

UNSICHERHEITS- UND ZUVERLÄSSIGKEITSANALYSE KOMPLEXER STRUKTUREN DURCH EFFIZIENTE SIMULATION

M.F. Pellissetti, G.I. Schuëller
Institut für Mechanik, Universität Innsbruck
Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck

Zusammenfassung

Dieser Beitrag behandelt Methoden für die Erfassung von Streuungen und Unsicherheiten innerhalb strukturmekanischer Aufgabenstellungen in Luft- und Raumfahrt, sowie deren Umsetzung innerhalb bewährter Berechnungsumgebungen. Im Mittelpunkt stehen dabei Algorithmen die sich hinsichtlich Robustheit und Skalierbarkeit auszeichnen und infolgedessen mit zeitgemäßen Finite-Elemente-Modellierungen verträglich sind. Bei der Umsetzung in entsprechende Programmsysteme liegt die Herausforderung in der Kopplung mit FE Programmen sowie in der parallelen Ausführung zur Verminderung der Rechenzeit. Unter diesen Voraussetzungen erweisen sich Monte Carlo Methoden als besonders leistungsfähig.

Die praktische Durchführung der Unsicherheits- und Zuverlässigkeitsanalyse repräsentativer Anwendungen wird anhand der statischen und dynamischen Analyse einer Satellitenstruktur sowie eines Turbinenblattes gezeigt. Die Simulation erfolgt mit dem Programmsystem COSSAN-X, das die Erfassung von strukturmekanischen Unsicherheiten durch Koppelung mit herkömmlichen FE Programmen unterstützt. Dadurch werden unter anderem die robuste Entwurfsoptimierung sowie die Zuverlässigkeitsbeurteilung von Bauteilen und Konstruktionen ermöglicht.

1. EINFÜHRUNG

Die Kostenoptimierung von Strukturen in Luft- und Raumfahrt, aber auch in zahlreichen anderen Ingenieurdisziplinen, erfordert verstärkt einen rationalen Umgang mit Unsicherheiten, insbesondere mit den materialbedingten und fertigungstechnischen Streuungen. Diese Tatsache behält im Zeitalter hochentwickelter Simulationssoftware zweifelsohne seine Gültigkeit, da 1.) Streuungen in einem gewissen Ausmaß unvermeidbar sind und 2.) die genaue Bestimmung der streuenden Größen, z.B. durch Messung, in den allermeisten Fällen nicht oder nur beschränkt durchführbar ist.

Für das Ingenieurwesen sind unterschiedliche Arten von Unsicherheiten bedeutsam; eine gängige Einteilung unterscheidet zwischen natürlichen Unsicherheiten (Streuungen), statistischen Unsicherheiten und Modellunsicherheiten. In der bisherigen Ingenieurspraxis wurden diese Unsicherheiten meist auf sehr überschlägige Art und Weise berücksichtigt, durch Anwendung von sog. Sicherheitsfaktoren im Zuge der Bemessung oder bestenfalls durch Sensitivitätsanalysen. Obgleich diese auf rein deterministischen Prognosemodellen fußende Vorgehensweise zweifellos große praktische Bedeutung hat, ist der Informationsgehalt einer systematischen Analyse der Unsicherheiten ungleich größer [1,2]. Die zahlenmäßige Erfassung der Fortpflanzung der Unsicherheiten zu den Antwortgrößen unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie ist im Wesentlichen die Zielsetzung der sog. *stochastischen Strukturanalyse*. Eine gleichwertige, in der Folge ebenfalls verwendete Bezeichnung für diese Art der Analyse lautet *Unsicherheitsanalyse* (von Strukturen).

Der praktische Nutzen einer solchen Analyse liegt erstens

darin, dass dadurch die Zuverlässigkeit einer Konstruktion zahlenmäßig vorhergesagt werden kann, und zwar über die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit. Diese Information, die bei der Verwendung von Sicherheitsfaktoren verborgen bleibt, ermöglicht eine besser fundierte Beurteilung einer Konstruktion, unter den Gesichtspunkten der Rationalität und der Wirtschaftlichkeit.

Eine zweite Art der Verwendung stochastischer Strukturanalysen entsteht im Zusammenhang mit der verstärkt geforderten Robustheit von optimierten Konstruktionsentwürfen. Damit ist gemeint dass die maßgebenden Antwortgrößen eine nur gemäßigte Empfindlichkeit gegenüber Streuungen in den für die Konstruktion bedeutsamen Parametern aufweisen sollen. Im Vergleich zur Zuverlässigkeitsanalyse ist die Ausgangslage ähnlich und besteht in einem Berechnungsmodell in dem die Unsicherheiten explizit dargestellt sind. Die Zielsetzung jedoch unterscheidet sich dahingehend dass für die robuste Optimierung das allgemeine Ausmaß der Streuungen ausschlaggebend ist. Die Zuverlässigkeitsanalyse verfolgt hingegen die Vorhersage äußerst unwahrscheinlicher Ereignisse; mathematisch gesehen liegt die Aufmerksamkeit auf den Ästen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die Umsetzung der stochastischen Strukturanalyse, im Zusammenhang mit Finite-Elemente (FE) Modellen von Strukturen. Angesichts der Komplexität gängiger FE Modelle und des daraus folgenden Rechenaufwands hängt die Umsetzbarkeit in hohem Maße von der *Skalierbarkeit* der verwendeten stochastischen Methoden ab. Diese Eigenschaft ist Voraussetzung dafür, dass eine Unsicherheitsanalyse auch auf FE Modelle mit

Zehntausenden Freiheitsgraden und einer entsprechend hohen Anzahl an streuenden Parametern angewendet werden kann. Aus diesem Grund liegt das Hauptgewicht der hier vorgestellten Algorithmen auf den Monte Carlo Methoden. Diese besitzen den entscheidenden Vorteil, dass sie in Bezug auf die Anzahl der Parameter, deren Streuungen explizit berücksichtigt werden, verhältnismäßig unempfindlich sind.

Die Grundlage für eine stochastische Strukturanalyse bilden im allgemeinen FE Modelle, die in der Regel mit bewährten, mittlerweile zum Teil hoch entwickelten Programmsystemen erstellt werden. Die softwaremäßige Umsetzung der Unsicherheitsanalyse geschieht vor diesem Hintergrund; große Bedeutung kommt daher der wirksamen *Koppelung* der beiden Teilbereiche, FE Analyse und Unsicherheitsanalyse, zu. Ebenso entscheidend für die programmtechnische Umsetzung der Unsicherheitsanalyse ist die Ausnutzung der mittlerweile ebenfalls weit fortgeschrittenen Hardwareressourcen, in Form von Hochleistungsrechnern. In der Tat ist der Rechenaufwand von stochastischen Analysen - selbst bei Verwendung sehr zielorientierter Methoden - im Vergleich zu deterministischen Analysen stark erhöht.

Das Programmsystem COSSAN-X, das mit der Zielsetzung der Anwendbarkeit auf komplexe FE Modelle entwickelt wurde, ermöglicht es, die Unsicherheitsanalyse auf Tragwerke anzuwenden, die für die Ingenieurspraxis im Luft- und Raumfahrtswesen, aber auch in Maschinenbau und Bauingenieurwesen, von Interesse sind. Zur Demonstration der vorgestellten Methoden und deren Implementierung werden im Abschnitt 4 zwei Anwendungen präsentiert, und zwar eine Satellitenkonstruktion und ein Turbinenblatt.

2. METHODEN DER ANALYSE

2.1. Deterministische Modellierung

Die rechnergestützte Simulation von Tragwerken fußt vorwiegend auf der Finite-Elemente (FE) Methode. Die in diesem Beitrag ausschließlich betrachtete *lineare* FE Analyse liefert Matrixgleichungen der Form

$$(1) \quad \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$(2) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$$

je nach dem ob es sich um eine quasistatische oder dynamische Analyse handelt. Darin werden die globale Massenmatrix \mathbf{M} und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} durch Einmischen der entsprechenden Elementsteifigkeiten erhalten,

$$(3) \quad \mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e \quad \mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e d\Omega^e$$

$$(4) \quad \mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^e \quad \mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho^e \mathbf{H}^{eT} \mathbf{H}^e d\Omega^e$$

wobei \mathbf{D}^e die Elastizitätsmatrix und ρ^e die Massendichte des Elements e darstellen. Die gesuchte Antwort besteht

im Vektor \mathbf{u} bzw. $\mathbf{u}(t)$, der die äußeren Weggrößen zu den Freiheitsgraden des FE-Modells beinhaltet.

2.2. Modellierung der Unsicherheiten

Die Aufstellung von FE Modellen erfordert - neben der Definition der Tragwerksgeometrie und der Auswahl geeigneter Elementtypen - die Festlegung einer Vielzahl an Parametern, die von der Beschaffenheit der Struktur abhängen. Dazu gehören Materialparameter, wie z.B. der Elastizitätsmodul, und Bauteilabmessungen, z.B. jene eines Stabelements. Auch die Einwirkungen werden zahlenmäßig durch entsprechende Modell-Parameter festgelegt.

Wie bereits in der Einführung erwähnt, sind diese Parameter mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, deren Ausmaß von zahlreichen Faktoren abhängt. Die explizite, mengenmäßige Erfassung dieser Unsicherheiten erfordert ein entsprechendes mathematisches Gerüst; dafür haben sich *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* in vielerlei Hinsicht bewährt. Alternative Darstellungsmöglichkeiten der Unsicherheiten fanden in den letzten Jahren ebenfalls Eingang in die Strukturmechanik, wie zum Beispiel die Theorie der Fuzzy Mengen. Diese eignet sich in erster Linie zur Erfassung von Unschärfen bzw. Subjektivitäten im Ingenieurwesen [3].

In der vorliegenden Arbeit werden die Unsicherheiten ausschließlich im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik behandelt. Ein beliebiger streuender Parameter X wird daher als Zufallsvariable modelliert, d.h. als Abbildung einer Stichprobe θ in einen Zahlenwert,

$$(5) \quad \theta \mapsto X(\theta).$$

Beschrieben wird eine Zufallsvariable vollständig durch ihre Verteilungsfunktion $F_X(x)$,

$$(6) \quad F_X : x \mapsto P[X(\theta) \leq x].$$

Für die Wirklichkeitsnähe einer sog. stochastischen Modellierung ist die Verfügbarkeit einschlägiger Messdaten wesentlich. Darauf aufbauend können dann statistische Schätzverfahren für die Festlegung der Verteilungsfunktion verwendet werden. In den meisten Fällen liefern die verfügbaren Daten bestenfalls Aufschluss über den Erwartungswert $\mu = E[X(\theta)]$ und

die Varianz $\sigma^2 = E[(X(\theta) - \mu)^2]$ der streuenden Größen. Daher wird vielfach, unter Berufung auf das Prinzip der maximalen Entropie, die Gauss'sche Verteilungsfunktion verwendet.

Räumlich oder zeitlich schwankende zufällige Größen (z.B. der E-Modul eines plattenförmigen Bauteils bzw. eine zeitabhängige zufällige Einwirkung) können als Zufallsprozesse modelliert werden,

$$(7) \quad \Xi(t) = \Xi(t, \theta) \quad F_{\Xi}(\xi, t) = P[\Xi(t, \theta) \leq \xi]$$

wobei hier t allgemein jene physikalische Größe repräsentiert, über die der Zufallsprozess definiert ist. Im Zusammenhang mit strukturmechanischen Anwendungen ist erforderlich, die auftretenden Zufallsprozesse zu diskretisieren. Dies kann auf besonders effiziente Weise mit Hilfe der Karhunen-Loève Reihenentwicklung bewerkstelligt werden,

$$(8) \quad \Xi(t, \theta) = E[\Xi(t, \theta)] + \sum_i \sqrt{\lambda_i} \phi_i(t) X_i$$

In dieser Entwicklung stellen λ_i und $\phi_i(t)$ die deterministischen Eigenwerte und Eigenfunktionen der Kovarianzfunktion von $\Xi(t, \theta)$ dar. Der Zufallsprozess $\Xi(t, \theta)$ wird daher als Überlagerung deterministischer Funktionen mit zufälligen Amplituden X_i dargestellt.

2.3. Berücksichtigung der Unsicherheiten innerhalb der FE Analyse

Durch die Modellierung von streuenden Parametern mittels Zufallsvariablen bzw. Zufallsprozessen, wandeln sich die Systemmatrizen in den Gleichungen (1) und (2) zu zufallsbehafteten Größen, deren Werte stichprobenabhängig u. daher zufällig sind,

$$(9) \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\theta) \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(\theta) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}(\theta)$$

Aufgrund des funktionalen Zusammenhangs zwischen den Matrizen und den gesuchten Weggrößen \mathbf{u} , sind auch letztere zufallsbehaftet. Die Bestimmung der zufälligen Antwortgrößen $\mathbf{u}(\theta)$ bzw. davon abgeleiteter Größen (z.B. Spannungen), hier allgemein mit $Y(\theta)$ bezeichnet, ist eng verwandt mit der Fehlerfortpflanzung, mit der sich bereits Gauss beschäftigte. Die unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung der zufallsbehafteten Antwort $\mathbf{u}(\theta)$ werden als *Stochastische Finite Elemente Methoden (SFEM)* bezeichnet.

Mittlerweile gibt es zahlreiche derartige Methoden, die in zwei Kategorien eingeteilt werden können. In der ersten dieser beiden Kategorien erfolgt eine *näherungsweise Darstellung der Antwortgrößen*; der funktionale Zusammenhang zwischen den zufallsbehafteten Parametern und der Antwortgröße liegt dabei in einer Form vor, die eine rasche Auswertung der zugehörigen Kennwerte bzw. Wahrscheinlichkeiten ermöglicht.

Dieser Ansatz zur Stochastischen Finite Elemente Methode ist in Bild 1 dargestellt. Die zufallsbehaftete Antwortgröße $Y(\theta)$ wird durch die Näherung $Y'(\theta)$ ersetzt. Diese hängt sowohl von den zufallsbehafteten Parametern $X(\theta)$ sowie vom verwendeten FE Modell ab. Auf Grundlage dieser Näherung werden statistische bzw. probabilistische Aussagen über die Antwortgrößen ermittelt, insbesondere Streuungsmaße und etwaige Überschreitenswahrscheinlichkeiten.

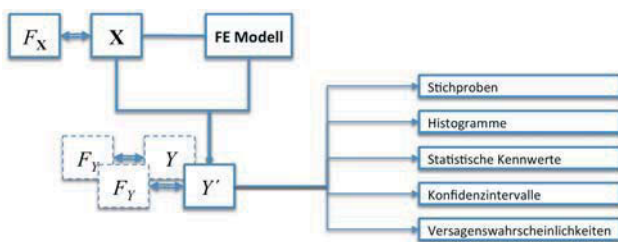


BILD 1. Stochastische Strukturanalyse durch näherungsweise Darstellung der Antwort

Vertreter dieser Kategorie sind die *Störungsrechnung* [4], die *Neumann Reihenentwicklung* [5], die auf dem Begriff des *Polynomialen Chaos* fußende *Spektrale Stochastische FE Methode* (SSFEM) [6] sowie die Methode der *reduzierten stochastischen Basis* [7]. Ferner gehört auch das *Antwortflächenverfahren* zu dieser Kategorie.

Die zweite Kategorie der SFEM ist in Bild 2 dargestellt und beinhaltet Methoden, die das Prinzip der *Monte Carlo Simulation (MCS)* verwenden. Dabei wird auf eine näherungsweise Darstellung der Antwortgröße verzichtet. Stattdessen werden Stichproben $Y(\theta)$ erzeugt, wobei dabei auf keinerlei Näherungen zurückgegriffen wird, d.h. für jede Stichprobe wird die Antwort unter Verwendung des FE Modells bestimmt. Mit diesen Stichproben werden dann die gesuchten Kennwerte bzw. Wahrscheinlichkeiten durch statistische Schätzmethoden ermittelt.

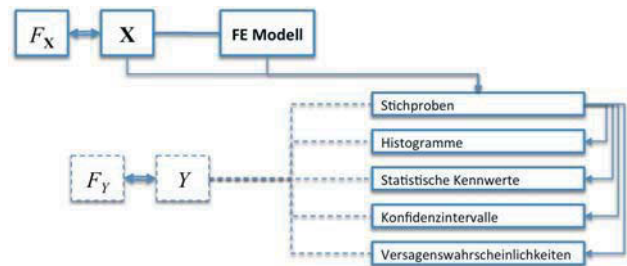


BILD 2. Stichproben gestützte stochastische Strukturanalyse (Monte Carlo Simulation)

Neben der direkten MCS, bei der die Stichproben der zufallsbehafteten Parameter gemäß der entsprechenden Verteilungsfunktion gezogen werden, gibt es die sog. *varianzmindernde MCS*. Diese erfordern im Allgemeinen - für ein gewisses angestrebtes Genauigkeitsmaß - eine geringere Anzahl an Stichproben. Beispiele solcher fortgeschrittener Monte Carlo Methoden sind das sog. *Latin Hypercube Sampling* sowie die im nächsten Abschnitt vorgestellten Verfahren.

Die Leistungsfähigkeit der unterschiedlichen Methoden ist im Allgemeinen stark problemabhängig. SFEM, die eine näherungsweise Darstellung der Antwort verwenden, sind im Vergleich zur MCS vor allem dann interessant wenn die Anzahl der zufallsbehafteten Parameter eher gering ist. In diesem Fall liegt der Rechenaufwand für eine vergleichbare Genauigkeit oft beträchtlich unter jenem der MCS. Bei FE Modellen mit einer großen Anzahl an zufallsbehafteten Parametern ist MCS wiederum vorzuziehen, da bei steigender Anzahl von streuenden Parametern die Rechenzeit der auf Näherungen gestützten Methoden rasch ansteigt.

2.4. Zuverlässigkeitsanalyse

Wie in Bildern 1 und 2 dargestellt, besteht das Ziel der stochastischen Strukturanalyse in der Bereitstellung unterschiedlicher Informationen statistischer bzw. probabilistischer Art. Die Vorhersage der Versagenswahrscheinlichkeit stellt dabei eine besondere Herausforderung dar, da diese im Allgemeinen Aussagen über extrem unwahrscheinliche Ereignisse erfordert. Die

Bestimmung der Versagenswahrscheinlichkeit erfordert die Definition der sog. Grenzzustandsfunktion g ,

$$(10) \quad g = g(\mathbf{X}) \quad \text{so dass} \quad \begin{cases} g(\mathbf{X}) > 0 & \Leftrightarrow \mathbf{X} \in S \\ g(\mathbf{X}) < 0 & \Leftrightarrow \mathbf{X} \in F \end{cases}$$

Diese ordnet jedes \mathbf{X} entweder dem Versagensbereich F oder dem dazu komplementären, sicheren Bereich S zu. Die Versagenswahrscheinlichkeit folgt dann aus der Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der streuenden Parameter, allerdings ausschließlich über den Versagensbereich F ,

$$(11) \quad p_F = \int_{g < 0} f_{\mathbf{X}} d\mathbf{x}$$

Die Schwierigkeit dieser Berechnung besteht darin, dass die Grenzzustandsfunktion zumeist nicht explizit bekannt ist, sondern lediglich punktweise ausgewertet werden kann. Die Versagenswahrscheinlichkeit p_F kann daher in den seltensten Fällen exakt berechnet werden und muss vielmehr abgeschätzt werden.

2.4.1. Näherungsverfahren

Eine Reihe von Verfahren beruht auf der Näherung der Grenzzustandsfunktion mit Polynomen geringer Ordnung [8]. Dadurch gelingt die Durchführung des Integrals in Gleichung (11), wobei dieses über den durch die Näherung der Grenzzustandsfunktion gegebenen Versagensbereich ausgewertet wird.

Die Hauptrolle nimmt bei diesen Verfahren der sog. *Bemessungspunkt* ein. Dieser entspricht dem Punkt der Grenzzustandsfunktion mit der größten Wahrscheinlichkeitsdichte; nach Transformation in den Standard-Normalraum weist dieser den geringsten Abstand zum Ursprung auf.

- **FORM (First Order Reliability Method):**
bei dieser weit verbreiteten Methode wird die Grenzzustandsfunktion im Standard-Normalraum am Bemessungspunkt durch eine Gerade angenähert. Dadurch vereinfacht sich die entsprechende Näherung der Versagenswahrscheinlichkeit zu $p_F^{FORM} = \Phi^{-1}(-\beta)$.
- **SORM (Second Order Reliability Method):**
hier erfolgt eine Erweiterung der Näherung der Grenzzustandsfunktion auf ein Polynom zweiter Ordnung, wodurch ein etwas genauerer Näherungswert für p_F erzielt wird.
- **AMV (Advanced Mean Value Method):**
bei dieser im Luft- und Raumfahrtwesen häufig verwendeten Methode [9] wird die Grenzzustandsfunktion mit einer Taylorreihe erster Ordnung um den Mittelwert von \mathbf{X} angenähert. Diese liefert eine entsprechende Näherung des Bemessungspunktes. Die Taylorreihe der Grenzzustandsfunktion wird schließlich dahingehend korrigiert, dass im genäherten Bemessungspunkt der Fehler verschwindet.

Die Anwendbarkeit dieser Methoden ist im allgemeinen auf niederdimensionale Probleme beschränkt, d.h. auf Probleme mit einer geringen Anzahl an streuenden Parametern.

2.4.2. Monte Carlo Simulation

2.4.2.1. Direkte Monte Carlo Simulation

Angenommen es liegen Stichproben der zufallsbehafteten Parameter \mathbf{X} vor, die mit einem Zufallsgenerator unter Verwendung der Verteilungsfunktion von \mathbf{X} erzeugt wurden. Der Schätzwert der direkten MCS für die Versagenswahrscheinlichkeit entspricht dem Verhältnis der Anzahl der Versagensfälle zur Gesamtzahl der Stichproben

$$(12) \quad p_F^{MCS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{g < 0}(\mathbf{X}^{(i)}) \quad \mathbf{1}_{g < 0} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow g < 0 \\ 0 & \Leftrightarrow g > 0 \end{cases}$$

Für kleine Versagenswahrscheinlichkeiten, wie dies in den meisten Ingenieur Anwendungen der Fall ist, ist die direkte MCS nicht effizient, da die Varianz des Schätzers,

$$(13) \quad \text{Var}[p_F^{MCS}] = \frac{1 - p_F}{p_F N}$$

nur durch eine sehr große Stichprobenanzahl N entsprechend klein gehalten werden kann.

2.4.2.2. Line Sampling

Eine relativ neue und effiziente Methode für die Schätzung der Versagenswahrscheinlichkeit stellt das sog. Line Sampling Verfahren [10] dar. Dabei werden, wie in Bild 3 dargestellt, Stichproben in einem Unterraum S_{α}^{\perp} erzeugt; für jede dieser Stichproben wird die bedingte Versagenswahrscheinlichkeit $p_F^{(j)}$ geschätzt, indem der Durchstoßpunkt der Geraden in Richtung von α mit dem Versagensbereich durch Interpolation angenähert wird.

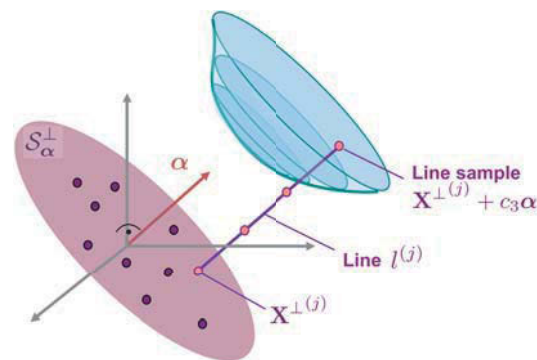


BILD 3. Line Sampling

Der Schätzer der Versagenswahrscheinlichkeit besteht dann im Mittelwert der bedingten Wahrscheinlichkeiten,

$$(14) \quad p_F^{LS} = \frac{1}{N_L} \sum_{j=1}^{N_L} p_F^{(j)}$$

worin N_L die Anzahl der verwendeten Linien darstellt. Bei einer günstigen Auswahl der Richtung α weist der in Gleichung (14) angegebene Schätzer eine stark reduzierte Varianz auf, wodurch der Rechenaufwand für eine

hinreichend genaue und verlässliche Schätzung ein verträgliches Ausmaß annimmt. Für die Bestimmung von α wurde ein Verfahren vorgeschlagen [11], in dem die erste Ableitung der Grenzzustandsfunktion nach den zufallsbehafteten Parametern numerisch genähert wird. Durch Anwendung der MCS für die Schätzung der Korrelationen zwischen den Parametern und den Antwortgrößen kann die numerische Ableitung hauptsächlich für jene Parameter durchgeführt werden, die einen maßgeblichen Einfluss auf die Grenzzustandsfunktion haben.

2.4.2.3. Subset Simulation

Ebenfalls jüngeren Ursprungs ist das Subset Simulation Verfahren [12], bei dem mit Hilfe von Markov-Ketten schrittweise in versagensnahe Bereiche des Parameterraums vorgedrungen wird. Das Hauptmerkmal der Methode liegt darin, dass die im allgemeinen sehr kleine Versagenswahrscheinlichkeit als Produkt mehrerer bedingter und daher größerer Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt wird,

$$(15) p_F^{SS} = P[F_1] \prod_i P[F_{i+1}|F_i]$$

Die Untermengen $\{F_i\}_{i=1}^{L_{SS}}$ bilden eine Schachtelung um den eigentlichen Versagensbereich, $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F$. Im Sinne einer effizienten Abschätzung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P[F_{i+1}|F_i]$ mittels MCS ist es vorteilhaft, dass möglichst viele der erzeugten Stichproben von vorneherein der jeweiligen Untermenge F_i angehören. Wie in [12] gezeigt, gelingt dies mit einem Verfahren nach Metropolis-Hastings. In Bild 4 ist die Arbeitsweise von Subset Simulation schematisch dargestellt. In der tatsächlichen Implementierung ist die Anzahl der Markov-Ketten um einiges größer als zwei.

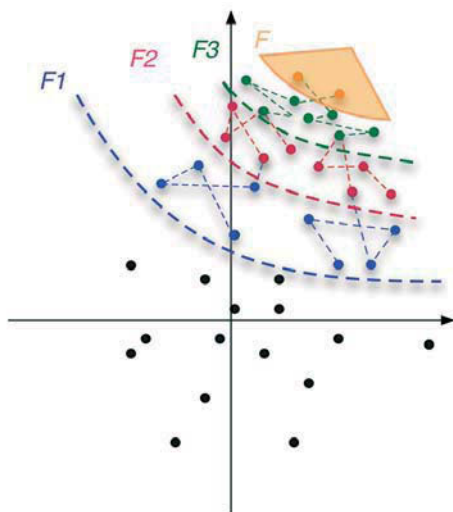


BILD 4. Subset Simulation [12]

Eine wichtige Einflussgröße des Verfahrens ist die grundsätzlich frei wählbare betragsmäßige Größe der bedingten Wahrscheinlichkeiten. Hier wurde in der Literatur bisher vorwiegend ein Wert von 10% verwendet.

3. RECHENTECHNISCHE UMSETZUNG

3.1. Spezielle Anforderungen an Software für Unsicherheitsanalyse

Die Verfügbarkeit von Programmsystemen ist eine notwendige Bedingung für die Akzeptanz und Verbreitung von mathematischen Methoden im Ingenieurwesen. Diesbezüglich denke man an die FE Analyse, deren Siegeszug untrennbar mit der Entwicklung entsprechender Softwareumgebungen verbunden ist.

Im Falle der stochastischen Strukturmechanik schritt die Entwicklung von Programmsystemen vergleichsweise langsam voran. Der Stand der Entwicklungen wurde vor kurzem in einem Sonderheft [13] erfasst. Der Rückstand im Vergleich zur industrieübergreifenden Software-Technologie für FE Analyse mag zu einem guten Teil mit den speziellen Anforderungen an Programmsysteme für stochastische Strukturmechanik zusammenhängen. Die wichtigsten der damit verbundenen Herausforderungen werden in der Folge behandelt.

3.1.1. Koppelung mit FE Programmen

Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, baut die stochastische Strukturmechanik auf deterministischen FE Modellen auf. Die Vorteile des Zugriffs auf bereits hoch entwickelte, bestehende FE Programme liegen auf der Hand. Daraus ergibt sich der Bedarf der *Koppelung* des Programmsystems für die Unsicherheitsanalyse mit bestehenden FE Programmen. Die unterschiedlichen Formen der Koppelung können grob in drei Kategorien eingeteilt werden:

- *Einheitliches (monolithisches) Programmsystem:* in diesem Fall bilden die Programmteile für die FE Analyse und für die Unsicherheitsanalyse eine untrennbare Einheit. Infolgedessen ist bei der Umsetzung der Unsicherheitsanalyse ein vollständiger Zugriff auf die Datenstrukturen des FE Programms möglich. Uneingeschränkt ist daher auch die Auswahl der Methoden der stochastischen Strukturmechanik, insbesondere der SFEM. Allerdings ist diese Form der Koppelung äußerst selten, da die Realisierung tiefgreifendes Fachwissen auf zwei recht unterschiedlichen Gebieten erfordert.
- *Aufbau nach Baukastenprinzip ohne Eingriff in FE Analyse („Black box“):* diese Form der Koppelung liegt vor, wenn die Unsicherheitsanalyse in einem eigenständigen Programm umgesetzt wird und auf ein FE Programm lediglich im Sinne einer „Black box“ zugreift. Die beiden Bausteine, Unsicherheitsanalyse und FE Analyse, sind also strikt getrennt. Ferner erfolgt der Aufruf des FE Programms ohne Sicht oder Eingriff auf die im Zuge der FE Analyse erfolgenden Berechnungen bzw. die dabei generierten Daten. Die Schnittstelle mit dem FE Programm bilden dessen Eingabedateien.

Mit dieser Form der Koppelung kann nur ein Teil der bestehenden Methoden für die stochastische Strukturanalyse umgesetzt werden; mit Bezug auf Abschnitt 2.3 handelt es sich dabei vorwiegend um

die Monte Carlo Methoden.

Der Vorteil dieser Art der Koppelung liegt im relativ geringen Programmieraufwand und in der einfachen Übertragbarkeit auf unterschiedliche FE Programme.

- **Aufbau nach Baukastenprinzip mit Eingriff in FE Analyse („intrusive Koppelung“):**
auch bei dieser dritten Art der Koppelung ist der für die Unsicherheitsanalyse zuständige Teil des Programmsystems eigenständig. Im Gegensatz zur „Black box“ Koppelung erfolgt hier ein *Eingriff in den normalen Ablauf der FE Analyse*, insbesondere die Ausgabe von Systemmatrizen, bzw. der Zugriff darauf. Diese Form der Koppelung ermöglicht grundsätzlich auch die Umsetzung von Methoden, die auf einer genäherten Darstellung der Antwort fußen. Welche Methoden tatsächlich realisiert werden können, hängt vom Umfang ab, in dem das jeweilige FE Programm Veränderungen des Berechnungsablaufs bzw. den Zugriff auf benötigte Daten zulässt. Hierzu sind entsprechende Schnittstellen (API) bzw. integrierte Programmierungsumgebungen erforderlich.

Aus der Sicht der stochastischen Strukturanalyse ist nicht nur die Koppelung mit dem FE-Programmkern wünschenswert, sondern auch mit Programmteilen, in denen die Vorlauf- und Nachlaufphase der FE Berechnung stattfindet („Prä- bzw. Postprozessor“). Dies beinhaltet insbesondere die Erstellung und bildliche Darstellung des FE-Modells sowie der Ergebnisse. Diese Koppelung ist für die stochastische Modellierung, z.B. von Zufallsfeldern, bedeutend, da die hierfür erforderlichen geometriebezogenen Daten in den Eingabedateien des FE-Programmkerns meist nicht in verwertbarer Form vorliegen. Außerdem kann durch die Herstellung der Koppelung zwischen FE-Präprozessor und dem für die Unsicherheitsanalyse zuständigen Baustein die Benutzerfreundlichkeit erheblich gesteigert werden.

3.1.2. Skalierbarkeit der Algorithmen

Die FE Modellierung von Industrieanwendungen führt im Allgemeinen zu komplexen Modellen mit einer großen Anzahl an zufallsbehafteten Parametern. Die entsprechende Lösung des Modells liefert, je nach Aufgabenstellung und physikalischem Hintergrund, Systemgleichungen unterschiedlicher Art. Insbesondere können diese linear oder nicht-linear, zeitunabhängig oder zeitabhängig sein. Diese Tatsache, dass die Systemgleichungen unterschiedlicher Art sein können, spielt für die Umsetzung der stochastischen Strukturanalyse eine wichtige Rolle, weil dadurch die verwendeten Methoden in unterschiedlichen Zusammenhängen zum Einsatz kommen. Eigenschaften wie Robustheit und Skalierbarkeit gewinnen dadurch an Bedeutung.

Hinsichtlich *Robustheit* ist zu berücksichtigen, dass zahlreiche Methoden der stochastischen Strukturmechanik lediglich für kleine Streuungen oder ausschließlich bei gewissen Modellannahmen (z.B. Gauss-Verteilung) hinreichende Genauigkeit liefern. Mit *Skalierbarkeit* ist die Anwendbarkeit auf komplexe FE Modelle mit einer großen Anzahl an streuenden Parametern (*Dimensionalität*) gemeint. Auch diese Anforderung erfüllen zahlreiche Methoden in unzureichendem Ausmaß, da der

Rechenaufwand exponentiell mit der Dimensionalität zunimmt.

MCS weist ein vergleichsweise hohes Maß an Robustheit und Skalierbarkeit auf, da die Effizienz weitgehend von der Dimensionalität des stochastischen Modells entkoppelt ist. Ein weiterer erheblicher Vorteil liegt in der allgemeinen Anwendbarkeit; tatsächlich kann MCS immer dann verwendet werden, wenn das zugrundeliegende deterministische Problem gelöst werden kann.

3.1.3. Parallele Ausführung

Obwohl effiziente Algorithmen der Unsicherheitsanalyse den Rechenaufwand beträchtlich reduzieren können, überschreitet dieser den Aufwand einer deterministischen Analyse um ein Vielfaches. Dies ist in Bild 5 für den Fall der MCS schematisch dargestellt, jedoch trifft der erhebliche Zuwachs des Rechenaufwandes ganz allgemein zu.

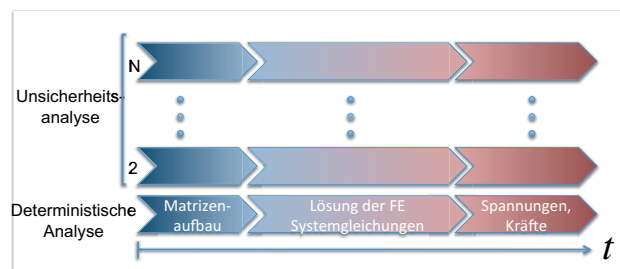


BILD 5. Rechenaufwand für deterministische bzw. stochastische Strukturanalyse

Da die Verfügbarkeit paralleler Rechenumgebungen mittlerweile sehr hoch ist und sich keineswegs auf wissenschaftliche Anwendungen beschränkt, ist es naheliegend, den erhöhten Rechenaufwand durch parallele Ausführung aufzufangen. Dazu eignet sich MCS ganz besonders, da gerade der zeitaufwändigste Teil der Analyse, nämlich die stichprobenweise Auswertung der Strukturantwort durch entsprechende, wiederholte FE Analysen, unabhängig durchgeführt werden kann [14].

3.2. COSSAN (Computational Stochastic Structural Analysis)

Da die Umsetzung der in Abschnitt 2 vorgestellten Methoden im vorliegenden Beitrag mit dem Programmsystem COSSAN-X [15] erfolgte, wird dieses in der Folge kurz vorgestellt. Die Kernfunktionen des Programms sind die Zuverlässigkeitsanalyse (insbesondere für hochdimensionale Probleme), Stochastische Finite Elemente Analyse, Robustheits- und Sensitivitätsanalyse und zuverlässigkeitsorientierte Optimierung.

3.2.1. Betriebsarten hinsichtlich Koppelung mit FE Programmen

Wie in Abschnitt 3.1.1 erläutert, spielt die Koppelung mit FE Programmen für die Umsetzung der Unsicherheitsanalyse eine Schlüsselrolle. In COSSAN-X existieren drei Betriebsarten mit jeweils unterschiedlicher Form der Koppelung, wie in Bild 6 dargestellt.

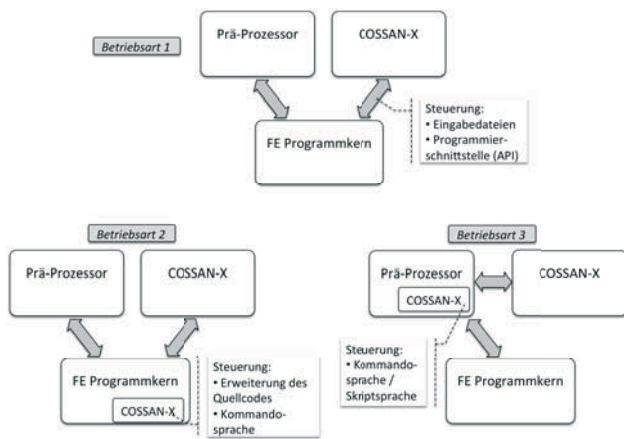


BILD 6. Betriebsarten von COSSAN-X

In der ersten Betriebsart kommunizieren COSSAN-X und der jeweilige FE Programmkernel lediglich über die FE-Eingabedateien; dabei erfolgen keine Eingriffe in den Programmfluss der FE Analyse (*Black-Box* Zugriff). In dieser Betriebsart kommen daher ausschließlich Monte Carlo Methoden zum Einsatz.

Betriebsart 2 unterstützt hingegen auch Methoden, die Eingriffe in die Abfolge der FE Berechnung erfordern. Dazu kommt neben dem Programmkernel von COSSAN-X auch ein Programmteil zum Einsatz, der steuernd in den Berechnungsablauf des FE-Programmkernels eingreift und die von der SFEM benötigten Daten, wie z.B. Steifigkeitsmatrizen, bearbeitet bzw. verfügbar macht. Dieser Teil von COSSAN-X ist FE-Programm-bezogen und im Bild 6 innerhalb des Kastens des FE Programmkernel dargestellt. Bisher wurde dieser programmspezifische Teil für die kommerzielle FE-Software MSC.Nastran in COSSAN-X verwirklicht. Entsprechende Ausführungen für Abaqus, Ansys und weitere FE-Programme sind derzeit in Vorbereitung.

Die dritte in Bild 6 dargestellte Betriebsart beinhaltet die Koppelung mit einem Prä-Prozessor. Dadurch wird u.a. die Modellierung von Zufallsfeldern ermöglicht. Dieser Programmteil wurde bisher für den Prä-Prozessor MSC.Patran entwickelt.

3.2.2. Matlab-gestützter Programmkernel

Der Kern des Programmsystems COSSAN-X besteht in einer in Matlab [16] entwickelten Sammlung von Klassen, mit der eine Reihe von Algorithmen für die stochastische Strukturanalyse umgesetzt wurde. Der objektorientierte Programmkernel greift auf den umfangreichen Bestand an numerischen, statistischen und graphischen Funktionalitäten von Matlab zu.

Die Ausführung von COSSAN-X kann sowohl über die Matlab-Befehlszeile als auch über eine eigenständige graphische Benutzeroberfläche erfolgen. Im ersten Fall besteht die Möglichkeit, mit den Objekten von COSSAN-X benutzerdefinierte Berechnungsabfolgen in Form von Matlab-Skripten aufzustellen. Dadurch wird z.B. die Integration der stochastischen Strukturanalyse in die Abläufe der virtuellen Produktentwicklung erleichtert.

COSSAN-X unterstützt auch die parallele Ausführung der im Zuge der Unsicherheitsanalyse anfallenden FE-Rechnungen. Für diese Programmfunktion gibt es eine eigens dafür entwickelte Klasse, die die Schnittstelle zum jeweils verwendeten Auftragsverwaltungssystem (z.B. Grid Engine) bildet.

4. ANWENDUNGSBEISPIELE

4.1. INTEGRAL Satellit

In der Folge wird die Anwendung einiger der vorgestellten Berechnungsmethoden für das FE Modell des in Bild 7 dargestellten INTEGRAL-Satelliten (ESA) [17,18] gezeigt. Dazu wurde das im vorigen Abschnitt vorgestellte Programmsystem COSSAN-X verwendet.

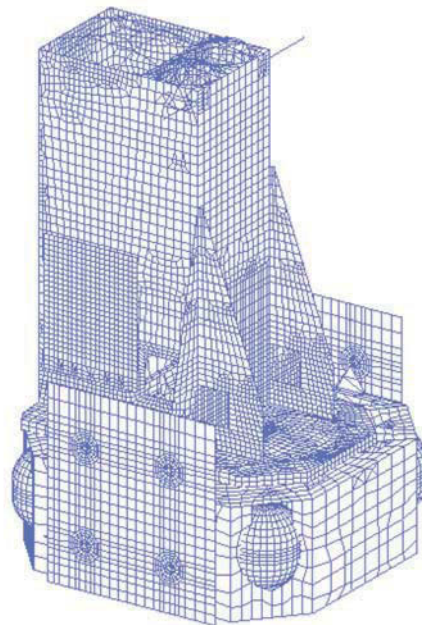


BILD 7. INTEGRAL Satellit [17,18]

4.1.1. Modellbeschreibung

Das FE-Modell des Satelliten weist insgesamt ca. 118.000 Freiheitsgrade auf. Die ringförmige Lagerung befindet sich an der Unterseite des sog. *Service Module*, der u.a. auch die beiden Sonnensegel und die vier Treibstoffbehälter einschließt. Die vom Satelliten beförderten Instrumente wurden in reduzierter Form (Craig-Bampton bzw. Guyan Reduzierung) modelliert.

Im Gegensatz zur vielfach angewendeten Vorgehensweise der Beschränkung der Anzahl der zufallsbehafteten Modellparameter wurde in diesem Fallbeispiel die Einbeziehung der Unsicherheiten in

möglichst vielen Parametern angestrebt. Dies wird durch die Verwendung robuster Methoden für die Unsicherheitsanalyse ermöglicht, wie sie in Abschnitt 2 vorgestellt wurden. Die getroffenen Annahmen sind in Tabelle 1 zusammengefasst und stützen sich auf Angaben im Schrifttum [19].

Die Annahmen wurden systematisch auf alle Elementdefinitionen des Modells angewendet; dies führte zu einer Gesamtzahl von 1.319 zufallsbehafteten Parametern. Da keine ausreichenden statistischen Daten vorlagen, aus denen signifikante Korrelationen zwischen diesen zufallsbehafteten Parametern hervorgehen würden, wurden diese jeweils als statistisch unabhängig angenommen. Aus demselben Grund wurde bei der Modellierung der Streuungen auf die Verwendung von Zufallsfeldern verzichtet, obwohl diese – wie im zweiten Fallbeispiel gezeigt – durchaus bedeutenden Einfluss auf die Streuungen der Antwortgrößen haben können.

Elementtyp/Material	Parameter	VK	Verteilung
Elemente mit isotropen Materialeigenschaften	E-Modul	8%	Gauss (gekappt)
	Querdehnungszahl	3%	
	Gleitmodul	12%	
	Massendichte	4%	
Orthotrope Schalelemente	E-Modul	8%	
	Querdehnungszahl	3%	
	Gleitmodul	12%	
	Massendichte	4%	
Anisotrope 3-D Elemente	Materialmatrix	12%	
	Massendichte	4%	
Balkenelemente	Querschnitts-abmessungen	5%	
	Nichttragende Massenanteile	8%	
	Massenanteile	8%	
Elemente mit Verbundwerkstoff-eigenschaften	Nichttragende Massenanteile	8%	
	Dicke der Gewebelagen	12%	
	Richtungswinkel der Fasern	1.5°	
	Massenanteile	8%	
Schalelemente	Schalendicke	4%	
	Nichttragende Massenanteile	8%	
Federelemente	Federsteifigkeit	10%	
Punktmassen	Masse	3%	
Dämpfung	Modale Dämpfung	20%	Log-normal

TAB 1. Annahmen hinsichtlich der Unsicherheiten in den Modellparametern

4.1.1.1. Zuverlässigkeitsanalyse – Statischer Lastfall

Der Bemessung des Satelliten liegen u.a. die Ergebnisse einer statischen Analyse zugrunde. Die Belastung besteht dabei in einer konstanten Beschleunigung von 6g in vertikaler Richtung und 1g in horizontaler Richtung. Dieser Lastfall wurde zum Gegenstand der hier gezeigten Zuverlässigkeitsanalyse gemacht. Als maßgebende Antwortgröße wurde die Querkraft F_{Shear} im Verbindungsstab zwischen der Hauptstruktur und den Sonnensegeln betrachtet, da dieser Bauteil besonders stark beansprucht wird. Die Grenzzustandsfunktion hat dann die Form,

$$(16) \quad g = F_{\text{Shear,LS}} - F_{\text{Shear}}$$

Die entsprechende Versagenswahrscheinlichkeit wurde für unterschiedliche Grenzwerte $F_{\text{Shear,LS}}$ bestimmt. Die Ergebnisse sind in Bild 9 dargestellt. Daraus geht eine sehr gute Übereinstimmung der fortgeschrittenen Monte Carlo Methoden Line Sampling und Subset Simulation hervor. Im Bereich der Versagenswahrscheinlichkeit bis 10^{-2} stimmen diese Methoden außerdem sehr gut mit der direkten MCS überein; bei kleineren Versagenswahrscheinlichkeiten ist dieser Vergleich nicht mehr durchführbar, da für die direkte MCS die erforderliche Stichprobenanzahl zu hoch wäre. Für die Subset Simulation Methode wurden zwei Läufe mit jeweils unterschiedlichen Anfangswerten der Zufallszahlenkette durchgeführt; diese führen, wie im Bild erkennbar, zu unterschiedlichen Ergebnissen.

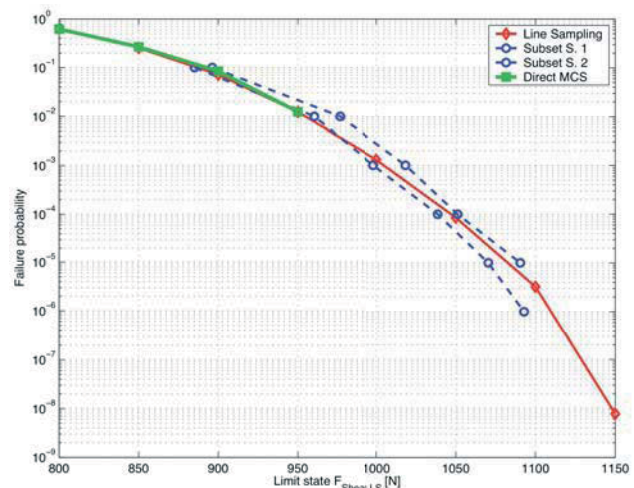


BILD 8. INTEGRAL Satellit – Versagenswahrscheinlichkeit bei statischer Belastung

Der entscheidende Vorteil der varianzmindernden MCS geht aus Bild 9 hervor. Für eine vergleichbare Genauigkeit ist der Rechenaufwand dieser Methoden (Line Sampling und Subset Simulation) um etwa vier Größenordnungen geringer, im Vergleich zur direkten MCS.

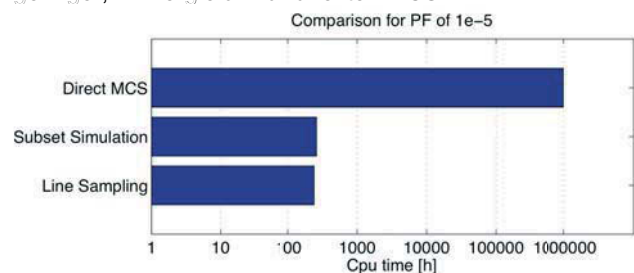


BILD 9. Vergleich des Rechenaufwands für die Zuverlässigkeitsanalyse – statische Belastung

4.1.1.2. Zuverlässigkeitsanalyse – Dynamischer Lastfall

Auch die Zuverlässigkeit im Falle dynamischer Belastungen wurde untersucht, und zwar für die Frequenzantwort, d.h. für die Amplitude bei harmonischer

Fußpunkterregung. Die maßgebende Antwortgröße war in diesem Fall die Beschleunigung am Anschlusspunkt des Auslegers für den Sonnensensor (SAS-boom). Die Grenzzustandsfunktion lautet wie folgt

$$(17) g = a_{LS} - \max_{f \in [45,70] \text{ Hz}} a(f)$$

d.h. Versagen tritt ein, wenn die Frequenzantwort im Bereich zwischen 45 und 70 Hz den Grenzwert a_{LS} überschreitet. Der erste sowie der letzte Schritt der Subset Simulation sind in Bild 10 dargestellt. Mit Bezug auf Bild 4 entsprechen die Stichproben der Frequenzantwort im oberen Bildteil dem ersten Stichprobensatz, der noch vorwiegend um den Ursprung angeordnet ist. Der untere Bildteil zeigt hingegen jene Stichproben, die dem letzten Schritt der Subset Simulation entsprechen; von diesen liegen bereits einige im Versagensbereich (in Bild 4 schattiert). Wie aus Bild 10 ersichtlich, werden also mittels Subset Simulation Stichproben gefunden, die zu stark überhöhten Antworten und daher möglicherweise zu Versagen führen.

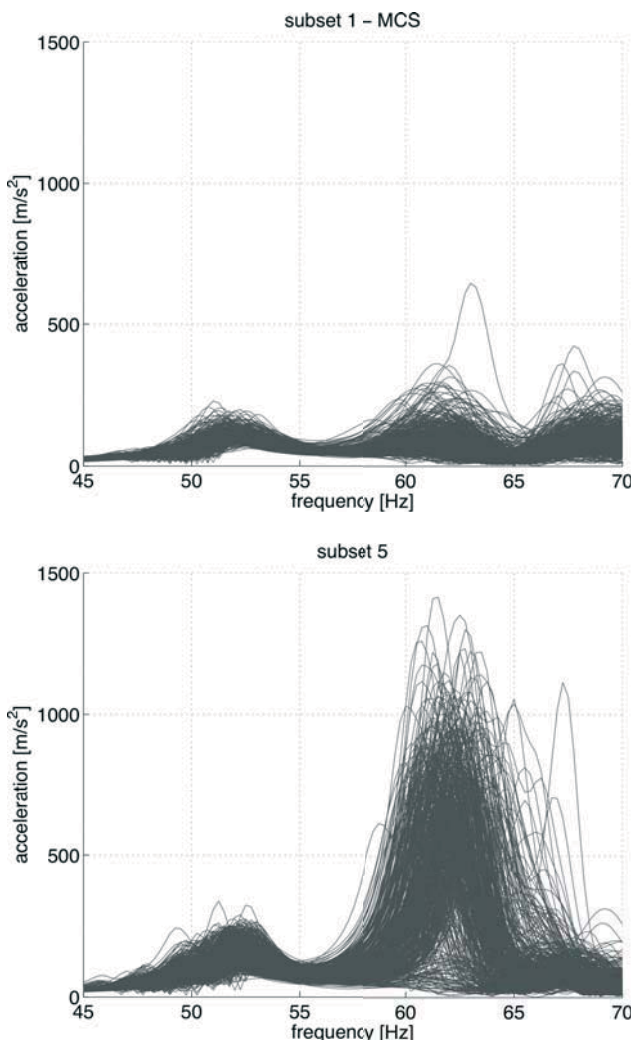


BILD 10. INTEGRAL Satellit – dynamische Analyse mit Subset Simulation

Auch hier geht mit der Verwendung varianzmindernder MCS eine erhebliche Verringerung der Rechenzeit einher, wie in Bild 11 verdeutlicht.

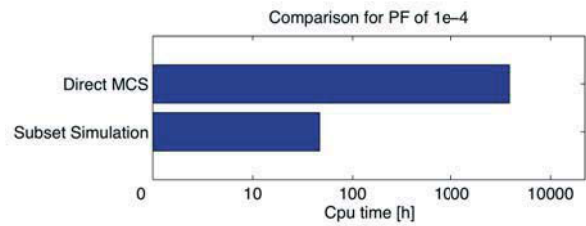


BILD 11. Vergleich des Rechenaufwands für die Zuverlässigkeitsanalyse - dynamische Belastung

4.2. Turbinenblatt

Das zweite Fallbeispiel besteht in der in Bild 12 gezeigten Turbinenblatt [18]. Die Belastung ist hier durch die Fliehkräfte bei einer Umdrehungsgeschwindigkeit von 12.200 U/min gegeben.

In diesem Beispiel wurde auch die räumliche Verteilung der zufälligen Streuungen modelliert, und zwar wurde der Elastizitätsmodul als Zufallsfeld behandelt. Die verwendete Kovarianzfunktion lautet

$$(18) R_{EE}(x, y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\|x - y\|}{b}\right)$$

worin b die sog. Korrelationslänge darstellt. Bild 12 zeigt die räumliche Verteilung des E-Moduls für zwei unterschiedliche Werte der Korrelationslänge. Eindeutig sind die räumlichen Schwankungen des E-Moduls im Falle der geringeren Korrelationslänge (links) größer.

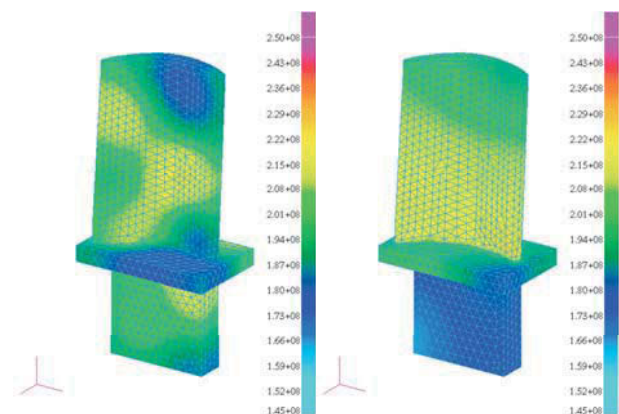


BILD 12. Turbinenblatt – räumlich zufällige Verteilung des E-Moduls; links: Korrelationslänge 8 mm, rechts: 100 mm

Der Einfluss der räumlichen Schwankungen auf die Streuungen der maßgebenden Antwortgrößen geht aus Bild 13 hervor. Darin ist die räumliche Verteilung des Variationskoeffizienten der Vergleichsspannung (von Mises) dargestellt. Im rechten Bildteil wurde angenommen, dass der E-Modul zwar zufallsbehaftet ist, jedoch über die gesamte Turbinenblatt denselben (zufälligen) Wert annimmt. Im Gegensatz dazu liegt den Ergebnissen im rechten Bildteil eine Zufallsfeldmodellierung des E-Moduls zugrunde. Wie aus

dem Bild ersichtlich, sind die Streuungen der Vergleichsspannung im zweiten Fall um ein Vielfaches größer. Insbesondere ist dieser Unterschied im unteren Teil der Schaufel besonders bedeutend, d.h. an der Stelle an der die auftretenden Spannungen besonders groß sind. Dieser Unterschied ist darauf zurückzuführen, dass es bei einer räumlich schwankenden Steifigkeit zu beträchtlichen Spannungsumlagerungen kommt.

Dieses Beispiel soll verdeutlichen, dass die Berücksichtigung der räumlichen Schwankung der Streuungen unter Umständen eine verbesserte Erfassung des Einflusses der Streuungen auf die maßgebenden Antwortgrößen ermöglicht.

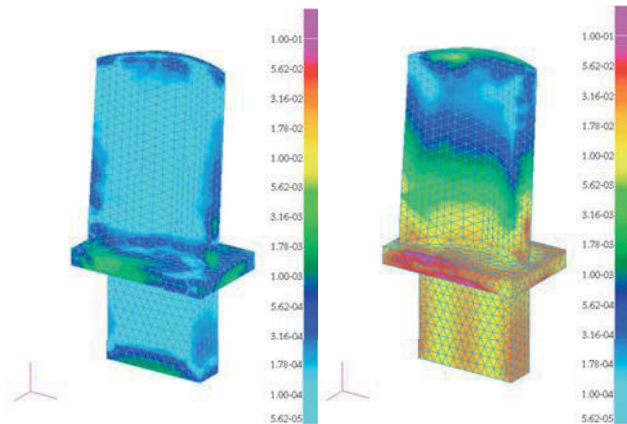


BILD 13. Turbinenblatt – räumliche Verteilung des Variationskoeffizienten der Vergleichsspannung; links: keine räumliche Schwankung des E-Moduls; rechts: E-Modul als Zufallsfeld modelliert ($b=8\text{ mm}$)

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Dieser Beitrag behandelt die Analyse der Unsicherheiten, die im Zusammenhang mit der FE Modellierung komplexer Tragwerke in Luft- und Raumfahrt – ebenso wie im Maschinenbau und im Bauingenieurwesen – unvermeidbar sind. Aufgrund ihrer Robustheit und Skalierbarkeit bilden Monte Carlo Methoden ein besonders wirkungsvolles Werkzeug für die Unsicherheitsanalyse von Raumfahrtstrukturen. Die rechentechnische Umsetzung wurde anhand des Programmsystems COSSAN-X vorgestellt. Dabei stand die Koppelung der unterschiedlichen Teile des Programmsystems im Vordergrund. Durch die Verwendung der gezeigten Methoden für die zahlenmäßige Erfassung der Unsicherheiten und der Zuverlässigkeit, wird der Wert von FE Modellen innerhalb des Bemessungsprozesses erheblich gesteigert. Insbesondere bieten diese eine Alternative zur Behandlung der Unsicherheiten durch sog. Sicherheitsfaktoren, bei denen das verbleibende Versagensrisiko nicht zahlenmäßig erfasst wird. Die vorgestellten Beispiele bestätigen, dass effiziente Methoden der Unsicherheitsanalyse den Rechenaufwand um Größenordnungen vermindern können.

DANKSAGUNG

Die finanzielle Unterstützung durch den *Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung* in

Österreich, im Rahmen des Projektes *L269-N13*, wird dankend anerkannt.

SCHRIFTTUM

- [1] C.A.Schenk, G.I.Schuëller, Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2005.
- [2] G.I.Schuëller, A.Calvi, M.F.Pellisetti, H.J.Pradlwarter, S.H.J.A.Fransen, A.Kreis, Uncertainty Analysis of a Large-Scale Satellite Finite Element Model, Journal of Spacecraft and Rockets, 46 (1), 2009, 191-202.
- [3] B.Möller, M. Beer, Fuzzy-randomness - uncertainty in civil engineering and computational mechanics. Springer-Verlag, 2004
- [4] M.Kleiber, T.D.Hien. The stochastic finite element method: basic perturbation technique and computer implementation. John Wiley & Sons Ltd., 1992.
- [5] F.Yamazaki, M.Shinozuka, G.Dasgupta, Neumann expansion for stochastic finite element analysis, J. Engrg. Mech. 114, 1998, 1335–1355.
- [6] R.Ghanem, P.Spanos, Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Springer-Verlag, 1991.
- [7] P.B.Nair, A.J.Keane. Stochastic reduced basis methods. AIAA, 40(8), 2002, 1653–1664.
- [8] O.Ditlevsen, H.O.Madsen. Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [9] G.I.Schuëller, H.J.Pradlwarter, P.S.Koutsourelakis. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions. Probabilistic Engineering Mechanics, 19(4), 2004, 463–474.
- [10] Y.-T.Wu, T.A.Cruse, Advanced Probabilistic Structural Analysis Method for Implicit Performance Functions, AIAA Journal, 28(9), 1990, 1663-1669.
- [11] H.J.Pradlwarter, Relative importance of uncertain structural parameters, part I: Algorithm. Computational Mechanics, 40(4), 2007, 627–635.
- [12] S.-K.Au, J.L.Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. Probabilistic Engineering Mechanics, 16(4), 2001, 263–277.
- [13] G.I.Schuëller (Ed.). Structural reliability software. Structural Safety - Special Issue, 28(1–2), 2006, 1–216.
- [14] M.F.Pellisetti, Parallel processing in structural reliability, International Journal of Structural Engineering and Mechanics, 2009, im Druck.
- [15] COSSAN-X, Version 811, Institute of Engineering Mechanics, University of Innsbruck, Austria, 2008.
- [16] Matlab, Version 2008a, The Mathworks, Natick, MA, USA, 2008.
- [17] M.Notarnicola, A.Paron, L.Tizzani, E.Evans, Integral - structural mathematical model description and dynamic analysis results, Tech. Rep. INT-TN-AI-0089, Issue 2, Alenia Aerospazio Space Division, Turin, Italy, 1998.
- [18] M.F.Pellisetti, G.I.Schuëller, Scalable uncertainty and reliability analysis by integration of advanced Monte Carlo simulation and generic finite element solvers. Computers & Structures, 2009, im Druck.
- [19] M.Klein, G.Schuëller, P.Deymarie, M.Macke, P.Courrian, R.S.Capitanio, Probabilistic approach to structural factors of safety in aerospace, in: Proceedings of the International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing, Cépadués-Éditions, Paris, France, 1994, 679 – 693.