

ZUM BÖENPROBLEM: EIN ANSATZ ÜBER INTERFERENZ

W. Send

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR)

Institut für Aeroelastik, D-37073 Göttingen

Zusammenfassung

Die Schlagschwingung eines vorangehenden Profils dient als Böengenerator für ein nachfolgendes Profil, dessen Belastung als Folge der auftreffenden Wirbel analysiert wird. Als Strömungslöser dient der DLR Tau-Code mit einem einfachen Turbulenzmodell. Für die voranstehende Anordnung sind die Luftkräfte des zweiten Profils bei zwei Machzahlen über eine Schwingungsperiode hinweg mit Hilfe der Fourieranalyse untersucht worden und ergeben den Verlauf der Belastung der Tragfläche im Zeit- und Frequenzbereich. Das Modellproblem eignet sich auch für eine eingehendere Untersuchung und Beschreibung der Genauigkeit, die für instationäre Umströmungen unter Verwendung differenzieller Lösungsverfahren erzielt werden kann.

1. EINLEITUNG

Die Wechselwirkung einer Flugzeugstruktur mit der umgebenden Strömung in der Folge einer Bö ist für die Aeroelastik in zweierlei Hinsicht Gegenstand der Untersuchung. Eine Störung in der Anströmung führt stets zu Schwingungen, deren Dämpfung mit zunehmender Fluggeschwindigkeit bekanntlich abnimmt und jenseits einer kritischen Grenze, der so genannten Flattergeschwindigkeit, angefacht wird. Im normalen Flugbereich weit unterhalb dieser Grenze sollte ein großes Transportflugzeug mit einer Umverteilung der Belastung an den Tragflächen reagieren, wenn die Bö rechtzeitig geortet wird. Solche Steuerungsmaßnahmen dienen nicht nur

dem Komfort der Passagiere, sondern auch der Minderung insbesondere des Wurzelbiegemomentes der Tragflächen zur Entlastung der zentralen Strukturen.

Die physikalischen Vorgänge beim Auftreffen einer Wechsellauf auf eine Tragfläche sind bislang vorzugsweise experimentell untersucht worden. Diesem Zweck dienen Böengeneratoren. Eine solche Versuchseinrichtung wurde erstmalig bereits nach 1920 von R. Katzmayr eingesetzt zur Untersuchung des Einfluss einer gewellten Strömung [1]. Einem ähnlichen Zweck diente das Experiment von H.G. Küssner, der eine ebene Platte in den Freistrahl eines Windkanals fallen ließ [2]. Am DLR-

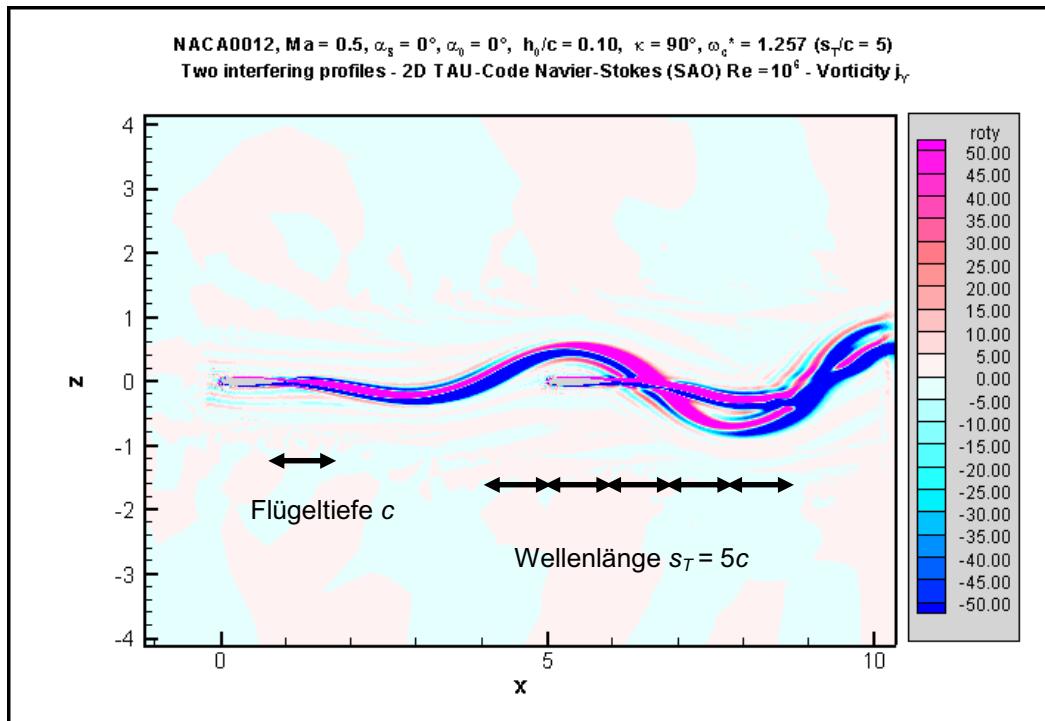


BILD 1. Konfiguration der beiden schwingenden Profile mit der Wirbeldichte im Nachlauf und der physikalischen Deutung der reduzierten Frequenz in Gleichung (1).

Institut für Aeroelastik wurde Anfang der 1980-er Jahre ein Böengenerator für den dortigen Niedergeschwindigkeitswindkanal gebaut [3]. Einen Überblick über die Forschungsziele und Fragestellungen bei der Erzeugung von 2D Böenfeldern gibt die Arbeit von R. Krag und W. Wegner [4] in einem AGARD Bericht von 1985 mit weiteren Zitaten.

Arbeiten jüngeren Datums befassen sich vermehrt mit dem eigentlichen Nachlauf und dort experimentell wie mit numerischen Verfahren mit der Wirbelschleife hinter großen Transportflugzeugen. Beeindruckende Ergebnisse im Rahmen des EU-Forschungsprojekts AWIATOR zeigt die darüber berichtende Arbeit von A.C. de Bruin und G. Schrauf [5], die stellvertretend für zahlreiche weitere Arbeiten mit dem Schwerpunkt Wirbelschleife genannt sei. Schließlich ist die Wechselwirkung einer Wirbelschleife mit nachfolgenden oder kreuzenden Flugzeugen beim Landeanflug wegen ihres Gefahrenpotenzials von technischer Bedeutung.

Moderne Verfahren für die numerische Lösung von Umströmungsproblemen gestatten eine detaillierte Analyse der Wechselwirkung zwischen einer Bö und einer Tragfläche. Die vorliegende Arbeit ist ein Einstieg in die Untersuchung nicht nur der Strömungsvorgänge, sondern auch der resultierenden Luftkräfte in der Folge einer solchen Wechsellauf. Die einstweilen begrenzte Aussagekraft im Hinblick auf die eigentliche Frage des Auftreffens einer Bö auf eine gleichförmig bewegte Tragfläche liegt in der Vereinfachung der Kinematik der untersuchten Konfiguration. Um nicht gleich zu Beginn der Untersuchung gegeneinander bewegte Netze verwenden zu müssen, bewegen sich beide Profile in einer Starrkörperbewegung vertikal zur Strömung. Im Vordergrund der vorliegenden Arbeit stehen die Beschreibung des numerischen Verfahrens, der zeitliche Verlauf der Lösung und die Bewertung der Parameter für die Beschaffung der Lösungen hinsichtlich der physikalischen Güte der Ergebnisse.

2. LÖSUNGSVERFAHREN UND KINEMATIK

Als Strömungslöser wird der DLR Tau-Code [6] verwendet, der verschiedene Lösungsverfahren anbietet. Die wesentlichen Merkmale des gewählten Verfahrens sind:

- Zentrale Differenzen für die Diskretisierung der Flüsse der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS),
- *Dual time-stepping* mit einer wählbaren Zahl von inneren Iterationen zwischen zwei physikalischen Zeitschritten,
- *Multi-grid* Verfahren mit der Auflösung des Netzes in 5 Ebenen der Feinheit und
- *Backward Euler* Relaxation bei der impliziten Zeitintegration mit LU Zerlegung (symmetrisch Gauß-Seidel – LUSGS).

Als Turbulenzmodell der turbulenten Strömung ist das Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras mit einer Modifikation nach Edwards (SAE) gewählt.

Die kinematischen Daten lauten:

- Synchrone Schlagschwingung beider Profile mit der Amplitude: $h_0/c = 0.1$ (c Flügeltiefe). Bö erzeugt über eine Starrkörperbewegung.
- Machzahl Ma : 0.5 und 0.75
- Reynoldszahl $Re = 10^6$ für $Ma = 0.5$ und $Re = 10^7$ für $Ma = 0.75$
- Reduzierte Frequenz $\omega_c^* = 1.257 (2\pi/5)$. Der Index c besagt, dass die Definition bezogen ist auf die ganze Flügeltiefe:

$$(1) \quad \omega_c^* = \frac{\omega c}{u_0} = 2\pi \cdot c / s_T$$

- Abstand d der beiden Vorderkanten: $d = 5c$
- Als Schwingfrequenz folgt $f = 33.3$ Hz für $Ma = 0.5$ und $f = 50.0$ Hz für $Ma = 0.75$
- Strouhalzahl $St = 0.02$ ($St = f h_0/u_0$)
- Turbulenzmodell SAE
- Zeitschritte: 360 pro Periode
- Innere Iterationen: 200
- Ausgewertete Daten: 5. Periode

Die Rechenzeit beträgt dabei ungefähr 12 h pro Periode mit 24 parallel berechneten Teilgebieten (*Domains*) auf sechs Servern (Intel Xeon, 3 GHz) mit je vier Pseudo-CPUs und zwei echten Prozessorkernen (*Hyper-Thread* Technologie).

Physikalisch ist die reduzierte Frequenz proportional zum Verhältnis von Flügeltiefe c zu Wellenlänge s_T der von einer schwingenden Tragfläche abfließenden Wirbeldichte (BILD 1). Sie charakterisiert dadurch das *Maß der Instationarität* des Bewegungsvorgangs. Je kürzer die Wellenlänge im Vergleich zur Flügeltiefe ist, desto ausgeprägter ist die

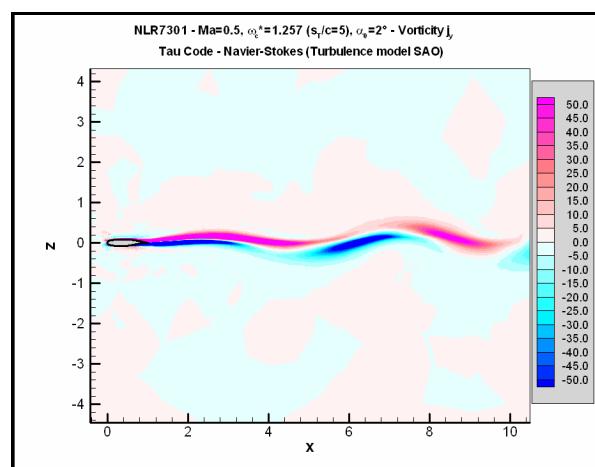


BILD 2. Nachlauf eines einzelnen Profils mit der Bildung der alternierenden Wirbelkissen positiver und negativer Wirbeldichte.

Dynamik der Bewegung. Die physikalische Schwingfrequenz f ($\omega = 2\pi f$) ändert sich dabei mit der Geschwindigkeit u_0 der Anströmung in Gleichung (1). Der Wert α^* ist so gewählt, dass sich in einem überschaubaren Raumbereich wenigstens eine volle Wellenlänge der abfließenden Wirbeldichte einstellt. Eine Trennung von positiver und negativer Wirbeldichte in einzelne Wirbelkissen stellt sich erst nach einer gewissen Lauflänge ein, wie das Beispiel des Nachlaufs hinter einem einzelnen Profil mit gleichen kinematischen Daten zeigt (BILD 2).

3. ERZEUGUNG DES RECHENNETZES

Von zentraler Bedeutung für das Ergebnis der Rechnung ist das Rechennetz, hier kurz als *taugrid* bezeichnet. Verwendet wird der Netzgenerator CENTAUR [7]. Das nachfolgend beschriebene Netz ist das Ergebnis mehrerer Studien mit kleineren Netzen, die allesamt in jeweils unterschiedlicher Ausprägung zu unbefriedigenden oder gar fehlerhaften Ergebnissen geführt haben. Diese Aussage wird nachfolgend quantifiziert.

Points (Side 1 and Side 2):	2 x 289406
triangles:	325762
quadrilaterals:	124440
boundary points:	4176
boundary edges:	4172
segment to marker:	8
boundary groups:	3
LeadingPrf (group 1)	Viscous wall
TrailingPrf (group 1)	Viscous wall
Boundary (group 2)	Farfield
Side1 (group 3)	Left side
Side2 (group 3)	Right side

TAB 1. Kenndaten des 3D Netzes.

Der DLR Tau-Code ist ein finites 3D Volumenverfahren, das auf einem unstrukturierten Netz arbeitet. Es gibt für den eigentlichen Lösungsalgorithmus eine ausführliche Schrift *Technical Documentation*, die auf Anfrage über die Bezugsquelle [6] verfügbar ist. Für den Austausch von Daten im Pre- und Postprocessing stehen zahlreiche Prozeduren zur Verfügung, die in der Programmiersprache Python geschrieben sind.

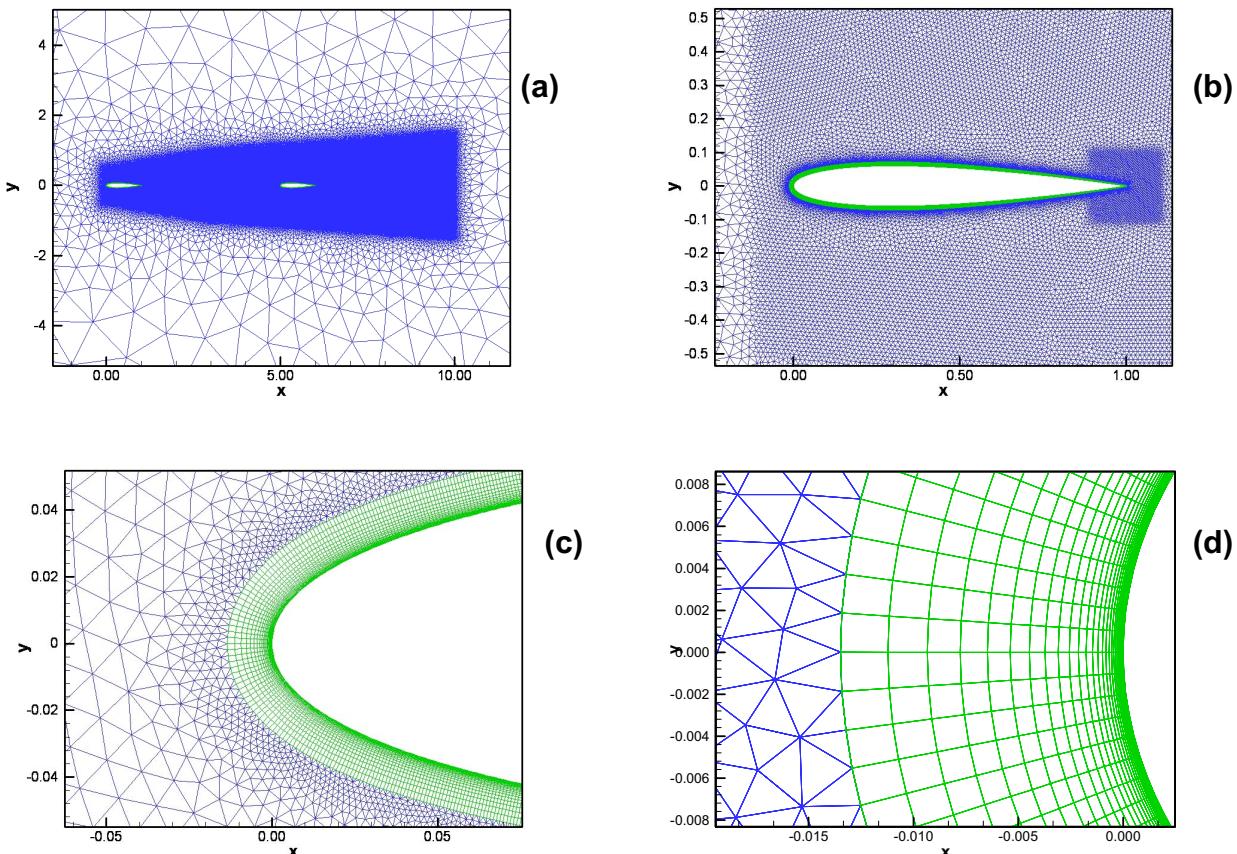


BILD 3. Verwendetes 2D Rechennetz *taugrid* für zwei Profile NACA0012, (a) gesamtes Rechengebiet, (b) Umgebung des führenden Profils mit feiner Auflösung im Bereich der Hinterkante, (c) Vorderkante mit Übergang von vierseitigen zu dreiseitigen Flächenelementen, (d) Nahbereich mit geschichteten Flächenelementen für die Auflösung der Grenzschicht (30 Schichten). 2074 Oberflächenelemente je Profil.

Wird ein 2D Strömungsproblem gelöst, so wird mit dem Netzgenerator zunächst nur ein 2D Netz (mit Koordinaten x, y) erzeugt, wie es in BILD 3 gezeigt ist. Das Netz wird durch eine Prozedur verdoppelt mit einem wählbaren Abstand zwischen den beiden Netzebenen, der gewöhnlich der Flügeltiefe entspricht. Das *taugrid* ist im 2D Fall ein 3D Rechenetz mit nur einer Zelle quer zur Anströmung. Die Daten zeigt TAB 1.

Ober- und Unterseite der Profile sowie die vier Seiten des Randes ergeben die 8 Segmente. Die vierseitigen Flächen teilen sich auf in 30 Schichten für jedes Profil, so dass die Zahl der Elemente auf dem Umfang eines Profils 2074 beträgt.

Die erste Schicht von vierseitigen Elementen hat an der Vorderkante einen Abstand h zur Wand von $h(1) = 1.16 \cdot 10^{-5}$.

Die feine Auflösung des Strömungsgebiets zwischen den Profilen ist erforderlich, um den Wirbeltransport wie die Ausbreitung von Schallwellen zu ermöglichen. Die Wirbelschleppe zeigt bei der höheren Machzahl 0.75 eine größere Dynamik. Aus diesem Grund verbreitert sich die feine Auflösung keilförmig in Strömungsrichtung.

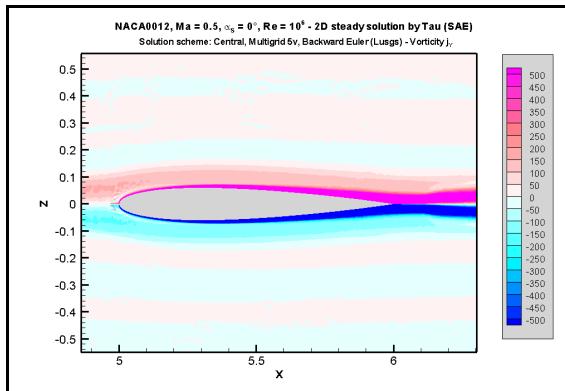


BILD 4. Stationäre Wirbeldichte des hinteren Profils mit Überlagerung vom führenden Profil, Skala x 10.

4. STATIONÄRE LÖSUNG

Die stationäre Lösung in BILD 5 zeigt, dass sich die Tragflächen hinsichtlich des Drucks im Unterschall kaum gegenseitig beeinflussen. Dargestellt sind der Druckbeiwert (cp), die Schubspannung (cf) und die Kenngröße y^+ ($yplus$). Die Daten des vorderen Profils (lp) sind farbig dargestellt mit durchgezogener Linie. Die Daten des hinteren Profils (tp) sind einfärbig und mit gestrichelter Linie. Die Größenordnung der Kenngröße y^+ ist für die Numerik der turbulenten Grenzschicht von wesentlicher Bedeutung und sollte einen Wert um 1 haben. Definiert ist die Größe durch

$$(2) \quad y^+ = \frac{h(1) \cdot u_f}{\eta / \rho}, \quad u_f = \sqrt{\sigma / \rho}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \cdot c_f$$

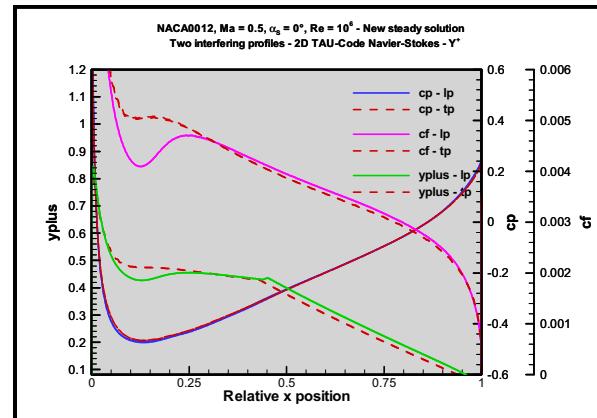


BILD 5. Stationäre Lösung im Unterschall.

Darin ist $h(1)$ der bereits erwähnte Abstand der ersten Netzlinie zur Wand, η die Zähigkeit des Fluids, ρ die Dichte und u_f die so genannte Reibungsgeschwindigkeit. σ ist die örtliche Schubspannung, gegeben durch den Reibungsbeiwert c_f .

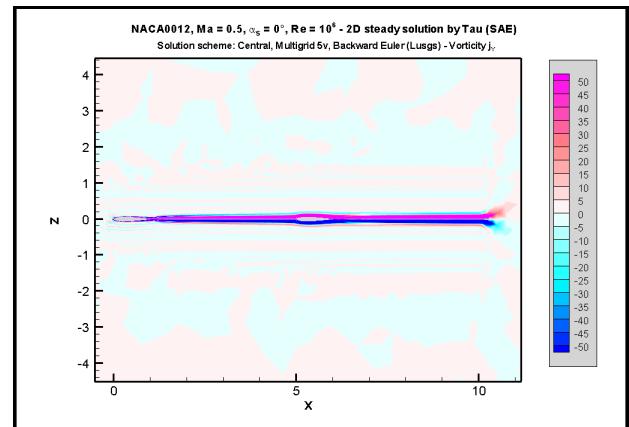


BILD 6. Stationäre Wirbeldichte beider Profile.

Die Schubspannung zeigt beim vorderen Profil eine Absenkung an der Stelle der höchsten Übergeschwindigkeit, die Folge einer geringfügigen Aufweitung der Grenzschicht sein könnte. Es finden sich aber keinerlei Hinweise in den Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes, die Aufschluss über die Ursache dieses auffälligen Merkmals geben könnten. So muss diese Frage einstweilen unaufgeklärt bleiben und der Autor ist dankbar für Hinweise in dieser Sache.

Nicht viel anders verhält sich die Wirbeldichte, die den Impulstransport in das umgebende Fluid als Folge der Haftbedingung des Fluids an der Oberfläche kennzeichnet. BILD 6 zeigt die Wirbelschleppe der beiden Profile. Die Wirbeldichte des vorderen Profils ist nach vier Flügeltiefen weit in das umgebende Fluid diffundiert und überlagert sich der Wirbeldichte des nachfolgenden Profils ohne auffällige Wechselwirkung. Am stromab liegenden Rand des hoch aufgelösten Rechengebiets zerfällt die Wirbeldichte innerhalb eines Wegs von weniger als einer Flügeltiefe.

BILD 4 zeigt das hintere Profil mit einer anderen Skala für die Wirbeldichte. Man erkennt die Aufweitung des Nachlaufs vom vorderen Profil, der sich um die neu entstehende Grenzschicht des hinteren Profil legt.

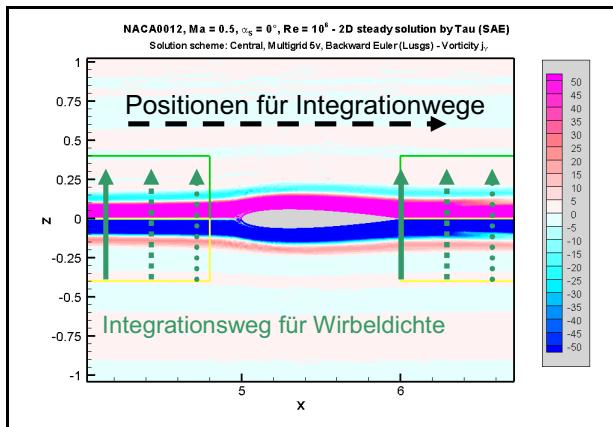


BILD 7. Überprüfung der Güte des Wirbeltransports an verschiedenen Positionen im Nachlauf der Profile. Der Integrationsweg ist bei $z = 0$ aufgeteilt in zwei Anteile für Ober- und Unterseite des Nachlaufs.

x	j.F>0	j.F<0	Sum	err	err %
1.20	24.7	-25.5	-0.724	-0.03	2.84
1.40	19.7	-19.7	0.073E-03	0.00	0.04
1.60	16.8	-16.9	-0.100	-0.01	0.59
1.80	15.5	-15.5	8.378E-03	0.00	0.05
2.00	14.2	-14.3	-0.103	-0.01	0.72
2.20	13.7	-13.6	0.160	0.01	1.17
2.40	13.1	-13.0	2.010E-02	0.00	0.15
2.60	12.5	-12.5	9.256E-03	0.00	0.07
2.80	12.1	-12.3	-0.151	-0.01	1.23
3.00	11.7	-11.8	-8.621E-02	-0.01	0.73
3.20	11.4	-11.4	2.998E-02	0.00	0.26
3.40	11.1	-11.1	1.734E-02	0.00	0.16
3.60	10.9	-10.9	8.541E-04	0.00	0.01
3.80	10.6	-10.7	-3.220E-02	0.00	0.30
4.00	10.5	-10.4	3.512E-02	0.00	0.33
4.20	10.3	-10.3	7.947E-02	0.01	0.77
4.40	10.2	-10.2	2.653E-02	0.00	0.26
4.60	10.2	-10.3	-7.212E-02	-0.01	0.70
4.80	10.6	-10.6	-2.656E-02	0.00	0.25

TAB 3. Flächenhafte Wirbeldichte auf Ober- und Unterseite Nachlauf des vorderen Profils.

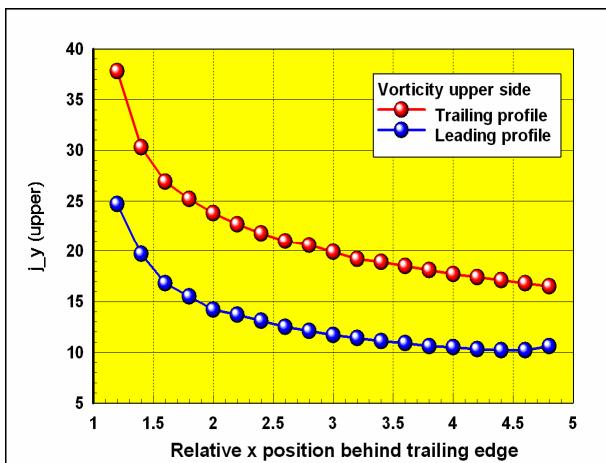
Um die Güte des Wirbeltransports zu überprüfen, wird die von Ober- und Unterseite abfließende Wirbeldichte quer zur Stromrichtung an verschiedenen Positionen x im Nachlauf integriert. Die Grenzen sind so gewählt, dass die Wirbeldichte ganz innerhalb des Integrationspfades in z -Richtung liegt, wie BILD 7 zeigt.

Das Ergebnis für den Nachlauf des vorderen Profils ist in TAB 3 dargestellt. Die Wirbeldichte selbst hat die Einheit $[j_y] = 1/m$. Das Integral längs einer Linie ergibt eine flächenhafte Wirbeldichte mit der Einheit m/s . Die Summe der flächenhaften Wirbeldichte sollte im vorliegenden Fall stets den Wert 0 ergeben, da symmetrische Bedingungen vorliegen.

x	Gma>0	Gma<0	Sum	err	err %
6.2	37.8	-37.3	0.515	0.01	1.36
6.4	30.3	-30.7	-0.364	-0.01	1.19
6.6	26.9	-27.4	-0.521	-0.02	1.90
6.8	25.2	-25.4	-0.175	-0.01	0.69
7.0	23.8	-24.0	-0.219	-0.01	0.91
7.2	22.7	-22.7	-7.018E-03	0.00	0.03
7.4	21.8	-21.8	1.111E-02	0.00	0.05
7.6	21.0	-21.1	-8.902E-02	0.00	0.42
7.8	20.6	-20.5	5.009E-02	0.00	0.24
8.0	19.9	-20.0	-7.923E-02	0.00	0.40
8.2	19.2	-19.4	-0.184	-0.01	0.95
8.4	18.9	-19.0	-7.432E-02	0.00	0.39
8.6	18.5	-18.2	0.307	0.02	1.66
8.8	18.1	-18.1	-1.294E-02	0.00	0.07
9.0	17.7	-17.8	-9.015E-02	-0.01	0.51
9.2	17.4	-17.3	6.026E-02	0.00	0.35
9.4	17.1	-17.1	-2.256E-03	0.00	0.01
9.6	16.8	-16.8	2.034E-02	0.00	0.12
9.8	16.5	-16.5	4.529E-02	0.00	0.27
10.0	16.0	-16.3	-0.352	-0.02	2.16
10.2	13.6	-12.0	1.58	0.12	11.60
10.4	8.40	-8.10	0.302	0.04	3.60
10.6	5.41	-4.67	0.735	0.14	13.59
10.8	1.91	-1.55	0.358	0.19	18.79
11.0	0.91	-0.78	0.131	0.14	14.42

TAB 2. Flächenhafte Wirbeldichte auf Ober- und Unterseite im Nachlauf des hinteren Profils.

Um auch einen relativen Fehler zu erhalten, sind die Beiträge von der Oberseite ($j.F>0$) und der Unterseite ($j.F<0$) des Nachlaufs getrennt integriert. Die Summe (Sum) im Verhältnis zum Betrag des jeweils kleineren Teilwertes ist als Fehlermaß (err) genommen und auch noch in Prozent (err %) dargestellt. Die Ergebnisse in den jeweiligen Nachlaufebenen haben einen lokalen Fehler in der Größenordnung von 1 %.



TAB 3. Flächenhafte Wirbeldichte auf Ober- und Unterseite Nachlauf des vorderen Profils.

In TAB 2 sind die Ergebnisse für das hintere Profil dargestellt. Die Wirbeldichte vom vorderen Profil überlagert sich der Wirbeldichte des hinteren Profils und bleibt vom relativen Wert her deutlich sichtbar erhalten. Die Dissipation stromab ist aber erheblich, wie die grafische Darstellung des Abfalls der flächenhaften Wirbeldichte hinter den beiden Profilen in BILD 8 zeigt.

5. Wirbeldichte und Quelldichte

Es stellt sich die Frage nach der Güte der Lösung im Feld außerhalb der Zonen mit Wirbeldichte. Auf diese Frage gibt es keine mathematisch befriedigende Antwort, weil es keine Möglichkeit gibt, die Konvergenz einer Lösung im strengen Sinne unterschrittener Fehlergrenzen zu überprüfen.

Nun gibt es zwei mathematisch sehr unterschiedliche, physikalisch aber vom Prinzip völlig äquivalente Möglichkeiten, die Erhaltungssätze für Impuls, Masse und Energie eines Fluids zu beschreiben und zu lösen. Beide Möglichkeiten seien kurz rekapituliert. Die erste Möglichkeit soll bezeichnet werden als die

- **integrale Darstellung** der Erhaltungssätze.

Diese Darstellung verwendet die beiden Funktionen

- Quelldichte $\delta = \operatorname{div} \vec{v}$ und
- Rotation $\vec{j} = \operatorname{rot} \vec{v}$

zur Darstellung eines jeden Vektorfeldes \vec{v} , also auch des Geschwindigkeitsfeldes, dessen Dynamik durch die Erhaltungssätze beschrieben wird. Nach dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis kann jedes Vektorfeld durch Potentiale mit den beiden Dichten dargestellt werden. Dabei beschreibt die Quelldichte die stoffliche Eigenschaft Kompressibilität. Die Wirbeldichte beschreibt die stoffliche Eigenschaft Viskosität. Die Lösungsverfahren sind beherrscht von der globalen Diskretisierung der Feldfunktionen und ihrer Fernwirkung auf die Lösung. Die zweite Möglichkeit sei als die

- **differentielle Darstellung** der Erhaltungssätze bezeichnet. Diese Darstellung verwendet die Stromdichten

- Impulstromdichte $(\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \rho \cdot \vec{v} + p \cdot \vec{n}$,
- Massenstromdichte $\rho \cdot \vec{v}$ und
- Energiestromdichte $(\vec{v}^2 / 2 + e + p / \rho) \cdot \rho \cdot \vec{v}$.

Alle drei Flüsse bleiben stets erhalten und eignen sich deshalb für die lokale Diskretisierung. Die stofflichen Eigenschaften bestehen *neben* der festen Zahl der Variablen. Die Lösungsverfahren sind beherrscht von der lokalen Diskretisierung des Raumes. Die Nahwirkung der Flüsse überträgt die Lösung auf benachbarte Gebiete. Dass dabei die Diskretisierung je nach Verfahren lokal auf eine integrale Darstellung der Flüsse zurückgreift, ist unabhängig von diesem mathematischen Unterschied.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit interessiert nur die Möglichkeit, unter Verwendung der integralen Darstellung der Erhaltungssätze inhärent die Güte einer Lösung zu überprüfen. Für die Wirbeldichte ist dies bereits im Hinblick auf die Wirbelerhaltung geschehen. Auch für die Quelldichte besteht eine solche Möglichkeit. Zunächst sei der stationäre Fall einer Lösung im Unterschall betrachtet.

Die Quelldichte oder Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes δ ergibt sich im gesamten Lösungsgebiet aus der Vorschrift zu ihrer Berechnung. Nun ist die Gleichung für die Massenerhaltung, anders als Impuls- und Energiesatz, eine rein kinematische Gleichung. Vom Standpunkt der Differentialgeometrie beschreibt die Gleichung nur die isotrope Expansion eines Kontinuums mit der Dichte ρ , wobei deren Kehrwert das spezifische Volumen ν ist. Die Gleichung für die Massenerhaltung lautet damit

$$(3) \quad \dot{\nu} = \delta \cdot \nu \quad \text{mit} \quad \rho(\vec{x}, t) = 1 / \nu(\vec{x}, t),$$

woraus unmittelbar die bekanntere Form

$$(4) \quad \dot{\rho} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

folgt. Die Zeitableitung bezieht sich auf feste Materiekoordinaten (substantielle Ableitung). Bei konstanter Entropie s und dem Druck p gilt

$$(5) \quad \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_S \cdot \frac{dp}{dt} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_S = c_S^2$$

c_S ist die isentrope Schallgeschwindigkeit. Daraus folgt eine Verknüpfung zwischen Divergenz und Druckbeiwert

$$(6) \quad \delta \equiv \operatorname{div} \vec{v} = - \frac{1}{\rho \cdot c_S^2} \frac{dp}{dt},$$

die unter Verwendung der Definition für den Druckbeiwert im Unterschall (Gleichung von Bernoulli) bei konstanter Dichte in stationärer Strömung die folgende vereinfachte Beziehung liefert:

$$(7) \quad \delta \equiv \operatorname{div} \vec{v} = - \frac{1}{2} Ma_\infty^2 \cdot (\vec{v} \cdot \operatorname{grad} c_p) =: \theta$$

Die direkte Bestimmung der Quelldichte aus dem Geschwindigkeitsfeld und die iterative Bestimmung über den Gradienten des Druckbeiwerts sollten zu gleichen Ergebnissen führen. Tatsächlich tun sie es nicht aus numerischen wie aus physikalischen Gründen. Aber die Werte liegen dicht beieinander und liefern mit ihrer Differenz eine für das Lösungsverfahren wie für das jeweilige Rechennetz charakteristische *Signatur* der Konturlinien dieser Abweichung, die das gesamte Rechengebiet umfasst. Die Größe θ steht für die Ermittlung der Quelldichte aus dem Gradienten des Druckbeiwerts. Daraus lässt sich ein relativer Rechenfehler definieren als

$$(8) \quad \varepsilon_{comp} := \frac{\delta - \theta}{\delta} \cdot 100 [\%].$$

Diese Beziehung hat nicht nur eine Bedeutung für die Numerik, sondern sie klärt auf tiefer liegende Weise auch ein Missverständnis auf, das zu den so genannten „exakten“ Lösungen der Potentialtheorie führt. Diese Lösungen werden gewonnen über den Ansatz $\vec{v} = -\operatorname{grad} \varphi$ für das Geschwindigkeitsfeld und führen folglich zu dem Ergebnis $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Im Lichte der Erhaltungssätze ist dieses Ergebnis aber

gar nicht exakt, sondern führt, wenn man die Gleichung (6) von rechts nach links liest, stets zu einem Ergebnis ungleich null (BILD 10).

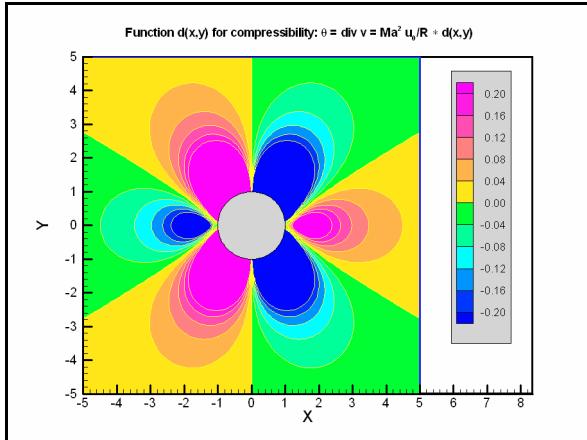


BILD 10. Quelldichte der klassischen Lösung für den Kreiszylinder mit Hilfe der Funktionentheorie.

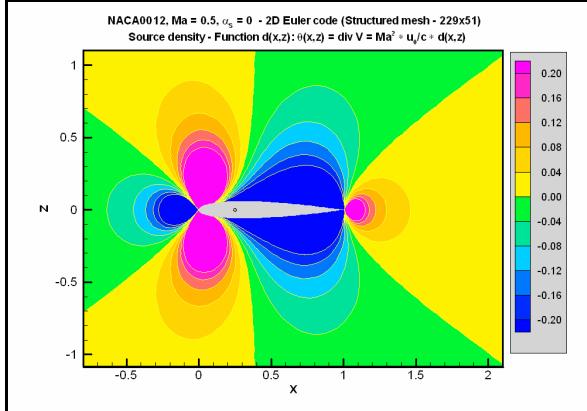


BILD 9. Quelldichte um das Profil NACA0012, berechnet mit einem strukturierter Euler Code.

Diese Tatsache ist nach der Erfahrung der Autors so wenig bekannt, dass die voranstehenden Überlegungen um zwei Bilder ergänzt seien, deren Entstehung nicht unterschiedlicher sein könnte. Gemeinsam haben sie nur, dass beide die Umströmung von Körpern darstellen. Die Lösung in BILD 10 stammt vom Druckbeiwert des mit Hilfe der Funktionentheorie beschafften Geschwindigkeitsfeldes für den Kreiszylinder [8]. Das zweite BILD 9 mit der Quelldichte um das Profil NACA0012 ist mit einem numerischen Verfahren (Euler Code) beschafft worden, das durch die Verwendung eines strukturierten Netzes Resultate von hoher Güte liefert [9].

Festzuhalten bleibt, dass die Verwendung des Druckbeiwerts nur gültige Aussagen für die Quelldichte in Bereichen der Lösung liefert, in denen es keine Wirbeldichte gibt. Denn die Bernoulli-Gleichung ist ein erstes Integral des stationären Impulserhaltungssatzes, das gewonnen wird unter der Annahme einer reibungsfreien Strömung.

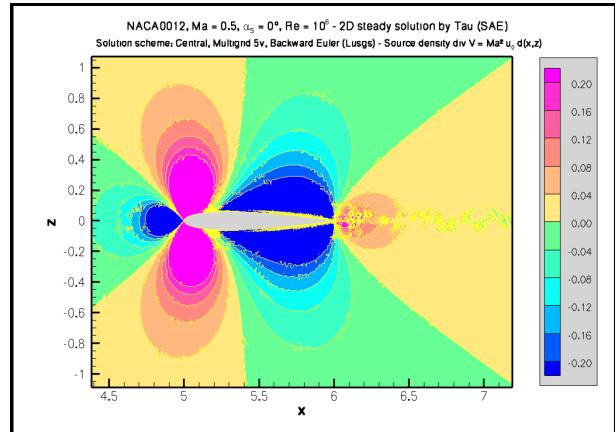


BILD 11. Quelldichte des hinteren Profils der vorliegenden Konfiguration – DLR Tau Code.

Man darf von der Lösung auf einem unstrukturierten Gitter nicht die gleiche Güte erwarten wie von der Lösung auf einem strukturierten Gitter. Der Vergleich von BILD 9 mit der Lösung als Ergebnis einer Rechnung mit dem Tau Code in BILD 11 zeigt aber auch quantitativ eine gute Überstimmung.

6. Güte der Lösung im stationären Feld

Die Güte der Lösung ist eng mit der Qualität des Rechennetzes verknüpft. Bei stationären Rechnungen wird zunächst einmal die Konvergenz untersucht, für die gewöhnlich das Dichteressiduum als Maß genommen wird. Konvergiert die stationäre Lösung, dann wird das Netz auch als geeignet für eine instationäre Rechnung angesehen.

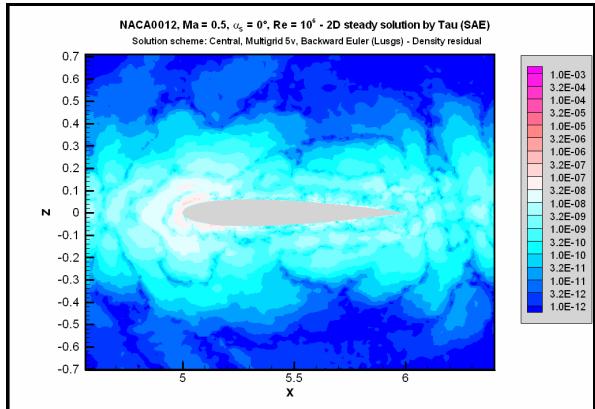


BILD 12: Dichteressiduum der vorliegenden Konfiguration für das hintere Profil.

BILD 12 zeigt das Ergebnis für das verwendete Netz. Die Konvergenz der Lösung hat nach den Erfahrungen des Autors aber keinen inneren Zusammenhang mit der Genauigkeit der stationären Lösung, erst reicht nicht mit der Güte der Lösung einer instationären Bewegung auf diesem Netz. Bildet man dagegen den Fehler nach Gleichung (8), so ergibt sich ein völlig anderes Bild von der Genauigkeit.

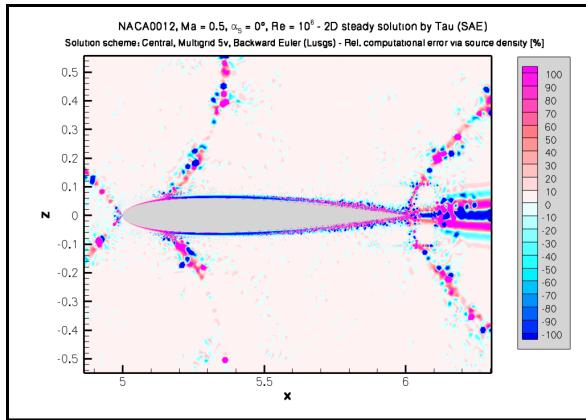


BILD 13. Relativer numerischer Fehler für das vorliegende unstrukturierte Gitter.

Die beiden Grafiken BILD 15 und BILD 13 zeigen in weiten Bereichen einen Fehler in der Lösung von deutlich weniger als +/- 10 % an. Dies ist ein gutes Resultat für ein Rechennetz. BILD 14 zeigt, dass bei Auflösung in diesem Skalenbereich der Fehler eine zufällige Rauhigkeit aufweist.

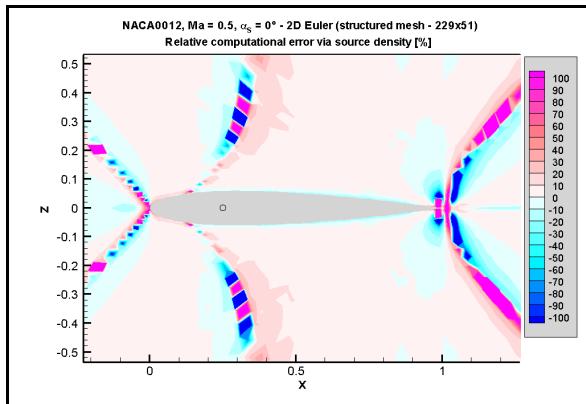


BILD 15. Relativer numerischer Fehler für das Profil NACA0012 auf einem strukturierten Gitter.

Die auftretenden Fehler müssen bewertet werden. Wie schon erwähnt, sind die Bereiche mit Wirbeldichte außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Fehlerformel. In diesem Bereich muss die Genauigkeit, wie bereits für den stationären Fall demonstriert, über die Erhaltungseigenschaften der Wirbeldichte ermittelt werden. Die charakteristisch geschwungenen Linien treten in beiden Netzen auf. Sie sind auf Wechsel im Vorzeichen der Geschwindigkeitsgradienten in der Quelldichte zurückzuführen, wie man den vorhergehenden Darstellungen in BILD 9 und BILD 11 entnehmen kann. Je feiner das Netz wird, desto schärfer treten diese Linien hervor.

Außerhalb der feinen Auflösung des Rechennetzes steigt der Fehler sofort an, wie man den beiden vergleichenden Grafiken in BILD 16 dieser Serie entnimmt. Das als unzureichend bezeichnete und hier nicht weiter diskutierte Netz ist nicht in der Lage, die Ausbreitung der Störungen vom hinteren Profil in Richtung des vorderen Profils physikalisch

richtig wiederzugeben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist etwa um den Faktor 1.3 höher als die Schallgeschwindigkeit.

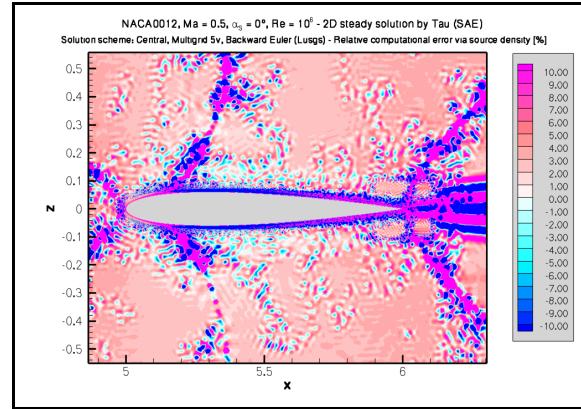


BILD 14. Relativer numerischer Fehler für das unstrukturierte Gitter im Fehlermaßstab +/- 10 %.

Um für praktische Zwecke eine *Qualitätskarte* mit einem Qualitätsfaktor q der Lösung zu erhalten, sind in BILD 16 die Gebiete mit Wirbeldichte auf einfache Weise in der Darstellung des Fehlers eliminiert worden. Anstelle der Divergenz im Nenner von

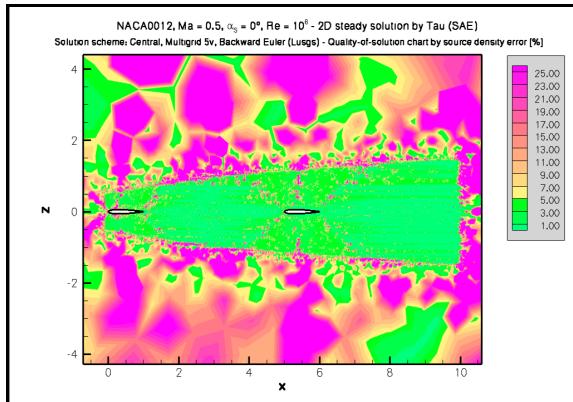
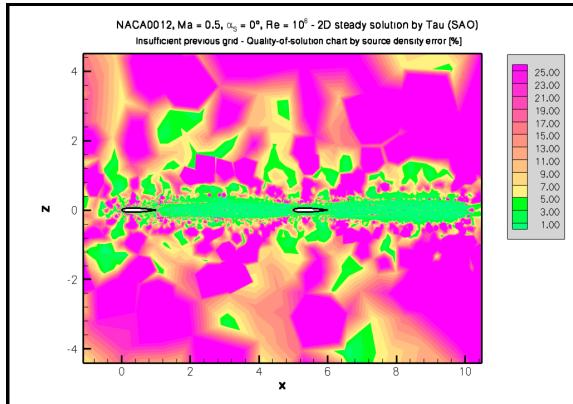


BILD 16. Qualitätsfaktor der Lösung q [%] nach Gl. (9) für das gesamte fein aufgelöste Rechengebiet (unten) und der Vergleich mit einem als unzureichend bewerteten Netz (oben). Die Profilquerschnitte sind schwarz umrandet.

Gleichung (8) wird das jeweilige Maximum von Divergenz und Betrag der Wirbeldichte genommen:

$$(9) \quad q_{comp} := \frac{|\delta - \theta|}{\max(|\delta|, |j|)} \cdot 100 [\%]$$

Zusammenfassend kann man feststellen, dass für das jeweilige Netz zusammen mit dem darauf angewandten Lösungsalgorithmus durch Auswertung der differentiellen und integralen Eigenschaften von Wirbeldichte und Quelldichte eine gute Vorstellung von den Fehlereigenschaften der Lösung vermittelt wird.

7. Kräfte und Momente der instationären Lösung

Die Güte der instationären Lösung bemisst sich vorrangig nach der Stabilität der Zeitintegration. Liefert, zumindest beim DLR Tau Code, die stationäre Lösung ein gutes Ergebnis, dann ist Zeitintegration vornehmlich eine Frage der physikalischen Zeitschritte pro Periode und der bei jedem Zeitschritt erfolgenden inneren Iterationen. Daneben sind die Amplituden von Bedeutung, weil eine subsonische stationäre Strömung instationär durchaus transsonische Effekte hervorrufen kann.

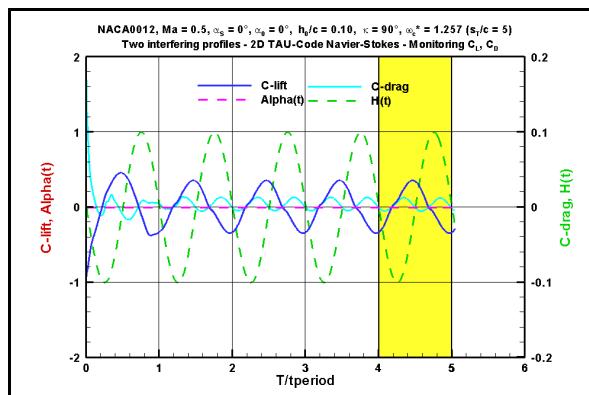


BILD 17. Zeitverlauf der Integration bei $Ma = 0.5$.

BILD 17 zeigt den Zeitverlauf der ersten fünf Perioden. Die fünfte Periode ist nachfolgend ausgewertet worden. Dargestellt sind die integralen Größen für beide Profile. Die Darstellung in der Monitordatei des Tau Code ist irritierend, weil zum größten positiven Auftrieb bei einer Schlagbewegung natürlich eine Abwärtsbewegung $h(t)$ gehören müsste. Diese findet statt, wird aber in einem anderen Koordinatensystem als dem für den Auftrieb dargestellt.

In BILD 18 sind die zugehörigen Beiwerte für Auftrieb, Widerstand und Moment um die $c/4$ -Achse im zeitlichen Verlauf und für das vordere und hintere Profil und für beide Machzahlen 0.5 und 0.75 untereinander abgebildet. Wie eingangs bereits erwähnt, zeigt die Konfiguration noch nicht das Auftreffen einer Bö auf ein nur gleichförmig bewegtes Profil. Die Wirkung der Bö muss man also abschätzen gegenüber dem Verlauf der ungestörten Bewegung des

k	Freq	p_cw[%]	_cw_abs	_cw_phas
0	0.0000	0.0000	0.009286	0.00
1	33.3473	0.6130	0.000223	-117.45
2	66.6946	74.5048	0.002459	82.49
3	100.0418	0.2468	0.000142	-136.46
4	133.3891	18.1770	0.001215	163.61

k	Freq	p_ca[%]	_ca_abs	_ca_phas
0	0.0000	0.0000	0.000807	0.00
1	33.3473	91.6423	0.213853	-147.11
2	66.6946	0.0054	0.001644	-17.10
3	100.0418	6.8223	0.058349	-168.06
4	133.3891	0.0013	0.000814	-39.66

k	Freq	p_cm[%]	_cm_abs	_cm_phas
0	0.0000	0.0000	-0.000016	0.00
1	33.3473	98.8217	0.052235	91.14
2	66.6946	0.0033	0.000300	98.27
3	100.0418	0.8007	0.004702	15.50
4	133.3891	0.0002	0.000075	105.44

TAB 4. Fourieranalyse der Beiwerte von Widerstand, Auftrieb und Moment des hinteren Profils für $Ma = 0.5$.

ersten Profils. Gleichwohl würde man einen ausgeprägteren Einfluss erwarten, der sich besonders im Moment auswirkt. Die filmische Darstellung zeigt ein ausgeprägtes vertikales Geschwindigkeitsfeld. Über das Ausbleiben einer solchen Wirkung hat sich allerdings auch schon H.G. Küssner in seiner Untersuchung gewundert ([2], Einleitung S. 425).

Es gibt zwischen den Ergebnissen zu den beiden Machzahlen gleichwohl deutliche Unterschiede. Zu nennen ist die Phasenlage für den Auftrieb wie für das Moment. Bei der höheren Machzahl erreichen beide Funktionen ihre Extrema deutlich verzögert.

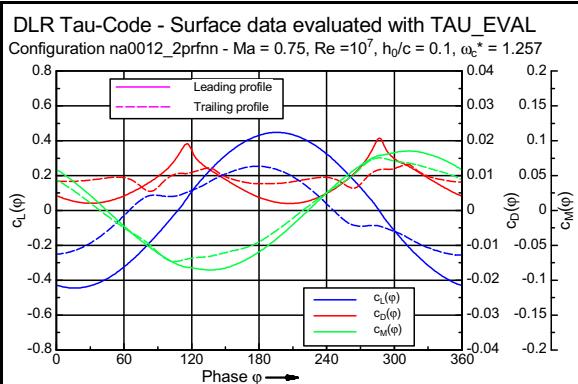
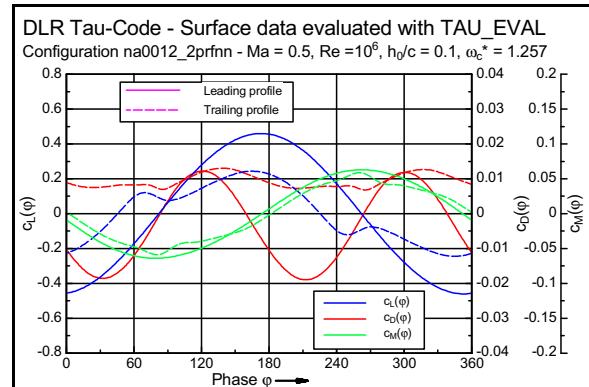


BILD 18. Zeitverlauf der Beiwerte beider Profile und für beide Machzahlen, jeweils 5. Periode.

Das Moment hat zugenommen, aber der Widerstand ist nicht wesentlich größer geworden.

k	Freq	p_cw[%]	_cw_abs	_cw_phas
0	0.0000	0.0000	0.009181	0.00
1	50.0209	2.6374	0.000400	52.38
2	100.0418	32.8341	0.001410	104.04
3	150.0628	0.9090	0.000235	-116.17
4	200.0837	44.4767	0.001641	-160.71
5	250.1046	0.0279	0.000041	-84.34
6	300.1255	5.3819	0.000571	15.21
7	350.1465	0.0378	0.000048	62.67
8	400.1674	2.9689	0.000424	-107.33
9	450.1883	0.1524	0.000096	174.12
k	Freq	p_ca[%]	_ca_abs	_ca_phas
0	0.0000	0.0000	0.001495	0.00
1	50.0209	95.8022	0.229561	-166.14
2	100.0418	0.0334	0.004286	-67.73
3	150.0628	3.0980	0.041281	146.73
4	200.0837	0.0031	0.001312	53.42
5	250.1046	0.3842	0.014538	-30.63
k	Freq	p_cm[%]	_cm_abs	_cm_phas
0	0.0000	0.0000	-0.000038	0.00
1	50.0209	99.2804	0.070743	52.20
2	100.0418	0.0166	0.009194	141.65
3	150.0628	0.2623	0.003636	-113.28
4	200.0837	0.0056	0.000533	-165.01
5	250.1046	0.1525	0.002773	14.28

TAB 5. Fourieranalyse der Beiwerte des hinteren Profils für $Ma = 0.75$.

Die grafische Darstellung ist Teil einer Auswertung, die auch die Fourieranalyse für jeweils eine Periode durchführt. TAB 4 zeigt das Ergebnis mit den Anteilen zu den ersten vier Frequenzen, die zahlenmäßig in Spalte zwei der Tabelle stehen. Die Prozentangabe in Spalte drei bezieht sich auf den Anteil an der Gesamtleistung, die in der Bewegung steckt. Die vierte und fünfte Spalte zeigen Betrag und Phase der drei Beiwerte. Bei der höheren Machzahl 0.75 in TAB 5 treten besonders beim Widerstand vermehrt Oberwellen auf.

8. QUALITÄT DES INSTATIONÄREN FELDES

Die Möglichkeiten der Bewertung der instationären Lösung sind die gleichen wie die für das stationäre Feld:

- Die flächenhafte Wirbeldichte an einer festen Position x_0 im Nachlauf muss wegen der Erhaltung der Zirkulation hinter einem schwingenden Profil im Mittel über eine Periode T verschwinden.

$$(10) \quad \Gamma = \frac{b}{T} \int_0^T \int_{-z_d}^{z_d} j_y(x_0, z, t) dz dt = 0$$

- Die Divergenz, die nichts Anderes ist als der räumliche Teil einer linearisierten Wellengleichung, muss die Ausbreitung von Druckstörungen mit Schallgeschwindigkeit beschreiben.

Damit die Zirkulation Γ die Dimension m^2/s behält, wird sie für die Spannweite b berechnet. Die Integrationsgrenze z_d für die Wirbeldichte j_y muss so bemessen sein, dass sie den mit Wirbeldichte behafteten Bereich des Nachlaufs abdeckt (BILD 19).

TAB 6 zeigt die Berechnung der Zirkulation (Gamma) über eine Periode an verschiedenen Spannweitenpositionen (x-pos) im Nachlauf des ersten und des zweiten Profils nach Gleichung (10). Anders als im stationären Fall zeigt die Amplitude (Ampl) der Wirbeldichte stromab eine bemerkenswerte Konstanz. Der Fehler (Err %) bei der Erhaltung der Zirkulation ist ermittelt aus dem Verhältnis von Zirkulation zu Amplitude. Auch die Phasenlage (Phase) stimmt sehr gut mit Vergleichsrechnungen auf der Basis anderer Rechenverfahren überein. Der Verlauf der Zirkulation über eine Periode hinweg ist einer Fourieranalyse unterworfen worden, die auch die Amplitude liefert (Ampl). Die letzte Spalte (Sinus) gibt Auskunft, in welchem Maße der Verlauf harmonisch ist. Man erkennt, dass über die Strecke bis zum zweiten Profil zunehmend auch höhere Harmonische in der Wirbeldichte zu finden sind.

x-pos	Gamma	Ampl	Phase	Err %	Sinus
1.2000	-1.25	62.7	19.07	-1.99	0.998
1.4000	-0.750	57.5	4.10	-1.31	0.998
1.6000	-0.310	57.1	-10.38	-0.54	0.999
1.8000	-0.429	56.1	-24.85	-0.76	0.999
2.0000	-0.420	55.4	-39.34	-0.76	0.998
2.2000	-0.511	55.2	-53.95	-0.93	0.996
2.4000	-0.470	55.0	-68.85	-0.85	0.995
2.6000	-0.495	54.9	-83.47	-0.90	0.994
2.8000	-0.379	54.9	-98.30	-0.69	0.993
3.0000	-0.431	55.3	-112.93	-0.78	0.993
3.2000	-0.347	55.8	-127.43	-0.62	0.994
3.4000	-0.311	56.2	-141.92	-0.55	0.995
3.6000	-0.314	56.9	-156.39	-0.55	0.995
3.8000	-0.237	57.8	-170.58	-0.41	0.993
4.0000	-0.197	58.0	175.31*	-0.34	0.992
4.2000	-0.378	58.4	160.84	-0.65	0.991
4.4000	-0.421	58.6	146.13	-0.72	0.987
4.6000	-0.490	59.1	131.34	-0.83	0.980
4.8000	-0.476	60.9	116.23	-0.78	0.966
x-pos	Gamma	Ampl	Phase	Err %	Sinus
6.2000	0.189	85.7	32.96	0.22	0.967
6.4000	-0.248	83.2	18.28	-0.30	0.963
6.6000	-0.179	83.8	3.72	-0.21	0.969
6.8000	-0.261	83.9	-10.55	-0.31	0.972
7.0000	-0.444	83.4	-24.91	-0.53	0.970
7.2000	-0.312	82.7	-39.46	-0.38	0.970
7.4000	-0.235	82.1	-54.27	-0.29	0.968
7.6000	-0.209	81.9	-69.00	-0.26	0.965
7.8000	-0.109	81.9	-83.96	-0.13	0.964
8.0000	-0.090	82.2	-98.61	-0.11	0.961
8.2000	-0.176	82.8	-113.49	-0.21	0.962
8.4000	-0.056	83.6	-128.03	-0.07	0.963
8.6000	-0.248	86.3	-143.61	-0.29	0.958
8.8000	-0.125	85.2	-157.27	-0.15	0.957
9.0000	-0.096	86.4	-171.45	-0.11	0.957
9.2000	0.063	85.1	174.35*	0.07	0.949
9.4000	-0.026	86.5	160.53	-0.03	0.949
9.6000	0.004	86.0	146.10	0.00	0.944
9.8000	0.124	85.1	131.28	0.15	0.936

TAB 6. Analyse des instationären Nachlaufs.

*Darstellung der Phase: -180 deg bis 180 deg.

Der untere Teil der Tabelle zeigt Positionen im Nachlauf des hinteren Profils. Auch hier ergibt sich eine sehr hohe Genauigkeit bei der Erhaltung der Zirkulation von unter 1 % des relativen Fehlers.

Die absolute Größe der Zirkulation ist nun nicht einfach die Summe der Zirkulationsanteile der beiden Profile und lässt in diesem Punkt noch Fragen offen.

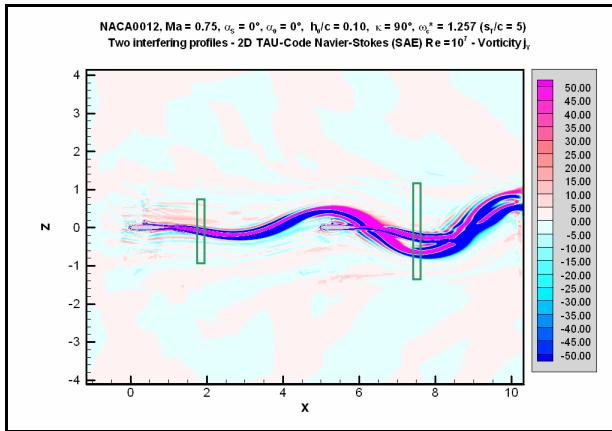


BILD 19. Integrationsbereiche für Wirbeldichte.

Physikalisch interessant ist der Vergleich von BILD 19 mit der Darstellung der Abweichung von der Adiabatengleichung in BILD 20. Die Funktion $f(p, \rho)$ sollte ohne Wärmeaustausch den Wert 1 haben:

$$(11) \quad f(p, \rho) = \frac{p / \rho^\kappa}{p_0 / \rho_0^\kappa} \text{ wegen } T \frac{ds}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0$$

In der Gleichung treten der Druck p und die Dichte ρ auf. κ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen von Luft. Der Index 0 bezieht sich auf die ungestörte Anströmung.

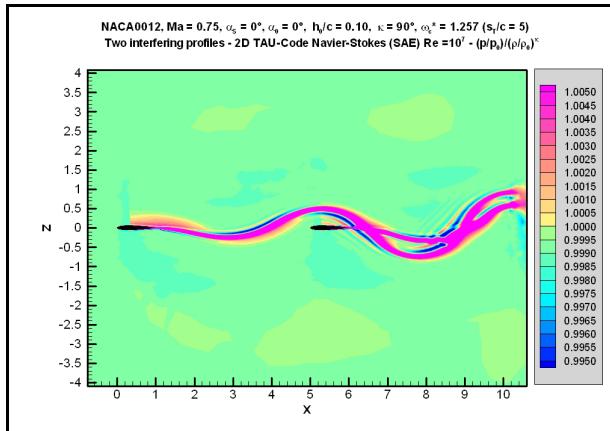
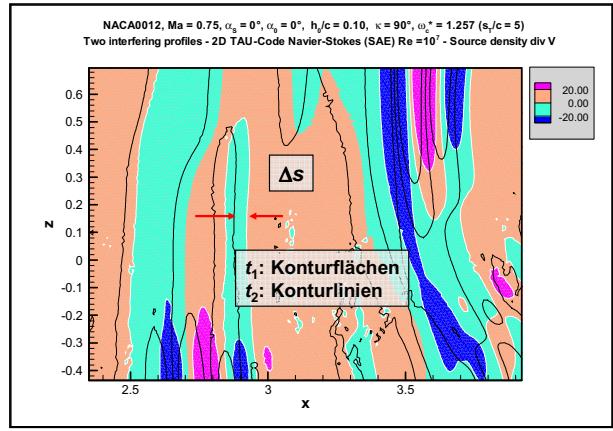


BILD 20. Abweichung von der Isentropie.

Im Bereich des Wirbeltransports nimmt der Wärmeinhalt zu, aber ebenso hinter dem Stoß, der oberhalb des vorderen Profils deutlich zu erkennen ist.

Ein letzter Punkt bei der Bewertung einer instationären Lösung in kompressibler Strömung betrifft die Ausbreitung von Schallwellen. Die nahe liegende Erwartung ist, dass diese sich von ihrem Entstehungsort stromauf mit der Geschwindigkeit $c_s - u_0$ und stromab mit der Geschwindigkeit $c_s + u_0$ bewegen. Um diese Beziehung zu überprüfen, vergleicht man die Lage der Isolinien der Quelldichte zu zwei aufeinander folgenden Zeitschritten, wie dies in BILD 21 geschehen ist (siehe Anhang BILD 20).

Die Frequenz der Schwingung ist in TAB 5 mit 50.0 Hz angegeben. Die Schallgeschwindigkeit be-

BILD 21. Ausbreitung der Quelldichte im Fluid. Zeitlicher Abstand $\Delta t = t_2 - t_1 = T/36$ der Periode T. Räumlicher Abstand $\Delta s = 0.047$ m. $\Delta s / \Delta t = 84.6$ m/s.

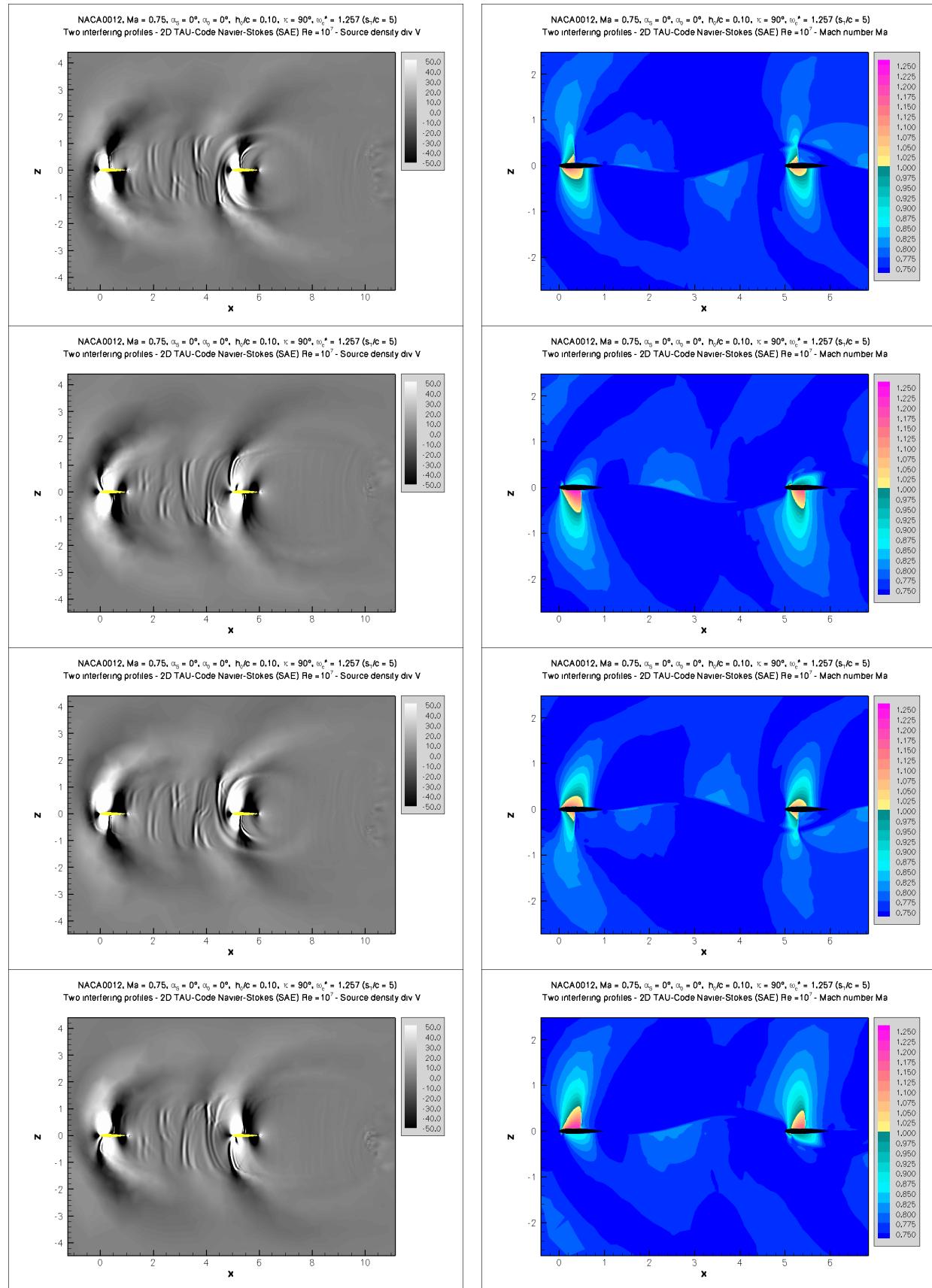
trägt $c_s = 331.5$ m/s und folglich ist $u_0 = 248.6$ m/s. Stromauf sollten sich Schallwellen mit einer Geschwindigkeit von knapp 83 m/s bewegen. Vergleicht man diesen Wert mit dem Einzelwert aus BILD 21, so ergibt sich eine sehr befriedigende Übereinstimmung.

Die vorgetragene Fassung der Arbeit enthält einige Kurzfilme, die mit der angegebenen Zugangsbeschränkung im Internet zu finden sind [10].

LITERATUR UND QUELLEN

- [1] R. KATZMAYR, *Über das Verhalten der Flügelflächen bei periodischen Änderungen der Geschwindigkeitsrichtung*, ZFM Heft 6, 13. Jg. (1922), 80-82, Schluss: ZFM Heft 7, 13. Jg. (1922), 95-101.
- [2] H.G. KÜSSNER, *Untersuchung der Bewegung einer Platte beim Eintritt in die Strahlgrenze*, Luftfahrtforschung 13 (1936), 425-429.
- [3] R. FREYMAN, *Die Böen simulationsanlage des 3mx3m – Niedergeschwindigkeitskanals der DFVLR in Göttingen*, DFVLR-FB 85-04 (1985).
- [4] B. KRAM, W. WEGNER, *Generation of Two-Dimensional Gust Fields in Subsonic Windtunnels*, in AGARD Conference Proc. 386, AGARD-CP-386 (1985), Joint Symposium of the Fluid Dynamics and Flight Mechanics Panels, Göttingen (FRG), 6-9 May 1985.
- [5] A.C. de BRUIN, G. SCHRAUF, *Wake Vortex Results From The AWIATOR Project*, CEAS Congress 2007, 10-13 Sept 2007, Berlin, CEAS-2007-008. <http://www.nlr.nl/id=9406/lang-en.pdf>
- [6] DLR Tau Code, Bezugsnachweis: DLR-Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig - <http://www.dlr.de/as>
- [7] Centaur Gridgenerator, Bezugsnachweis: CentaurSoft Inc., 5806 Cyrilla Dr, Austin TX 78759 USA. <http://www.centaursoft.com>
- [8] W. SEND, *Zur Lösung des räumlichen Interferenzproblems in der Instationären Aerodynamik*, DLR-FB 95-42, Köln 1995.
- [9] B. GRÜBER, V. CARSTENS, *Computation of the Unsteady Transonic Flow in Harmonically Oscillating Turbine Cascades Taking into Account Viscous Effects*, J. Turbomachinery 120 No. 1 (1998), 104-111
- [10] W. SEND, *Zum Böenproblem: Ein Ansatz über Interferenz*, DGLR Kongress 2008, Darmstadt 23.-25. Sept. 2008, Filme: <http://www.aniprop.de/dglr08>
User: send, Password: dglr2008

Anhang: Die Ausbreitung von Schallwellen in der instationären Strömung mit dem DLR Tau Code

BILD 22. Quelldichte und Machzahl für Phasenlagen $\alpha t = 0, 90, 180$, und 270 Grad.