gegenüber dem Steig- bzw. Sinkflug, bei denen der größte Teil der Flugstrecke zurückgelegt wird

Aus Bild 5 gehen weitere Ergebnisse der Sägezahnflug-Optimierung hervor. Sie betreffen die optimalen Werte der Zeitdauer und des Höhenintervalls eines Zyklus. Die optimale Zykluszeit bestimmt sich zu

$$t_{Zyk,opt} = 1761,1 \text{ s}$$

Für das optimale Höhenintervall gilt

$$h_{Zyk,opt} = 948,4 \text{ m}$$

Der optimale Verlauf der Geschwindigkeit ist in Bild 6 dargestellt. Hierbei zeigt sich, dass die Geschwindigkeit im Steigflug deutlich niedriger ist als im Gleitflug. Beim Übergang vom Steig- zum Gleitflug findet der Einfahrtvorgang des Triebwerks statt. Hierbei erfolgt ein Abschwungmanöver, mittels dessen die Zunahme der Geschwindigkeit vom Steig- zum Gleitflug in optimaler Weise erreicht werden kann.

Der Verlauf der Steuergrößen ist in den Bildern 7 und 8 gezeigt. Der Leistungshebel des Triebwerks wird im Sinne einer Bang-Bang-Steuerung verstellt (Bild 7), für die gilt

$$0 \leq t < t_1 : \delta_p = 1$$

und

$$t_1 \leq t \leq t_{Zyk} : \delta_p = 0$$

Darin bezeichnet  $t_1$  Beginn des Triebwerk-Einfahrtvorgangs, der ebenfalls Ergebnis der Optimierung ist. Er bestimmt sich zu

$$t_1 = 335,1 \text{ s}$$

Der optimale Verlauf des Auftriebskoeffizienten ist in Bild 8 dargestellt. Als charakteristisches Merkmal zeigt sich, dass der Auftriebskoeffizient im Steigflug höhere Werte annimmt als im Gleitflug. Diesem Verhalten entspricht der Verlauf der in Bild 6 dargestellten Geschwindigkeit. Weiter wird deutlich, dass – abgesehen von den Übergangsabschnitten – der Auftriebsbeiwert im Steig- und Gleitflug jeweils auf einem annähernd konstanten Niveau bleibt.

## 6. ZUSAMMENFASSUNG

Die maximale Reichweite von Motorseglern, die mit einem Klapptriebwerk ausgestattet sind, wird im Sägezahnflug erzielt. Diese Flugmethode, die aus sich wiederholenden, gleichartigen Zyklen mit jeweils alternierenden Phasen hinsichtlich ausgefahrenem bzw. eingefahrenem Triebwerk besteht, wird als Problem der periodischen Optimalsteuerung behandelt. Unter Verwendung eines realistischen flugmechanischen Modells für einen Motorsegler mit Klapptriebwerk sowie eines effizienten Optimierungsverfahrens werden Ergebnisse vorgelegt. Dies betrifft die maximale erzielbare Reichweite sowie den optimierten Verlauf von Zustands- und Steuergrößen. Zu den Ergebnissen gehören auch die Optimalwerte für die Dauer und das Höhenintervall eines Zyklus. Der Vergleich mit dem besten stationären Streckenflug bei ständig ausgefahrenem Triebwerk zeigt, dass der optimale Sägezahnflug eine große Steigerung der Reichweite ermöglicht.

## 7. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] The Gliding Federation of Australia: Powered Sailplanes. Issue 1, 1998.
- [2] Luz, I.: Reichweitenvergrößerung bei Motorseglern durch alternierenden Motorbetrieb. *Idaflieg-Berichtsheft XII*, S. 1-12 and A1, 1986.
- [3] Schempp-Hirth Flugzeugbau GMBH, [www.schempp-hirth.com](http://www.schempp-hirth.com).
- [4] DG Flugzeugbau GmbH, [www.dg-flugzeugbau.de](http://www.dg-flugzeugbau.de).
- [5] Alexander Schleicher GmbH & Co. Segelflugzeugbau, [www.alexander-schleicher.de](http://www.alexander-schleicher.de).
- [6] DG Flugzeugbau GmbH: *Flughandbuch für den Motorsegler DG-808C*. Ausgabe: June 2005.
- [7] Brüning, G., Hafer, X., and Sachs, G.: *Flugleistungen*. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [8] ICAO Standard Atmosphere, International Civil Aviation Organization, Montreal, 1964.
- [9] ASTOS – Software User Manual, Institut für Flugmechanik und Regelung, University of Stuttgart, August 1996.
- [10] GESOP (Graphical Environment for Simulation and Optimization), Softwaresystem für Bahnoptimierung, Institut für Robotik und Systemdynamik, DLR, Oberpfaffenhofen, 1993.

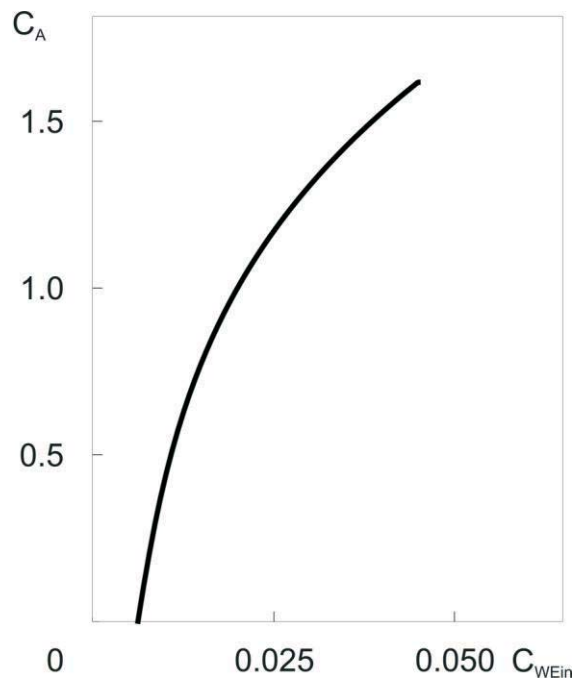


BILD 1. Widerstandspolare bei eingefahrenem Triebwerk

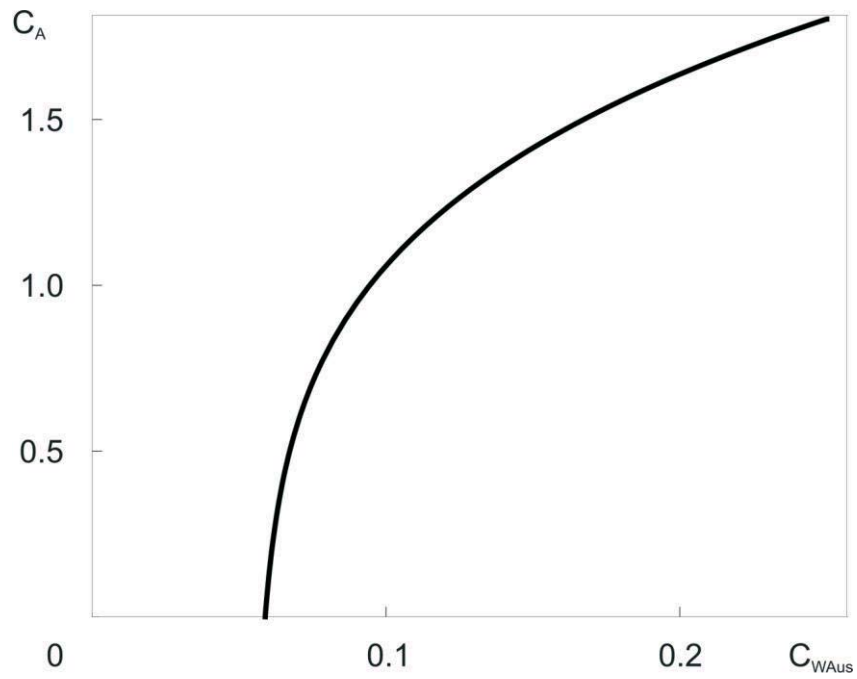


BILD 2. Widerstandspolare bei ausgefahrenem Triebwerk

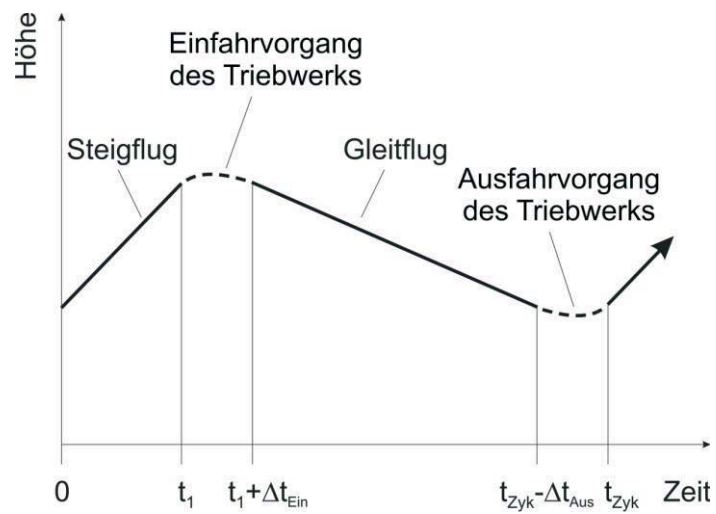


BILD 3. Sägezahnflug-Zyklus

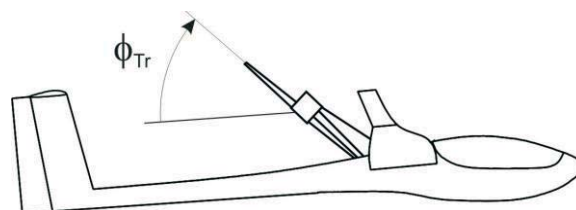


BILD 4. Schwenkwinkel der Triebwerks-Propeller-Kombination

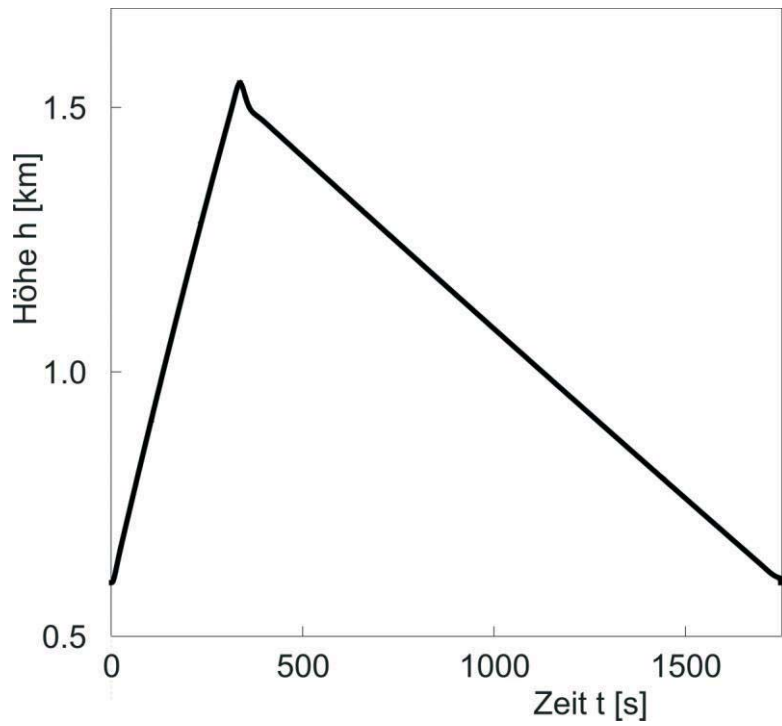


BILD 5. Optimierter Höhenverlauf

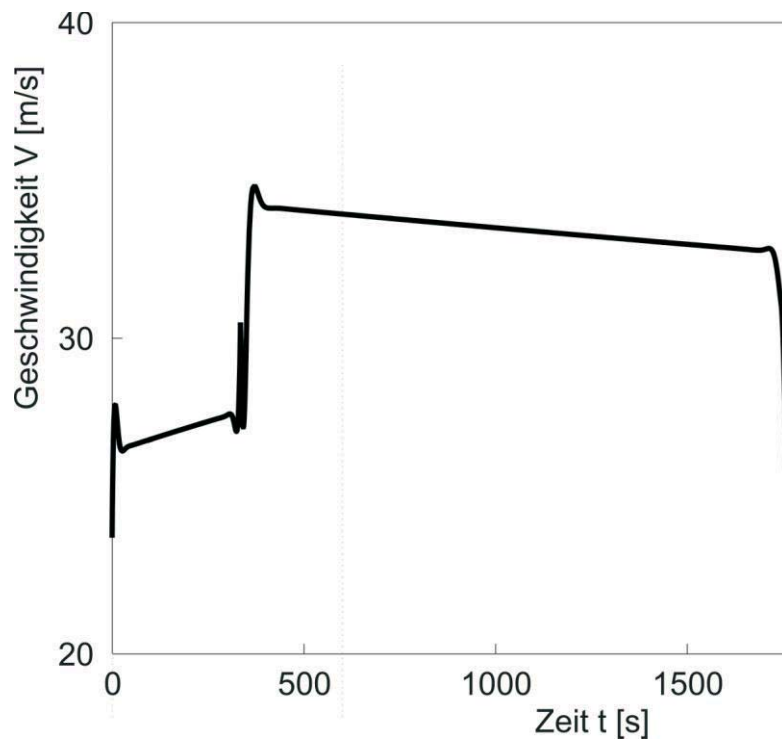


BILD 6. Optimierter Geschwindigkeitsverlauf

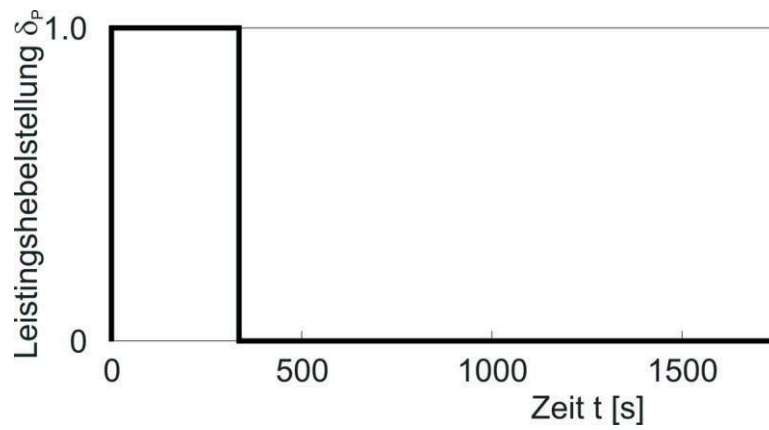


BILD 7. Optimale Steuerung des Triebwerks-Leistungshebels

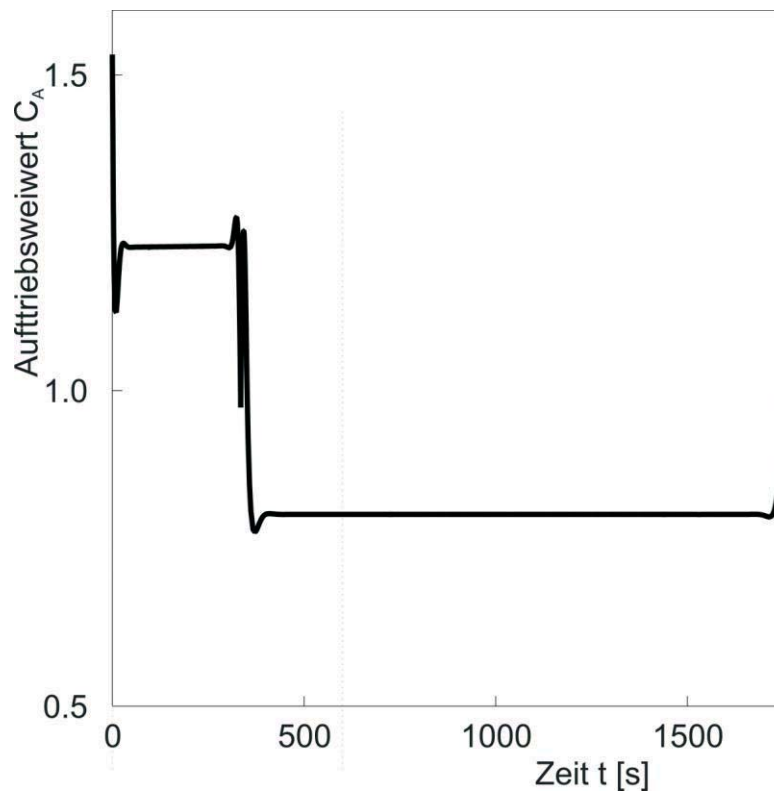


BILD 8. Optimale Steuerung des Auftriebsweiwertes