

FLUGBAHNOPTIMIERUNG VON LUFTRENNEN

F. Fisch¹, J. Lenz², F. Holzapfel³, G. Sachs⁴

Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching
Deutschland

Zusammenfassung

Das vorliegende Paper stellt einen neuen Ansatz zur Optimierung der Flugbahnen von Luftrennen vor, der es ermöglicht, die hochgradig nicht-lineare Dynamik der Flugzeuge, die an den Luftrennen teilnehmen, zu berücksichtigen. Um die nicht-lineare Dynamik dieser Kunstflugzeuge bei der Optimierung berücksichtigen zu können, ist es nicht ausreichend, lediglich ein Punktmassenmodell für die Berechnung der optimalen Flugbahn zu verwenden, weshalb ein detaillierteres Simulationsmodell mit skalierbarer Modellierungstiefe bzw. -genauigkeit implementiert wurde. Dabei handelt es sich um ein sequentielles Modell der Art, dass die Positions- und Translationsdynamik des modellierten Flugsystems um verschiedene Modellierungsweisen für die Lage- und Rotationsdynamik erweitert wird, wobei der jeweilige Bezug der Lage- und Rotationsdynamik nicht in herkömmlicher Weise das erdparallele North-East-Down-System, sondern das kinematische Bahnachsensystem ist. Daher der sequentielle Charakter der Implementation des Simulationsmodells. Die Lage- und Rotationsdynamik kann dabei entweder durch lineare Übertragungsfunktionen für die Lastfaktoren und die Rollrate, durch linearisierte Zustandsraummodelle für die Längs- und Seitenbewegung oder durch die vollen nicht-linearen Lage- und Rotations-Bewegungsgleichungen repräsentiert werden. Dadurch wird die volle dynamische Ordnung des Flugsystems in der Optimierung berücksichtigt und es wird sichergestellt, dass die jeweilige Optimalbahn auch erfliegbar ist. Aufgrund der Skalierbarkeit und der sequentiellen Struktur des Simulationsmodells kann der Komplexitätsgrad für die Modellierung der Lage- und Rotationsdynamik und damit die Zeitdauer, die zur Berechnung der optimalen Lösung erforderlich ist, sowie die Qualität der Optimalbahn leicht an die jeweiligen spezifischen Bedürfnisse oder Anforderungen angepasst werden. Zusätzlich enthält das Simulationsmodell Inversions-Regler für die verschiedenen Implementationen der Lage- und Rotationsdynamik, so dass es möglich wird, einen Prozess zu entwickeln, der eine robuste und brauchbare Anfangslösung für die schlussendliche Optimierung mit vollen nicht-linearen 6-Freiheitsgrad-Modellen erzeugt, ausgehend von der Optimierung bzw. der Optimalbahn für ein einfacheres, nicht-lineares Punktmassenmodell. Dieser neuartige Ansatz schafft die Voraussetzung dafür, hoch komplexe Flugbahnoptimierungsprobleme zu lösen, bei denen bisherige Methoden aufgrund von Steifigkeitsproblemen oder dem Fehlen hinreichend guter Anfangslösungen versagt haben.

¹ Dipl.-Ing. Florian Fisch, wissenschaftlicher Mitarbeiter, Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, Boltzmannstrasse 15, 85748 Garching, Deutschland
fisch@tum.de

² Dipl.-Ing. Jakob Lenz, wissenschaftlicher Mitarbeiter, Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, Boltzmannstrasse 15, 85748 Garching, Deutschland
jakob.lenz@tum.de

³ Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel, Ordinarius, Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, Boltzmannstrasse 15, 85748 Garching, Deutschland
florian.holzapfel@tum.de

⁴ Prof. Dr.-Ing. Gottfried Sachs, Professor, Lehrstuhl für Flugsystemdynamik, Technische Universität München, Boltzmannstrasse 15, 85748 Garching, Deutschland
sachs@tum.de

NOMENKLATUR

\mathbf{u}	Steuergrößen-Vektor
\mathbf{x}	Zustands-Vektor
\mathbf{r}	Positions-Vektor
x, y, z	Position im lokalen Koordinatensystem
V_K	Kinematische Geschwindigkeit
q_0, q_1, q_2, q_3	Quaternionen
$n_{i,A}$	Aerodynamischer Lastfaktor in i -Richtung
n_z	Lastfaktor in körperfester z -Richtung
p_K	Kinemat. Rollrate im körperfesten System
q_K	Kinemat. Nickrate im körperfesten System
r_K	Kinemat. Gierrate im körperfesten System
δ_T	Schubhebelstellung
α_K	Kinematischer Anstellwinkel
β_K	Kinematischer Schiebewinkel
μ_K	Kinematischer Flugbahn-Hängewinkel
η	Höhenruderausschlag
ζ	Querruderausschlag
ζ	Seitenruderausschlag
α_A	Aerodynamischer Anstellwinkel
d_{min}	Minimaler Abstand zu den Zuschauern
t	Zeit

1. EINLEITUNG

In den letzten Jahren haben Luftrennen zunehmend an Beliebtheit gewonnen und es ist gelungen, eine weltweite Rennserie vergleichbar der Formel 1 zu etablieren. Diese Luftrennen ziehen beständig eine große Zuschauerschar in ihren Bann und helfen dadurch, die Faszination Luftfahrt einem breiten Publikum zugänglich zu machen.

Der Ablauf eines solchen Rennens ist folgendermaßen: nachdem der Pilot mit seinem Flugzeug den Startpunkt bzw. die Startlinie passiert hat, muss er einen Rennkurs, der durch Pylonen abgesteckt ist, in möglichst kurzer Zeit absolvieren. Dabei fliegen die teilnehmenden Piloten nicht direkt gegeneinander, sondern einzeln nacheinander in einer durch Qualifikationsrennen festgelegten Starterreihenfolge. Bei den Pylonen handelt es sich um Tore, die entweder ohne Hängewinkel (Level Gate) oder im Messerflug, also mit vertikal gestellten Tragflächen (Knife Edge Gate) durchfliegen werden müssen. Weitere Elemente sind die Schikane, eine Reihe hintereinander angeordneter einzelner Pylonen, die rasche Richtungswechsel erfordern, und das Quadro, das aus zwei Pylonenpaaren besteht, die unmittelbar hintereinander aus verschiedenen, zu einander senkrechten Richtungen durchfliegen werden müssen. Darüber hinaus sind noch bestimmte Kunstflugfiguren wie beispielsweise die halbe kubanische Acht zu absolvieren. Das Rennen endet mit dem Überfliegen der Ziellinie, die bei vielen Wettbewerben mit der Startlinie identisch ist und

gerne durch ein besonderes Merkmal in der Landschaft oder ein charakteristisches Gebäude wie z.B. die Kettenbrücke in Budapest markiert wird.

Um das Rennen zu gewinnen, muss der Pilot diejenige Flugbahn finden, die für sein jeweiliges Flugzeug die kürzeste Rennzeit ergibt. Dabei ist es sehr hilfreich, das Optimum, d.h. die minimale Kurszeit zu kennen, bevor das erste Flugzeug überhaupt gestartet ist. Dies würde zum einen den Piloten helfen, die bestmögliche Strategie zu wählen, zum anderen könnten die Veranstalter bereits im Voraus den gesteckten Kurs hinsichtlich des wichtigsten Kriteriums, nämlich der Sicherheit, bewerten. Piloten könnten analysieren, welche Teile des von ihnen geflogenen Kurses am meisten von der optimalen Flugbahn abweichen und somit lernen, wo der größte Spielraum für Verbesserungen liegt. Den Zuschauern wäre es darüber hinaus möglich, geflogene Zeiten und Kurse nicht nur miteinander sondern auch mit der tatsächlich minimalen Flugzeit und dem optimalen Kurs zu vergleichen. Deshalb wäre es für alle Beteiligten, die Piloten, die Planer und die Sicherheitsverantwortlichen sowie die Zuschauer solcher Flugrennen sehr interessant, die optimale Flugbahn zu kennen.

Die oben beschriebene Aufgabenstellung, die optimale Flugbahn für ein bestimmtes Luftrennen zu berechnen, kann am effizientesten mittels der Flugbahnoptimierung bewerkstelligt werden. Ziel dieses mehrphasigen Flugbahn-Optimierungsproblems ist es, diejenigen Steuereingaben zu finden, die für einen gegebenen Rennkurs denjenigen Verlauf der Zustandsgrößen ergeben, der optimal bezüglich des jeweiligen Gütekriteriums ist, in diesem Fall also der Zeit, die der Pilot benötigt, um den gesteckten Kurs zu durchfliegen. Über die letzten Jahrzehnte wurde eine Vielzahl von Flugbahn-Optimierungsproblemen gelöst, die entweder nur Punktmassenmodelle betrachtet haben ([1], [7], [8], [9], [11], [13]) oder nur Problemstellungen für einzelne Manöver über eine relativ kurze Zeitdauer für ein volles, nicht-lineares Simulationsmodellen mit sechs Freiheitsgraden gelöst haben ([5], [12], [14]). Die geflogenen Bahnen von Flugrennen besitzen einen hochgradig nicht-linearen Charakter, wobei die Grenzen des jeweiligen Flugsystems voll ausgereizt werden und sich die Steuerungen oftmals in der Sättigung befinden. Punktmassen-Modelle sind dabei nur unzulänglich für die Berechnung der Optimalbahnen von Luftrennen geeignet, da sie die dynamische Ordnung des Flugsystems nur unzureichend widerspiegeln. Hierbei ist es vielmehr erforderlich, die Lage- und Rotationsdynamik des jeweiligen Flugzeugs miteinzubeziehen, um realistische Optimalflugbahnen zu erhalten. Im Falle der Verwendung von vollen nicht-linearen Sechs-Freiheitsgrad-Simulationsmodellen treten bei der Optimierung längerer Flugbahnen, wie es für Flugrennen der Fall ist, ernsthafte Probleme auf: angefangen von schlechten Konvergenzeigenschaften bis hin zur Schwierigkeit, hinreichend gute Anfangslösungen zu finden. Deshalb war ein neues Verfahren erforderlich, um derartige Flugbahn-Optimierungsprobleme lösen zu können.

Dieses Verfahren basiert dabei auf einem innovativen Simulationsmodell, das eine neuartige Struktur besitzt, die speziell auf Optimalsteuerungsaufgaben zugeschnitten ist.

In den folgenden Kapiteln wird dieses Simulationsmodell zunächst kurz erläutert, bevor dann das Flugbahn-Optimierungsproblem basierend auf diesem Simulationsmodell formuliert wird. Anschließend wird das neu entwickelte Verfahren vorgestellt, das bei der Generierung guter Anfangslösungen für die Optimierung mit dem vollen, nicht-linearen sechs Freiheitsgrad-Simulationsmodell verwendet wird, bevor abschließend gelöste Flugbahn-Optimierungsprobleme vorgestellt werden, die die Funktionalität und Leistungsfähigkeit des neuen Ansatzes aufzeigen.

2. SIMULATIONSMODELL

Die Grundlage des entwickelten Verfahrens zur Lösung des gestellten Flugbahn-Optimierungsproblems bildet ein skalierbares Simulationsmodell mit verschiedenen Komplexitätsstufen. Im wesentlichen besteht das Simulationsmodell aus einer äußeren Schleife, in der die Translations- und Positions-Bewegungsgleichungen enthalten sind und einer skalierbaren inneren Schleife, die die jeweiligen Rotations- und Lage-Bewegungsgleichungen darstellt. Das Simulationsmodell bietet dabei drei alternative Möglichkeiten der Modellierung der inneren Schleife und damit der Modellierung der Lage- und Rotationsdynamik: erstens, lineare Übertragungsfunktionen zweiter Ordnung für die Lastfaktoren und lineare Übertragungsfunktionen erster Ordnung für die Rollrate, zweitens linearisierte Zustandsraummodelle für die Längs- und Seitenbewegung des betrachteten Flugsystems, und drittens die vollen nicht-linearen Rotations- und Lage-Bewegungsgleichungen. Diese drei alternativen Modellierungsgrade sind in BILD 1 dargestellt.

Bei konventionellen Simulationsmodellen mit sechs Freiheitsgraden sind sowohl die Translations- und Positions-Bewegungsgleichungen als auch die Bewegungsgleichungen

gezeigt. Dabei sind die innere und äußere Schleife so aufgebaut, dass die Schnittstelle zwischen beiden immer dieselbe bleibt, unabhängig davon, welcher Detaillierungs- bzw. welcher Komplexitätsgrad für die innere Schleife gewählt wird. Die Schnittstelle zwischen innerer und äußerer Schleife sind die Lastfaktoren im kinematischen Flugbahn-Koordinatensystem. Da die Eingangsgröße in die äußere Schleife unabhängig von der Modellierung der inneren Schleife immer dieselbe bleibt, kann die Modellierung der inneren Schleife auch beliebig verändert werden, ohne dass dies irgendwelche Auswirkungen auf die Modellierung der äußeren Schleife hätte.

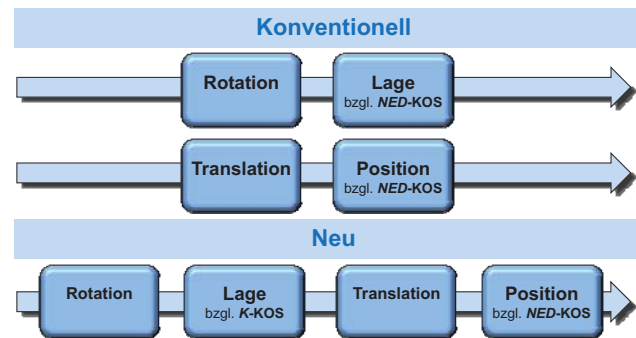


BILD 2. Struktur des Simulationsmodells

Diese spezielle Struktur erlaubt eine einfache Anpassung des Komplexitätsniveaus des Simulationsmodells an die jeweils erforderliche Genauigkeit bzw. Detaillierungstiefe, an die gewünschte Simulations- bzw. Berechnungszeit, an die Robustheit und an die jeweiligen Flugzeugdaten, die für eine bestimmte Simulations- oder Optimierungsaufgabe zur Verfügung stehen. Gleichzeitig ist aber sichergestellt, dass prinzipiell die volle dynamische Ordnung des betrachteten Flugsystems in die Optimierungsaufgabe mit einbezogen wird, so dass die resultierenden Optimal-Flugbahnen unter den jeweiligen Voraussetzungen einen möglichst hohen Realitätsgrad aufweisen.

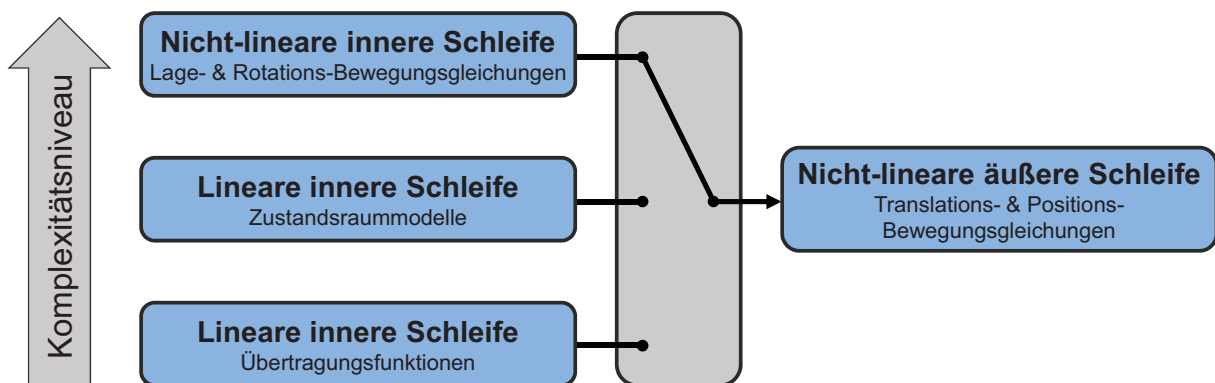


BILD 1. Modellierungsalternativen für die innere Schleife

gen für die Lage und die Rotation bezüglich des *NED*-Koordinatensystems gegeben, d.h. die Translations- und Positionsdynamik wird in gewisser Weise parallel zur Lage- und Rotationsdynamik implementiert (siehe BILD 2 oben). Im Gegensatz dazu besitzt das für die Flugbahnoptimierung neu entwickelte Simulationsmodell eine serielle Struktur. Das heißt, dass die innere Schleife mit der Lage- und Rotationsdynamik nicht bezüglich des *NED*-Systems, sondern bezüglich des kinematischen Flugbahn-Koordinatensystems *K* gegeben ist. Dies ist in BILD 2

Um der Realität so nahe wie möglich zu kommen, sind in dem Simulationsmodell auch Abweichungen von der Normatmosphäre z.B. bei Standarddruck oder Standardtemperatur enthalten. Desweiteren sind statische und konvektive Windfelder mit modelliert, da diese einen großen Einfluss auf die jeweilige Optimalflugbahn haben und nicht außer Acht gelassen werden können.

Zusätzlich zu der äußeren Schleife mit der Translations- und Positionsdynamik und der inneren Schleife mit der

Lage- und Rotationsdynamik umfasst das Simulationsmodell Inversionsregler für die jeweiligen Schleifen, die für das neu entwickelte Optimierungsverfahren eine bedeutende Rolle spielen. Diese Inversionsregler basieren auf dynamischer Inversion der physikalisch kausalen Wirkungsketten des Flugsystems. Eine kausale Wirkungskette beschreibt dabei z.B. die Wirkung eines Höhenruderausschlags auf Veränderungen in der Position des Flugzeugs, in diesem Falle der Flughöhe. Die dynamische Inversion ermöglicht es nun, für vorgegebene Zustandsverläufe von z.B. der Höhe diejenigen Steuergrößen, also hier die Höhenruderausschläge, zu berechnen, die erforderlich sind, damit das Flugsystem dem gegebenen Höhenverlauf folgt. Solche Inversionsregler sind in dem verwendeten Simulationsmodell sowohl für die äußere Schleife als auch für die verschiedenen Modellierungstiefen der inneren Schleife implementiert. Eine detaillierte Beschreibung der Simulationsmodells einschließlich aller Bewegungsgleichungen für die verschiedenen Komplexitätsgrade sowie eine ausführliche Darstellung aller Gleichungen für die Inversionsregler ist in [2] zu finden.

3. FORMULIERUNG DES OPTIMIERUNGSPROBLEMS

Im Allgemeinen lässt sich das Optimalsteuerungsproblems wie folgt beschreiben: Finde den optimalen Steuergrößenverlauf

$$(1) \quad \mathbf{u}_{opt}(t) \in \mathbb{R}^m$$

und den zugehörigen Verlauf für die Zustandsgrößen

$$(2) \quad \mathbf{x}_{opt}(t) \in \mathbb{R}^n$$

der das Bolza-Kostenfunktional

$$(3) \quad J = e(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen

$$(4) \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

der Anfangs- und Endbedingungen

$$(5) \quad \Psi_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), t_0) = 0 \quad \Psi_0 \in \mathbb{R}^q$$

$$(6) \quad \Psi_f(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), t_f) = 0 \quad \Psi_f \in \mathbb{R}^p$$

der Inneren-Punkt-Bedingungen

$$(7) \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}(t_i), t_i) = 0 \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$$

und der Gleichheits- und Ungleichheits-Nebenbedingungen

$$(8) \quad \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0 \quad \mathbf{C}_{eq} \in \mathbb{R}^r$$

$$(9) \quad \mathbf{C}_{ineq}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \geq 0 \quad \mathbf{C}_{ineq} \in \mathbb{R}^s$$

minimiert. Das Bolza-Kostenfunktional setzt sich dabei aus der Endkosten-Funktion $e(\mathbf{x}(t_f), t_f)$ und der Lagrange-Kostenfunktion $L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ zusammen. Während sich die Endkosten-Funktion aus den Zuständen und der Zeit am Ende der zu optimierenden Trajektorie berechnet, berücksichtigt die Lagrange-Funktion Kosten basierend auf den Zuständen und den Steuergrößen während des gesamten Bahnverlaufs.

Das Bolza-Kostenfunktional reduziert sich für das betrachtete Flugbahn-Optimierungsproblem von Flugrennen zu einem Mayer-Kostenfunktional, da das einzige Gütekriterium die benötigte Flugzeit ist:

$$(10) \quad J = t_f$$

Für das Simulationsmodell und damit das Optimierungsproblem unter Verwendung der inneren Schleife mit den linearen Übertragungsfunktionen für die Lastfaktoren und die Rollrate ergeben sich die folgenden Zustands- und Steuergrößen-Vektoren:

$$(11) \quad \mathbf{x} = [x, y, z, V_K, q_0, q_1, q_2, q_3, n_{x,A}, n_{y,A}, \dot{n}_{y,A}, n_{z,A}, \dot{n}_{z,A}, p_K^*, \delta_T]^T$$

$$(12) \quad \mathbf{u} = [n_{y,A,CMD}, n_{z,A,CMD}, p_{K,CMD}^*, \delta_{T,CMD}]^T$$

Wird die innere Schleife mit den linearisierten Zustandsraum-Modellen für die Längs- und Seitenbewegung für die Simulation respektive Optimierung herangezogen, sehen der Zustands- und der Steuergrößenvektor wie folgt aus:

$$(13) \quad \mathbf{x} = [x, y, z, V_K, q_0, q_1, q_2, q_3, \alpha_K, \beta_K, p_K^*, q_K^*, r_K^*, \delta_T]^T$$

$$(14) \quad \mathbf{u} = [\eta, \xi, \zeta, \delta_{T,CMD}]^T$$

Das Simulationsmodell für die Optimierung mit den vollen, nicht-linearen Rotations- und Lagebewegungsgleichungen für die innere Schleife besitzt folgende Vektoren für die Zustände bzw. Steuergrößen:

$$(15) \quad \mathbf{x} = [x, y, z, V_K, q_0, q_1, q_2, q_3, \alpha_K, \beta_K, p_K, q_K, r_K, \delta_T]^T$$

$$(16) \quad \mathbf{u} = [\eta, \xi, \zeta, \delta_{T,CMD}]^T$$

Die Anfangsbedingungen des Optimierungsproblems sind durch die Position der Startlinie und die Richtung, in der das erste Tor durchflogen werden muss, gegeben. Die Endbedingungen ergeben sich entsprechend aus der Position des letzten Tors und der entsprechenden Durchflugs-Richtung:

$$(17) \quad \bar{\mathbf{r}}(t_0) - \bar{\mathbf{r}}_{StartGate} = \bar{\mathbf{0}}$$

$$(18) \quad \bar{\mathbf{r}}(t_f) - \bar{\mathbf{r}}_{FinalGate} = \bar{\mathbf{0}}$$

Die Anforderung, dass der Pilot während des Rennens durch die verschiedenen Tore in einer bestimmten Richtung mit einem bestimmten Hängewinkel hindurch fliegen muss, stellen Innere-Punkt-Bedingungen für das Flugbahn-Optimierungsproblem dar. Dabei gibt es Tore, die mit einem Hängewinkel von 0° durchflogen werden sollen, und solche, die mit einem Hängewinkel von 90° passiert werden müssen. Die entsprechenden Innere Punkt-Bedingungen dafür sind:

$$(19) \quad \mu_K(\bar{\mathbf{r}}_{KnifeEdgeGate}) - 90^\circ = 0^\circ$$

$$(20) \quad \mu_K(\bar{\mathbf{r}}_{LevelGate}) = 0^\circ$$

Indem das gesamte Rennen in mehrere Phasen unterteilt wird, wobei jeweils der Kursabschnitt zwischen zwei Toren als eine Phase definiert wird, können diese Innere-Punkt Bedingungen in Anfangs- und Endbedingungen für die jeweiligen Phasen transformiert werden. Die einzelnen Phasen müssen dann über jeweilige Phasenübergangsbedingungen miteinander verbunden werden, um die Stetigkeit der Steuer- und Zustandsgrößenverläufe sicherzustellen:

$$(21) \quad \mathbf{x}_{i-1}(t_{f,i-1}) - \mathbf{x}_i(t_{0,i}) = 0 \quad i = 2, \dots, n$$

$$(22) \quad \mathbf{u}_{i-1}(t_{f,i-1}) - \mathbf{u}_i(t_{0,i}) = 0 \quad i = 2, \dots, n$$

Hierbei ist n die Anzahl der Phasen, $t_{f,i}$ die Endzeit und $t_{0,i}$ die Anfangszeit der i -ten Phase. Hinzu kommen dann noch eine Reihe von Ungleichheitsbeschränkungen, die bei der Bestimmung einer optimalen Flug-Trajektorie berücksichtigt und eingehalten werden müssen. Zu den wichtigsten Ungleichheits-Nebenbedingungen gehören dabei unter anderem diejenigen, die sich aus den Sicherheitsregularien ergeben, wie Vorschriften, dass bestimmte Lastfaktor-Grenzen nicht überschritten werden dürfen und bestimmte Mindestabstände zu den Zuschauern eingehalten werden müssen. Darüber hinaus sind durch das Flugsystem selbst vorgegebene Leistungsgrenzen zu beachten, wie beispielsweise die maximal mögliche Rollrate oder der maximal mögliche Anstellwinkel. Diese Ungleichheits-Beschränkungen können wie folgt formuliert werden:

$$(23) \quad \begin{pmatrix} -(n_{Z,\min} - n_Z(t)) \cdot (n_Z(t) - n_{Z,\max}) \\ -(d_{\min} - \|\bar{\mathbf{r}}(t) - \bar{\mathbf{r}}_{Crowd}\|_2) \\ -(|p_K(t)| - |p_{K,\max}|) \\ -(\alpha_{A,\min} - \alpha_A(t)) \cdot (\alpha_A(t) - \alpha_{A,\max}) \end{pmatrix} \geq 0$$

Für die Lösung des jeweiligen Optimierungsproblems wird ein Mehrziel-Schießverfahren verwendet. Dabei werden sowohl die Steuerungen als auch die Zustandsgrößen zunächst diskretisiert, wodurch das kontinuierliche Optimalsteuerungs-Problem in ein diskretes Optimierungsproblem überführt wird. Die Lösung dieses Problems wird

dann mit Hilfe des nicht-linearen Optimierungsverfahrens SNOPT, das in der Lage ist, große nicht-lineare Optimierungsprobleme zu lösen, berechnet. Bei dem verwendeten Schießverfahren werden die Steuerungen zwischen den jeweiligen sehr eng gesetzten Diskretisierungspunkten linear approximiert. Die Bewegungsgleichungen werden dann zwischen den einzelnen Zustands-Diskretisierungspunkten mit Hilfe der linear approximierten Steuergrößen-Verläufe integriert, so dass sich die entsprechenden kontinuierlichen Verläufe der Zustandsgrößen ergeben. Dabei entspricht anfänglich der Wert einer Zustandsgröße, der sich aus der Integration der Bewegungsgleichungen von dem vorhergehenden Diskretisierungspunkt zum aktuellen Punkt ergibt, aufgrund der unzureichenden Startlösung in den meisten Fällen nicht demjenigen Wert, der zunächst als Startwert für die Zustandsgröße an diesem Diskretisierungspunkt angenommen wurde. Die Aufgabe des nicht-linearen Optimierungsverfahrens ist es nun, Werte für die diskreten Steuerungen und Zustände zu finden, die diese Abweichungen zu null setzen und dabei gleichzeitig alle Anfangs-, End-, Gleichheits- und Ungleichheits-Nebenbedingungen einhalten. Der optimale, zeitlich kontinuierliche Verlauf der Zustandsgrößen ergibt sich schließlich aus der Integration der Bewegungsgleichungen zwischen den einzelnen Diskretisierungspunkten, wobei die Steuerungen zwischen den jeweiligen Steuerungs-Diskretisierungspunkten linear approximiert werden.

4. BESCHREIBUNG DES OPTIMIERUNGSPROZESSES

Eine der größten Herausforderungen für die Lösung eines Optimierungs-Problems ist es, eine hinreichend gute und genaue Start-Lösung zu finden, um die Stabilität und Robustheit des Optimierungsprozesses sowie gute Konvergenzeigenschaften zu gewährleisten. Mit dem oben beschriebenen Simulationsmodell wird es möglich, einen Prozess zu entwickeln, der sehr gut dazu geeignet ist, entsprechende Anfangslösungen für Optimalsteuerungs-Probleme für Luftrennen unter der Verwendung von voller nicht-linearer Sechsfreiheitsgrad-Simulationsmodelle zu generieren. Dieser Prozess wird im Folgenden beschrieben, ein Überblick über die einzelnen Schritte des Optimierungsprozesses ist in BILD 3 dargestellt.

Zunächst wird eine optimale Lösung für den Rennkurs unter Verwendung des reinen Punktmassen-Modells ohne innere Schleife berechnet. Dazu wird der Kurs in mehrere Phasen aufgeteilt, wobei sich jede Phase als Kursabschnitt zwischen zwei Toren definiert. Die optimale Lösung für die einzelnen Phasen wird dabei mit Hilfe eines Homotopie-Verfahrens berechnet: dazu werden zunächst das Start-Tor und das erste Tor, das während des Rennens durchflogen werden muss, auf einer anfänglich geraden Linie positioniert so dass das Flugzeug gerade im Horizontalflug durch die beiden Tore fliegen kann. Anschließend wird die Position des zweiten Tors und die Lage, mit der das Flugzeug dieses Tor passieren muss, schrittweise so lange verändert, bis die Endbedingungen den tatsächlichen Endbedingungen, die durch die Position und die Art des zweiten Tors gegeben sind, entsprechen. Die Zustände und Steuergrößen am Ende der ersten Phase werden dann als Anfangsbedingungen für die zweite Phase ver-

wendet, wobei die optimale Steuerung für die zweite Phase auf die gleiche Art berechnet wird wie für die erste Phase geschehen. Diese Prozedur wird bis zur letzten Phase des Rennkurses wiederholt. Anschließend werden die Steuerungen und Zustände der einzelnen Phasen zusammengesetzt und man erhält somit eine relativ gute Anfangslösung für die Lösung des kompletten Optimalsteuerungs-Problems basierend auf dem reinen Punktmassen-Simulationsmodell.

Danach wird das Komplexitätsniveau des Simulations-Modells beziehungsweise der inneren Schleife Schritt für Schritt erhöht. Als erstes wird die innere Schleife mit den linearen Übertragungsfunktionen für die Rollrate und die Lastfaktoren in dem Optimierungsproblem mitberücksich-

tung minimiert wurde. Dieser Verlauf stellt jedoch eine gute Anfangslösung für die Optimierung der Flugbahn basierend auf einem Simulationsmodell mit linearen Übertragungsfunktionen dar, da die Startlösung für die Trajektorie bereits die dynamische Ordnung des Flugsystems berücksichtigt und dabei alle Randbedingungen bestmöglich einhält. Zudem liegt die Anfangslösung bereits sehr nahe an der gesuchten optimalen Lösung.

Sobald diese für die entsprechende innere Schleife optimale Lösung gefunden wurde, können im nächsten Schritt die zugehörigen Verläufe der Zustände und Steuerungen verwendet werden, um die Flugbahn unter Verwendung des Simulationsmodells zu simulieren, dessen innere Schleife die linearisierten Zustandsraummodelle für die

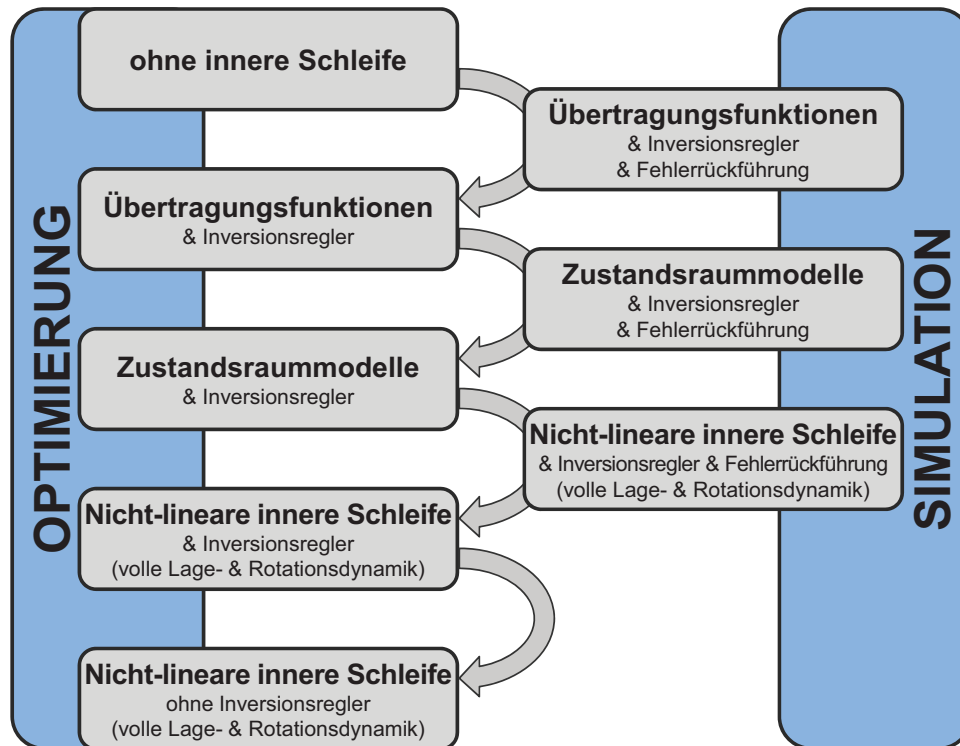


BILD 3. Darstellung des Optimierungsprozesses

tigt. Dabei werden die berechneten Lastfaktor- und Rollratenverläufe, die aus der Optimierung mit dem reinen Punktmassen-Simulationsmodell resultieren, als Eingangs-Steuergrößen für die innere Schleife mit den linearen Übertragungsfunktionen verwendet. Simuliert man nun mit Berücksichtigung der linearen Übertragungsfunktionen die Flugbahn mit diesem Steuergrößenverlauf, der nur für die Simulation mit dem reinen Punktmassen-Modell ohne innere Schleife eine optimale Flugbahn ergibt, so ist die resultierende Flugbahn nicht mehr optimal und weicht von der vorherigen Flugbahn ab. Außerdem werden nicht mehr alle Anfangs-, End- und Randbedingungen eingehalten werden können. Deshalb sind im Simulationsmodell für die verschiedenen Schleifen zusätzlich Fehlerrückführungen implementiert, die die mit den linearen Übertragungsfunktionen simulierte Trajektorie bestmöglich auf die optimale Trajektorie für das Simulationsmodell ohne innere Schleife zurückführen. Dieser so gefundene Verlauf für die Steuergrößen ist mit Sicherheit nicht mehr optimal, da er mit Hilfe einer Simulation und Fehlerrückführungen generiert wurde und die Kostenfunktion nicht explizit durch eine Optimie-

Längs- und Seitenbewegung des Flugzeugs sowie die zugehörigen Inversionsregler enthält. Das Modellierungsniveau wird weiter erhöht, da das Simulationsmodell mit Zustandsraummodellen im Gegensatz zu dem Modell mit Übertragungsfunktionen die Kopplung der Zustände in der Längs- und der Seitenbewegungen beinhaltet. Wie zuvor ist es sehr wahrscheinlich, dass die nun simulierte Trajektorie von der für das Simulationsmodell mit linearen Übertragungsfunktionen optimalen Trajektorie abweicht, weshalb auch hier die geeigneten Fehlerrückführungen verwendet werden, um das Simulationsmodell so gut wie möglich auf die vorgegebene Flugbahn zurück zu bringen. Die so bestimmten Verläufe für die Zustände und Steuerungen werden dann für die Lösung des oben beschriebenen Optimalsteuerungs-Problems verwendet, das auf dem Simulationsmodell mit einer inneren Schleife bestehend aus den linearisierten Zustandsraummodellen basiert.

Im nächsten Schritt werden die für das Simulationsmodell mit linearisierten Zustandsraummodellen optimalen Zustands- und Steuergrößenverläufe für die Simulation mit

dem Simulationsmodell herangezogen, dessen innere Schleife aus den vollen, nicht-linearen Rotations- und Lage-Bewegungsgleichungen aufgebaut ist. Da nun das höchste Komplexitätsniveau erreicht ist und auch die Kopplung zwischen den Zuständen der Längs- und Seitenbewegung bei der Rotations- und Lagedynamik untereinander in die Simulation mit eingeht, weicht die simulierte Trajektorie von der im vorhergehenden Schritt ermittelten optimalen Trajektorie ab, weshalb erneut geeignete Fehlerrückführungen erforderlich sind, um die Flugbahn für das volle nicht-lineare Sechs-Freiheitsgrad-Simulationsmodell bestmöglich auf die für das Simulationsmodell mit den linearisierten Zustandsraummodellen optimale Flugbahn zu bringen. Der dadurch generierte Steuer- bzw. Zustandsgrößenverlauf kann dann verwendet werden, um die optimale Flugbahn für das Simulationsmodell mit der nicht-linearen inneren Schleife und den entsprechenden Inversionsreglern zu bestimmen.

Dabei ergeben sich auch die Zeitverläufe für die Steuerflächenausschläge, die nötig sind, um die entsprechende optimale Flugbahn zu fliegen. Diese Steuerflächenausschläge können dann als Startlösung verwendet werden, um die optimale Flugbahn für einen bestimmten Rennkurs für das Simulationsmodell mit voller, nicht-linearer innerer Schleife aber ohne dem zugehörigen Inversionsregler zu bestimmen. Die Steuergrößen sind in diesem Fall direkt die Steuerflächenausschläge. Dieser finale Schritt ist dadurch bedingt, dass der Inversionsregler für die volle, nicht-lineare Lage- und Rotationsdynamik nur den minimal-phasigen Anteil der Lage- und Rotationsdynamik, nicht aber den nicht-minimal-phasigen Anteil in der dynamischen Inversion berücksichtigen kann.

Durch die beschriebene Vorgehensweise können die Stabilität und die Robustheit des Optimierungsprozesses erhöht sowie die Konvergenzeigenschaften deutlich verbessert werden, da für jeden Schritt des Optimierungsprozesses gute Anfangslösungen aus dem vorhergehenden Schritt existieren, die zur Lösung des jeweiligen Optimierungsproblems herangezogen werden können, während der ganze Optimierungsprozess selbst mit einer vergleichsweise einfachen Problemstellung, basierend auf dem reinen Punktmassen-Simulationsmodell, startet.

5. ERGEBNISSE

Um die Leistungsfähigkeit des entwickelten Verfahrens zu demonstrieren, wurden zunächst nur die jeweils optimalen Flugbahnen für ein einzelnes Kunstflug-Manöver, die halbe kubanische Acht, bestimmt. Das Ergebnis zeigt BILD 4.

Anschließend wurde die optimale Flugbahn für einen kompletten Rennkurs mit Hilfe des oben beschriebenen Verfahrens und der Mehrziel-Schießmethode berechnet. Dazu wurde der komplette Rennkurs in sechzehn verschiedene Phasen aufgeteilt, wobei die einzelnen Phasen jeweils aus einem Rennabschnitt zwischen zwei Toren bestehen. Die optimale Flugbahn ist in BILD 5 dargestellt, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit nur eine Runde des Rennkurses, der zweimal durchflogen wird, abgebildet ist. Die Berechnung der Optimalbahn umfasst das gesamte Rennen mit zwei Runden.

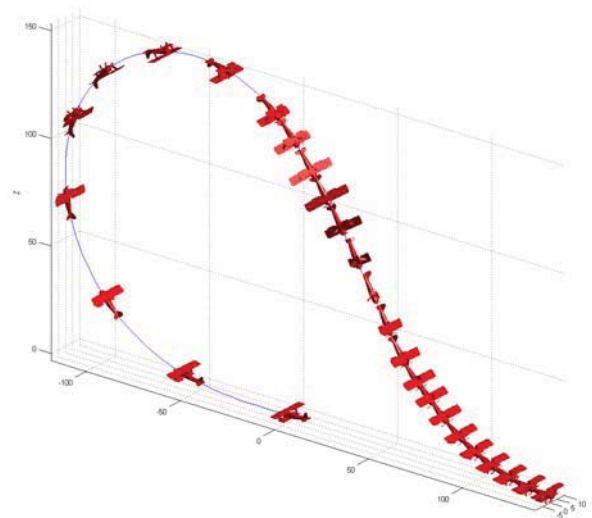


BILD 4. Halbe Kubanische Acht

Obwohl der Rennkurs selbst in diesem Fall nur zweidimensional abgesteckt ist, das heißt alle Tore befinden sich auf Meereshöhe, ist die aus der Optimierung resultierende optimale Flugbahn dreidimensional. Das lässt sich besonders gut an der 270°-Wende beobachten, mit der das Quadro durchflogen wird: hier muss der Pilot seine Maschine zu Kurvenbeginn hochziehen, um die Flugzeit für dieses Manöver zu minimieren.

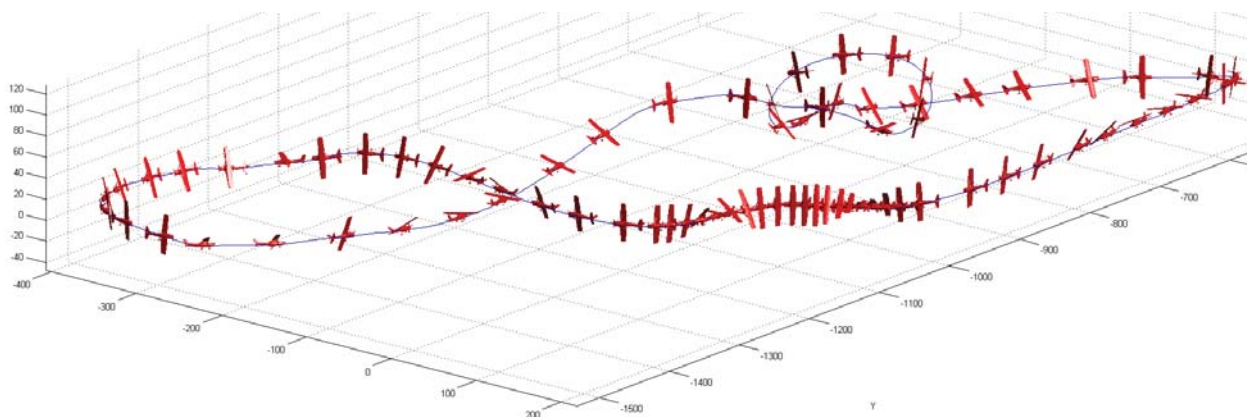


BILD 5. Optimierter Rennkurs

6. ZUSAMMENFASSUNG

Das vorliegende Paper präsentiert einen neu entwickelten Ansatz, nämlich die Verwendung eines nicht-linearen Punktmassen-Modells mit einer in Reihe geschalteten skalierbaren inneren Schleife für die Simulation und die Optimierung der Flugbahnen von Luftrennen. Die innere Schleife repräsentiert dabei die Lage- und Rotationsdynamik des betrachteten Flugsystems und kann in ihrem Modellierungs- und Komplexitätsniveau über die spezielle Struktur des Simulationsmodells leicht an die jeweiligen Anforderungen angepasst werden. Darüber hinaus wird ein Optimierungsprozess vorgestellt, in dem durch schrittweise Erhöhung des Modellierungs- und Komplexitätsniveaus optimale Lösungen für ein Optimierungsproblem mit einem bestimmten Komplexitätsgrad generiert und diese Lösungen als Startlösungen für das Optimalsteuerungs-Problem der nächsthöheren Komplexitätsstufe verwendet werden. Da diese Startlösungen bereits sehr gut an die jeweils optimale Lösung des einzelnen Optimierungsproblems herankommen, kann die Robustheit und Stabilität des Optimierungsprozesses gewährleistet und gute Konvergenzeigenschaften erzielt werden.

Besonders für die Optimierung von Flugbahnen basierend auf Simulationsmodellen mit der vollen, nicht-linearen Lage- und Rotationsdynamik lassen sich mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens Probleme vermeiden, die sich durch das unmittelbare Angehen dieser Optimierungsaufgabe ergeben würde wie beispielsweise das Fehlen einer hinreichend guten Startlösung. Die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Ansatzes wurde anhand der Optimierung einer einzelnen Kunstflugfigur, der halben kubanischen Acht, und der Bestimmung der Optimalflugbahn für einen gesamten Rennkurs demonstriert.

SCHRIFTUM

- [1] Bulirsch, R., Montrone, F., and Pesch, H. J., "Abort Landing in the Presence of Windshear as a Minimax Optimal Control Problem - Part 1: Necessary Conditions," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 70, No. 1, 1991.
- [2] Fisch, F., et al., "Airframe and Trajectory Pursuit Modeling for Simulation Assisted Air Race Planning," *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*, Honolulu, Hawaii, 2008, AIAA-2008-6532.
- [3] Bryson, A. E., and Ho, Y.-C., *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, 1st ed., Taylor & Francis, London, 1975.
- [4] Bryson, A. E., *Dynamic Optimization*, 1st ed., Pearson Education, London, 1998.
- [5] Corban, J. E., et al., "On-Line Trajectory Optimization for Autonomous Air Vehicles," Guided Systems Technologies, Inc., McDonough, Georgia, GST-06-1-F, 2007.
- [6] Hull, D. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer Verlag, New York, 2003.
- [7] Miele, A., Wang, T., and Melvin, W. W., "Optimal Take-Off Trajectories in the Presence of Windshear," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 49, No. 1, 1986, pp. 1-45.
- [8] Ringertz, U., "Optimal Trajectory for a Minimum Fuel Turn," *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 5, 2000, pp. 932-34.
- [9] Nguyen, N., "Singular Arc Time-Optimal Climb Trajectory of Aircraft in a Two-Dimensional Wind Field," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Keystone, Colorado, 2006, AIAA-2006-6598.
- [10] Gill, P. E., Murray, W., and Saunders, M. A., "SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization," *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 12, No. 4, 2002, pp. 979-1006.
- [11] Schultz, R. L., "Three-Dimensional Trajectory Optimization for Aircraft," *Journal of Guidance*, Vol. 13, No. 6, 1987, pp. 936-943.
- [12] Bocvarov, S., Lutze, F. H., Cliff, E. M., and Well, K. H., "Time-Optimal Reorientation Maneuvers for an Aircraft with Thrust-Vector Control," *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, New Orleans, LA, 1991, AIAA-1991-2709.
- [13] Grimm, W., and Hans, M., "Time-Optimal Turn to a Heading: An Improved Analytic Solution," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, 1990, pp. 940-947.
- [14] "Trajectory Optimization Using 6-DOF Vehicle Models," *10th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, Haifa, Israel, 1995.
- [15] Gill, P. E., Murray, W., and Saunders, M. A., *User's Guide for SNOPT Version 7: Software for Large-Scale Nonlinear Programming*, University of California, Department of Mathematics, San Diego, CA, 2007.