

MODELLIERUNG DER STATIONÄREN WÄRMELEITUNG IN GRADIENTEN STRUKTUREN

R. Leetsch, Universität Stuttgart, 70569 Stuttgart, Deutschland

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Beitrag wird die dreidimensionale Wärmeleitung in funktional gradierten Platten untersucht. Aufbauend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit und der schwachen Form der stationären Wärmeleitungsgleichung werden verschiedene Diskretisierungsmöglichkeiten mit Finiten Elementen aufgezeigt und verglichen. Neben Standard-Finiten Kontinuumselementen, die den Gradierungsverlauf nur stufenweise wiedergeben können, werden ein gradiertes Finites Kontinuumselement, welches die Variation der Materialeigenschaften innerhalb des Elements durch eine entsprechende Ansatzfunktion berücksichtigt, sowie ein auf einem axiomatischen Dickenansatz beruhendes zweidimensionales Finites Plattenelement vorgestellt. Am Beispiel einer über die Dicke gradierten Rechteck-Platte unter trigonometrisch verteilter Temperaturbelastung, für die eine analytische Lösung vorliegt, werden die Ergebnisse der drei Elementtypen hinsichtlich der Genauigkeit der Näherungslösung bewertet. Es zeigt sich hierbei, dass der exakte Temperaturverlauf sowohl durch Plattenelemente basierend auf Ansatzfunktionen höherer Ordnung als auch durch die gradierten Kontinuumselemente mit quadratischen Ansätzen gut wiedergegeben werden kann. Die Berechnung des Querschnittswärmestroms führt hingegen für alle Elemente zu großen Fehlern. Wie gezeigt wird, lassen sich diese mit Hilfe geeigneter Postprocessing-Methoden beseitigen.

1 EINLEITUNG

Funktional gradierte Materialien (*Functionally Graded Materials, FGM*) [1] sind eine neue Klasse von Verbundwerkstoffen für den Hochtemperatureinsatz, bei denen die Volumenanteile der am Verbundmaterial beteiligten Komponenten (möglichst) kontinuierlich in eine oder mehrere Raumrichtungen variiert (gradient) werden. Im Gegensatz zu laminierten Verbundwerkstoffen ändern sich die makroskopischen Materialeigenschaften bei gradierten Materialien kontinuierlich. Hierdurch werden die für laminierte Strukturen typischen interlaminaren Spannungen, die infolge von Dehnungsunverträglichkeiten an den Grenzflächen der Schichten auftreten und Ausgangspunkt für Schädigungen sein können, vermieden. Wesentlicher Vorteil gradierten Werkstoffe gegenüber Laminaten ist daher, die Eigenschaften der am Verbundmaterial beteiligten Komponenten kombinieren zu können, ohne das Problem der Interface-Spannungen in Kauf nehmen zu müssen.

Die strukturmekanische Bewertung von thermomechanisch höchstbelasteten Bauteilen wie einer Scramjet-Brennkammer erfordert effiziente Modellierungswerkzeuge, welche der vorliegenden thermomechanisch gekoppelten, instationären Problemstellung unter Berücksichtigung realitätsnaher Randbedingungen und örtlich variierender Materialeigenschaften (Gradierung) gerecht wird. Die Finite Elemente Methode (FEM) hat sich hierbei in der Vergangenheit für nicht gradierte Werkstoffe als geeignetes Werkzeug erwiesen. Die Übertragung der FEM auf funktional gradierte Materialien kann mit verschiedenen Strategien erfolgen. Drei Diskretisierungsvarianten werden im Folgenden vorgestellt und am Beispiel der stationären Wärmeleitung miteinander verglichen.

Im nachfolgenden Kapitel wird der aktuelle Stand der Forschung in der thermomechanischen Modellierung gradierten Strukturen zusammengefasst. In Kapitel 3 werden die drei hier untersuchten Finiten Elemente vorgestellt. Kapitel 4 ist der Herleitung der Finite Element Matrizen am Beispiel der stationären Wärmeleitung gewidmet. Anhand ei-

nes Referenzbeispiels, welches einer analytischen Lösung zugänglich ist, wird in Kapitel 5 das Lösungsverhalten der drei Finiten Elemente untersucht. Die Ergebnisse werden in Kapitel 6 diskutiert und der vorliegende Beitrag abschließend in Kapitel 7 zusammengefasst.

2 STAND DER FORSCHUNG

Die Simulation des thermomechanischen Verhaltens gradierten Strukturen war in der letzten Dekade Gegenstand intensiver Forschung. Birman und Byrd geben in einer aktuellen Review [2] einen umfassenden Überblick über die verschiedenen Forschungszweige im Bereich der gradierten Werkstoffe. Neben der thermomechanischen Modellierung werden Aspekte wie Homogenisierung, Optimierung, Fertigung, Design, Anwendungen und Schädigung angesprochen sowie 299 Referenzen angegeben. Praveen und Reddy [3] behandeln das transiente, geometrisch nichtlineare, thermoelastische Verhalten von gradierten Metall-Keramik-Verbund-Platten mittels der von Karman-Plattentheorie und der Finiten Elemente Methode. Es zeigt sich, dass das Antwortverhalten einer gradierten Platte mit Materialeigenschaften zwischen denen der Metall- bzw. Keramikkomponente im Allgemeinen nicht zwischen dem Antwortverhalten einer Metall- und einer Keramikplatte liegt. Basierend auf der Third Order Shear Deformation Theory gibt Reddy in [4] sowohl analytische als auch Finite Element Lösungen für funktional gradierte Platten an. Das Modell ist thermomechanisch voll gekoppelt und berücksichtigt sowohl Zeitabhängigkeit als auch von Karman-Nichtlinearität. Die lokalen, effektiven Materialparameter werden mittels einfacher Mischungsregeln gewonnen. Die Variation des Volumenanteils der Komponenten folgt dabei einem Exponentialgesetz. In [5] untersuchen Reddy und Cheng das thermoelastische Antwortverhalten einer gelenkig gelagerten, gradierten Rechteckplatte unter Temperatur- und Druckbelastung. Die dreidimensionale Lösung wird mittels einer asymptotischen Expansion unter Annahme eines exponentiellen Verlaufs der Volumenanteile und der Mori-Tanaka-Theorie

für die effektiven, lokalen Materialkennwerte gewonnen. Bei dieser Arbeit handelt es sich um den in Kapitel 5 behandelten Testfall. In [6] untersucht Jin die eindimensionale, instationäre Wärmeleitung in einem über die Dicke gradierten unendlichen Streifen. Der Streifen wird dabei in eine große Zahl von Schichten mit jeweils homogenen Eigenschaften unterteilt und die instationäre Lösung dann mittels Fourier-Transformation gewonnen. Quian und Batra geben in [7] eine dreidimensionale, instationäre Lösung für die Wärmeleitung in gradierten Platten an. Die Lösung basiert auf einer Plattentheorie fünfter Ordnung und einem lokalen, netzfreien Petrov-Galerkin-Verfahren.

Im Bereich der gradierten Finiten Elemente existieren bisher nur wenige Arbeiten. Santare und Lambros präsentieren in [8] gradierte Finite Scheibenelemente. Bei der Herleitung der Elementmatrizen wird die Gradierung durch die Verwendung der lokalen, effektiven Materialkennwerte an den verschiedenen Gauss-Punkten berücksichtigt. Für einfache Testfälle (z.B. Zug parallel und quer zur Gradierung), für die analytische Lösungen vorliegen, werden die gradierten Elemente mit Standard-Elementen, in denen konstante Eigenschaften vorliegen, verglichen. Dabei zeigen die gradierten Elemente in der Spannungsberechnung bei einer Belastung quer zur Gradierung eine höhere Genauigkeit als die Standard-Elemente. Der umgekehrte Fall tritt jedoch für eine Belastung parallel zur Gradierung ein. Zu einem ähnlichen Ergebnis kommen auch Kim und Paulino [9]. Im Gegensatz zu Santare und Lambros verwenden die Autoren in ihrer Arbeit im Rahmen eines isoparametrischen Konzepts separate Ansatzfunktionen für die Variation der Materialeigenschaften. Für eine Scheibe unter einfachen Verschiebungsrandbedingungen sowie Zug- und Biegebelastungen werden die gradierten Elemente mit Standard-Elementen verglichen. Es zeigt sich erneut das stark unterschiedliche Verhalten der gradierten Elemente in Abhängigkeit der Belastungsrichtung. Gradierte Finite Elemente für die Berechnung der Wärmeleitung in gradierten Strukturen sind dem Autor bisher nicht bekannt.

In eigenen Vorarbeiten [10, 11] wurde die von Carrera für Mehrschichtlamine entwickelte Unified Formulation [12] erweitert, um auch gradierte Materialien berücksichtigen zu können. Mittels eines axiomatischen Dickenansatzes wird das dreidimensionale, schwach gekoppelte thermoelastische Problem auf ein 2D-Problem in der Ebene reduziert und dort – je nach Problemstellung – analytisch [10] oder mit Hilfe der FEM [11] gelöst. Der Vergleich der numerischen Ergebnisse mit analytischen oder in der Literatur verfügbaren dreidimensionalen Lösungen zeigt sehr gute Übereinstimmung.

3 DISKRETISIERUNGSVARIANTEN

3.1 Standard-Kontinuumselemente

Abbildung 1a zeigt die Diskretisierung einer über die Dicke gradierten Struktur mit Hilfe von Standard-Elementen. Da diese im Element nur konstante Materialeigenschaften darstellen können, werden die im Centroid des Elements vorliegenden Eigenschaften für das gesamte Element als konstant übernommen. Hieraus ergibt sich der in der Abbildung dargestellte, treppenförmige Verlauf der Materialeigenschaften, der nur eine grobe Näherung für den wahren

Gradierungsverlauf darstellt. Eine akkurate Beschreibung der Gradierung erfordert somit eine sehr feine Vernetzung. Vorteilhaft ist hingegen, dass auf bestehende Elementbibliotheken zurückgegriffen werden kann.

3.2 Gradierte Kontinuumselemente

Eine verbesserte Approximation des Verlaufes der Materialeigenschaften ist zu erwarten, wenn auch innerhalb des Elements eine Variation der Materialeigenschaften berücksichtigt wird. Dies kann im Rahmen eines isoparametrischen Konzepts für gradierte Finite Kontinuumselemente in Form separater Ansatzfunktionen für die Variation der Eigenschaften erfolgen. Wird beispielsweise ein linearer Ansatz zugrundegelegt, folgt der in Abbildung 1b dargestellte, elementweise lineare Verlauf der Materialeigenschaften. Wie in Kapitel 4.2 gezeigt werden wird, führt der separate Ansatz für das Material zu einer zusätzlichen Summation bei der Berechnung der Elementmatrizen und somit zu einem größeren Rechenaufwand. Demgegenüber steht eine wesentlich genauere Darstellung der Gradierung.

3.3 Unified Formulation

Die dritte in dieser Arbeit untersuchte Möglichkeit besteht in einem axiomatischen Dickenansatz sowohl für die Unbekannten als auch für die Variation der Materialeigenschaften (vgl. Abbildung 1c). Dieser Ansatz führt zu einer Reduktion des dreidimensionalen Problems auf ein 2D-Problem und zu Finiten Plattenelementen. Die Ansatzordnung kann hierbei für die Unbekannten sowie die Materialeigenschaften unabhängig voneinander gewählt werden. Je nach Ansatzordnung – in Abbildung 1c ist ein quadratischer Ansatz für die Materialeigenschaften dargestellt – kann die Gradierung beliebig genau approximiert werden. Ein Nachteil ist allerdings, dass mit dem axiomatischen Dickenansatz nur Gradierungen in Dickenrichtung berücksichtigt werden können.

4 HERLEITUNG DER FINITE ELEMENT MATRIZEN

In den nachfolgenden Abschnitten werden am Beispiel der stationären Wärmeleitung die Finite Element Matrizen für die drei vorgeschlagenen Diskretisierungsvarianten hergeleitet. Ausgangspunkt hierfür ist die schwache Form der Wärmeleitungsgleichung, die aufbauend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit und nach partieller Integration wie folgt angegeben werden kann.

$$(1) \quad \int_V \delta \theta_{,i} q_i dV + \int_V \delta \theta r dV - \int_{\Gamma_q} \delta \theta \bar{q} d\Gamma = 0$$

$\delta \theta$ ist hierbei das virtuelle Temperaturfeld, q_i der Wärmestromvektor, r eine volumenbezogene Wärmequelle im Gebiet V und \bar{q} eine auf dem Rand Γ_q vorgegebene Wärmestromverteilung. In Gleichung (1) wurde von der Indexnotation sowie der Einsteinschen Summationskonvention Gebrauch gemacht, d.h. über doppelte Indizes wird summiert. Der Index i läuft über die Koordinaten x , y und z . $(\cdot)_{,i}$ bezeichnet die partielle Ableitung von (\cdot) nach der Koordinate i . Berücksichtigt man das Fouriersche Wärmeleitungs-

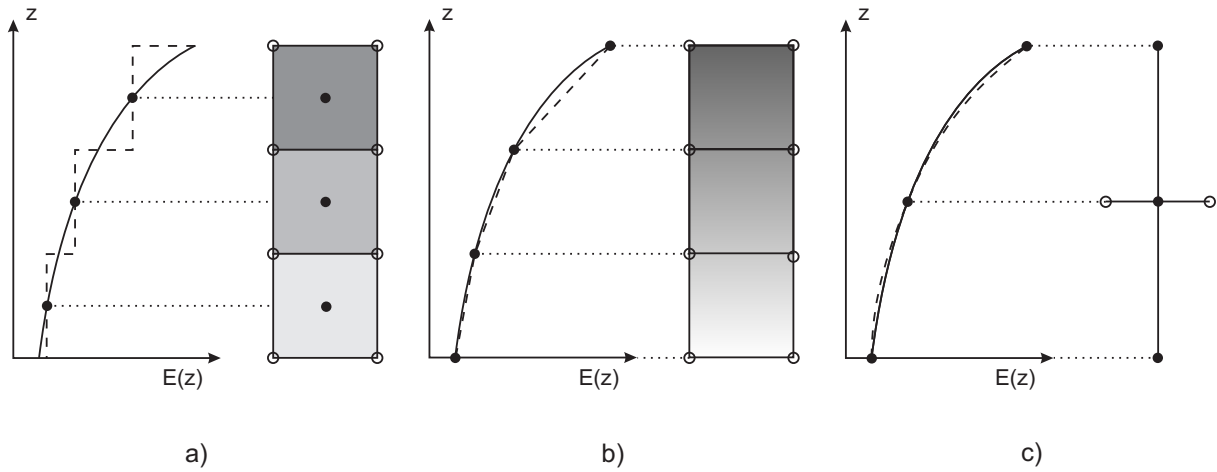


Abbildung 1: Zweidimensionale Darstellung der Diskretisierung einer über die Dicke gradierten Struktur mittels verschiedener Finite Elemente. a) Standard-Kontinuumselemente. b) Gradierte Kontinuumsselemente. c) Plattenelemente mit axiomatischem Dickenansatz. Die gestrichelte Linie gibt jeweils die durch die Diskretisierung erzeugte Näherung des wahren Gradiertungsverlaufes (durchgezogene Linie) an.

gesetz für den linearen Zusammenhang zwischen Wärmestrom und Temperaturgradient,

$$(2) \quad q_i = -\lambda_{ij} \theta_{,j} \quad i, j = x, y, z$$

so folgt mit Gleichung (1)

$$(3) \quad - \int_V \delta \theta_{,i} \lambda_{ij} \theta_{,j} dV + \int_V \delta \theta r dV - \int_{\Gamma_q} \delta \theta \bar{q} d\Gamma = 0$$

In den Gleichungen (2) und (3) sind θ die gesuchte Temperatur und λ_{ij} der Wärmeleitensor, der für gradierte Werkstoffe von einer oder mehreren Koordinaten abhängen kann.

4.1 Standard-Kontinuumsselemente

Entsprechend der Finite Elemente Theorie lautet der Ansatz für die Temperatur θ und ihre Variation $\delta\theta$ im Element

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta(x, y, z) &= N_r(x, y, z) \hat{\theta}_r \\ \delta\theta(x, y, z) &= N_q(x, y, z) \delta\hat{\theta}_q \end{aligned}$$

Hierbei sind N_q und N_r die Ansatzfunktionen; $\delta\hat{\theta}_q$ und $\hat{\theta}_r$ stellen die zugehörigen Knotengrößen dar. Die Indizes q und r laufen von $1 \dots N_n$, mit N_n als Knotenanzahl des Elements. Im Rahmen dieser Arbeit kommen Lagrange-Elemente zur Anwendung. Die entsprechenden Ansatzfunktionen können in einem der zahlreichen Standardwerke zur FEM nachgeschlagen werden, beispielsweise bei Zienkiewicz et al. [13].

Setzt man den Ansatz von Gleichung (4) in Gleichung (3) ein und geht auf eine elementweise Betrachtung über, so

folgt

$$(5) \quad \begin{aligned} & - \delta\hat{\theta}_q^e \underbrace{\int_{V^e} N_{q,i} \lambda_{ij}^e N_{r,j} dV}_{K_{qr}^e} \hat{\theta}_r^e \\ & + \delta\hat{\theta}_q^e \underbrace{\int_{V^e} N_q r^e dV}_{R_q^e} - \delta\hat{\theta}_q^e \underbrace{\int_{\Gamma_q^e} N_q \bar{q}^e d\Gamma}_{Q_q^e} = 0 \end{aligned}$$

oder zusammengefasst

$$(6) \quad \delta\hat{\theta}_q^e : K_{qr}^e \hat{\theta}_r^e = R_q^e - Q_q^e$$

mit

$$(7) \quad \begin{aligned} K_{qr}^e &= \int_{V^e} N_{q,i} \lambda_{ij}^e N_{r,j} dV \\ R_q^e &= \int_{V^e} N_q r^e dV \\ Q_q^e &= \int_{\Gamma_q^e} N_q \bar{q}^e d\Gamma \end{aligned}$$

Die Finite Element Matrizen der einzelnen Elemente müssen abschließend zu den Gesamt-Leitfähigkeits- bzw. Lastmatrizen zusammengebaut werden. Diese Standard-Methode der FEM kann ebenfalls in [13] nachgeschlagen werden.

4.2 Gradierte Kontinuumsselemente

In Ergänzung zum FE-Ansatz für die Temperatur und ihre Variation, siehe Gleichung (4), wird bei gradierten Finiten Elementen eine separate Ansatzfunktion für die Variation der Materialeigenschaften eingeführt, d.h.

$$(8) \quad \lambda_{ij}(x, y, z) = N_m(x, y, z) \hat{\lambda}_{ijm}$$

N_m stellen hierbei die Ansatzfunktionen für die Variation des Wärmeleitensors dar, die im Rahmen eines isoparametrischen Konzepts identisch mit N_q und N_r sind. $\hat{\lambda}_{ijm}$

sind die an den Knoten des Elements vorliegenden Werte des Wärmeleitensors. Der Index m des Ansatzes läuft wiederum von $1 \dots N_n$. Werden Gleichungen (4) und (8) in Gleichung (3) eingesetzt, ergibt sich

$$(9) \quad -\delta \hat{\theta}_q^e \underbrace{\int_{V^e} N_{q,i} \lambda_{ij}^e N_m N_{r,j} dV}_{K_{qr}^e} \hat{\theta}_r^e + \delta \hat{\theta}_q^e \underbrace{\int_{V^e} N_q r^e dV}_{R_q^e} - \delta \hat{\theta}_q^e \underbrace{\int_{\Gamma_q^e} N_q \bar{q}^e d\Gamma}_{Q_q^e} = 0$$

oder zusammengefasst

$$(10) \quad \delta \hat{\theta}_q^e : K_{qr}^e \hat{\theta}_r^e = R_q^e - Q_q^e$$

mit

$$(11) \quad \begin{aligned} K_{qr}^e &= \int_{V^e} N_{q,i} \lambda_{ij}^e N_m N_{r,j} dV \\ R_q^e &= \int_{V^e} N_q r^e dV \\ Q_q^e &= \int_{\Gamma_q^e} N_q \bar{q}^e d\Gamma \end{aligned}$$

Ein Vergleich von Gleichung (11)₁ mit Gleichung (7)₁ macht deutlich, dass sich die Leitfähigkeitsmatrix des gradierten Elements durch die zusätzliche Summation über den Index m von der des Standard-Elements unterscheidet. Nach der Berechnung der Element-Leitfähigkeit ist das Vorgehen jedoch völlig analog zum Standard-Element.

4.3 Finite Plattenelemente – Unified Formulation

In diesem Abschnitt wird nur eine stark verkürzte Herleitung aufgezeigt. Für eine ausführlichere Beschreibung sei der Leser auf [10, 11, 12] verwiesen. Grundlage von axiomatischen Platten- und Schalentheorien ist es, die gesuchte Größe und ihre Wichtungsfunktion mittels bekannter Funktionen $F(z)$ auszudrücken. Diese sind in Abbildung 2 schematisch mit den Notationen für Geometrie und Koordinatensysteme für ein generisches Laminat abgebildet. Um die interlaminaire Kontinuität der Unbekannten an den Schichtgrenzen zu gewährleisten, werden als Dickenfunktionen spezielle Kombinationen von Legendre-Polynomen verwendet.

Der Dickenansatz reduziert das 3D-Problem auf ein Problem in der (x, y) -Ebene, in welcher es unter Zuhilfenahme der Finite Elemente Methode gelöst wird. Der voll diskretisierte Ansatz lautet somit

$$(12) \quad \begin{aligned} \theta^k(x, y, z) &= F_s(z) N_r(x, y) \hat{\theta}_{sr}^k \\ \delta \theta^k(x, y, z) &= F_r(z) N_q(x, y) \delta \hat{\theta}_{\tau q}^k \\ \lambda_{ij}^k(z) &= F_m(z) \lambda_{ij}^k \end{aligned}$$

τ , s und m sind hierin die Summationsindizes, die für τ und s von $1 \dots N_{exp}$ bzw. für m von $1 \dots N_{mat}$ reichen. N_{exp} ist die Ansatzordnung in Dickenrichtung, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit für die Unbekannte und ihre Variation identisch angesetzt wird. N_{mat} ist die unabhängig von N_{exp} wählbare Ansatzordnung für die Variation der Materialeigenschaften. Zu beachten ist,

dass die Lagrangeschen Ansatzfunktionen N_q und N_r für die Plattenelemente nur in der (x, y) -Ebene definiert sind.

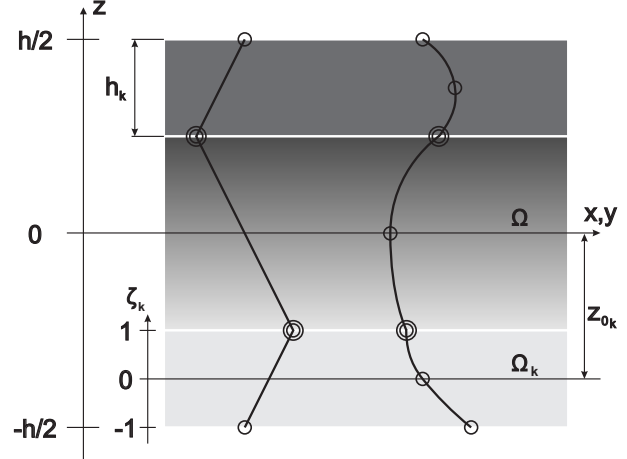


Abbildung 2: Generisches Mehrschichtlaminat mit möglichen (hier: linearen und quadratischen) Ansatzfunktionen in den einzelnen Schichten.

Führt man den Ansatz von Gleichung (12) in die schwache Form der Wärmeleitungsgleichung ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen die finale Form des diskretisierten Gleichgewichts auf der Schichtebene zu

$$(13) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_l} \delta \hat{\theta}_{\tau q}^k \left[- \int_{\Omega^k} \left(N_{q,\alpha} N_{r,\beta} \lambda_{\alpha\beta}^k \int_{h^k} F_\tau F_s F_m dz \right. \right. \\ + N_{q,\alpha} N_r \lambda_{\alpha z}^k \int_{h^k} F_\tau F_{s,z} F_m dz \\ + N_q N_{r,\beta} \lambda_{z\beta}^k \int_{h^k} F_{\tau,z} F_s F_m dz \\ \left. \left. + N_q N_r \lambda_{zz}^k \int_{h^k} F_{\tau,z} F_{s,z} F_m dz \right) d\Omega \hat{\theta}_{sr}^k \right. \\ \left. + \int_{V^k} F_\tau N_q r^k dV - \int_{\Gamma_q^k} F_\tau N_q \bar{q}^k d\Gamma \right] = 0 \end{aligned}$$

Zusammengefasst lässt sich für eine Schicht k schreiben

$$(14) \quad \delta \theta_{\tau q}^k : K_{\tau s q r}^k \theta_{sr}^k = R_{\tau q}^k + Q_{\tau q}^k$$

mit dem *fundamental nucleus* $K_{\tau s q r}^k$. Um von $K_{\tau s q r}^k$ zur Gesamtleitfähigkeitsmatrix zu gelangen, sind folgende Schritte erforderlich: Zuerst wird der fundamental nucleus über die Indizes τ und s zur Schicht spezifischen Leitfähigkeitsmatrix expandiert. Anschließend werden die Schicht spezifischen Leitfähigkeitsmatrizen zur Laminat spezifischen Leitfähigkeit auf Elementebene assembliert. Die Beiträge der einzelnen Plattenelemente werden letztlich zur Gesamtleitfähigkeitsmatrix zusammengefügt. Eine detaillierte Beschreibung des Zusammenbaus kann in [11] nachgelesen werden.

5 NUMERISCHER VERGLEICH DER ELEMENTE

5.1 Untersucher Testfall

Abbildung 3 zeigt die für den Vergleich der verschiedenen Finiten Elemente untersuchte Rechteck-Platte. Die Platte

besteht aus einer einzelnen gradierten Schicht. Als Beispiel einer Hochtemperaturanwendung werden als Komponenten des gradierten Verbundwerkstoffs Monel, eine Nickel-basierte Legierung, sowie die Keramik Zirconia ausgewählt. Die Leitfähigkeiten der beiden isotropen Materialien sind wie folgt gegeben:

$$\lambda_m = 25 \frac{W}{m \cdot K}; \quad \lambda_c = 2.09 \frac{W}{m \cdot K}$$

Die Bestimmung der lokalen, effektiven Materialeigenschaften erfolgt mittels mikromechanischer Modelle. Hierbei haben sich für isotrope, partikelverstärkte Zwei-Phasen-Verbunde, wie das hier betrachtete Monel-Zirconia-FGM, die so genannten *mean field estimates* als geeignet erwiesen. Die effektive Leitfähigkeit ergibt sich nach dem Modell von Hatta and Taya [14] zu

$$(15) \quad \frac{\lambda - \lambda_m}{\lambda_c - \lambda_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \frac{\lambda_c - \lambda_m}{3\lambda_m}}$$

wobei die Indizes m und c die metallische bzw. keramische Phase kennzeichnen. Es wird für die Rechnungen angenommen, dass der Volumenanteil der keramischen Phase V_c folgendem Gesetz gehorcht:

$$(16) \quad V_c = (z/h)^n$$

Durch eine Variation des Exponenten n können somit verschiedene Verläufe für die Gradierung eingestellt werden. Für die Rechnungen wird $n = 2$ gesetzt.

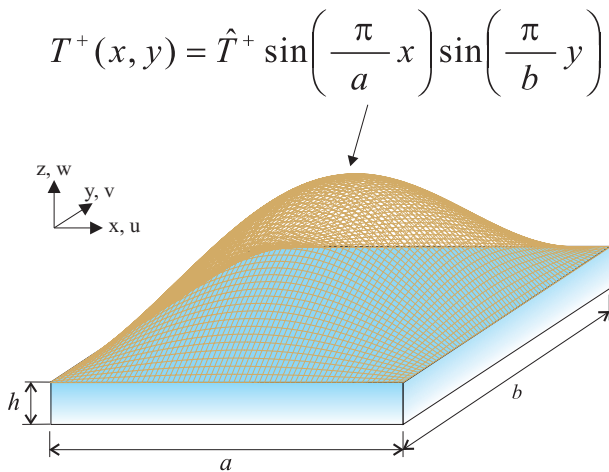


Abbildung 3: Untersuchter Testfall: Rechteck-Platte aus einer gradierten Einzelschicht unter trigonometrischer Temperaturbelastung. Alle Seitenränder werden konstant bei $T = 0$ gehalten.

Die Ober- und Unterseite der Platte unterliegen einer sinusförmig verteilten Temperaturbelastung, siehe Abbildung 3:

$$(17) \quad T = \hat{T} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

\hat{T} ist die Amplitude der verteilten Temperaturlast. An der Oberseite ist $\hat{T}^+ = 1$ und an der Unterseite $\hat{T}^- = 0$ gegeben. Der Plattenrand wird konstant bei einer Temperatur

von $T = 0$ gehalten. a und b bezeichnen die ebenen Abmessungen der Platte sowie h die Dicke. Für die Rechnungen wird $a = b$ sowie $a/h = 10$ gesetzt, was einer moderat dicken Platte entspricht.

Aufgrund der gewählten Randbedingungen kann für das vorliegende Problem mit einem Exponentialansatz in Dickenrichtung eine analytische Lösung gefunden werden, wenn die gradierte Schicht durch eine Vielzahl von Unterschichten mit konstanten Materialeigenschaften approximiert wird. Details hierzu können in [10] nachgelesen werden.

Die Diskretisierung der untersuchten Platte erfolgte für die Plattenelemente mit 8×8 quadratischen Lagrangeschen Elementen sowie für die Kontinuums-elemente mit $8 \times 8 \times 4$ linearen bzw. quadratischen Elementen. Die Variation der Materialeigenschaften wurde bei den Plattenelementen mit einem Dickenansatz neunter Ordnung ($N_{mat} = 9$) berücksichtigt, bei den gradierten Kontinuums-elementen entsprechend des isoparametrischen Konzepts mit linearen bzw. quadratischen Ansätzen.

5.2 Temperaturverteilung

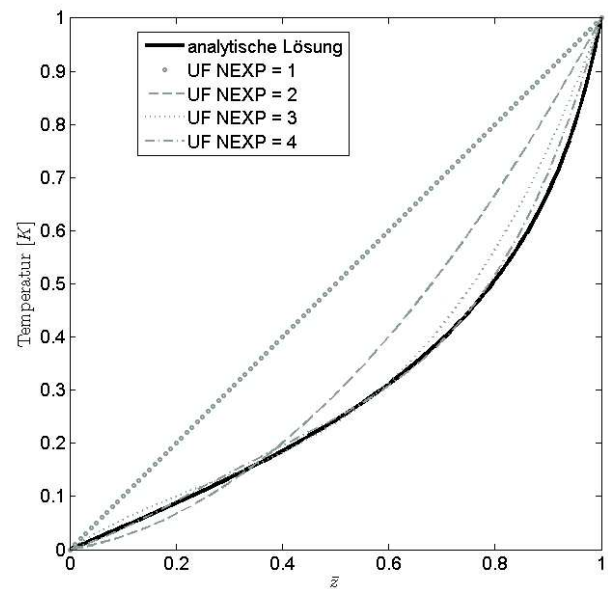


Abbildung 4: Temperaturverteilung über die Dicke im Plattenmittelpunkt für die Plattenelemente (Unified Formulation, UF).

Abbildung 4 zeigt die mit den Finiten Plattenelementen berechnete Temperaturverteilung durch den Plattenmittelpunkt ($x = a/2, y = b/2$) im Vergleich mit der analytischen Lösung. Es ist deutlich zu erkennen, wie die exakte Temperaturverteilung entlang der z -Koordinate mittels der Dickenfunktionen $F_s(z)$ approximiert wird. Zudem fällt auf, dass die Näherungslösung für $N_{exp} \geq 2$ die analytische Lösung mehrfach schneidet, also um die exakte Lösung „schwingt“. Die Abbildung macht deutlich, dass Ansatzfunktionen höherer Ordnung erforderlich sind, um den exakten, stark nichtlinearen Temperaturverlauf wiedergeben zu können. Für einen Ansatz vierter Ordnung ($N_{exp} = 4$) ergibt

Tabelle 1: Temperaturverteilung und ihr relativer Fehler im Plattenmittelpunkt über die Dicke für verschiedene Finite Elemente. Analytische Lösung (AL) wie in [10] berechnet.

| $8 \times 8(\times 4)$ Elemente, $a/h = 10$, $N_m = 9$, $n = 2$ | | | | | | | | | |
|-------------------------------------------------------------------|--------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| \bar{z} | AL | $N_{exp} = 2$ | $N_{exp} = 4$ | $N_{exp} = 6$ | $N_{exp} = 8$ | lin.grad. | qu.grad. | lin.Std. | qu.Std. |
| 0.0 * | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.0872 | 0.0667 (-23.5%) | 0.0906 (+3.9%) | 0.0888 (-1.8%) | 0.0869 (-0.4%) | 0.0986 (+13.0%) | 0.0887 (+1.7%) | 0.0973 (+11.6%) | 0.0973 (+11.6%) |
| 0.4 | 0.1853 | 0.2001 (+8.0%) | 0.1951 (+5.3%) | 0.1837 (-0.8%) | 0.1859 (+0.3%) | 0.2117 (+14.3%) | 0.1882 (+1.6%) | 0.2093 (+13.0%) | 0.2091 (+13.0%) |
| 0.6 | 0.3112 | 0.4001 (+28.6%) | 0.3079 (-1.0%) | 0.3147 (+1.2%) | 0.3104 (-0.3%) | 0.3588 (+15.3%) | 0.3154 (+1.4%) | 0.3554 (+14.2%) | 0.3550 (+14.1%) |
| 0.8 | 0.5063 | 0.6667 (+31.7%) | 0.5163 (+2.0%) | 0.5033 (-0.6%) | 0.5071 (+0.2%) | 0.5927 (+17.1%) | 0.5039 (-0.5%) | 0.5896 (+16.5%) | 0.5890 (+16.3%) |
| 1.0 * | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

* Randbedingungen

sich jedoch bereits eine qualitativ gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

Abbildung 5 stellt die Ergebnisse für die Standard- und gradierten Kontinuumelemente dar. Man erkennt deutlich, dass mit den quadratischen gradierten Elementen der exakte Temperaturverlauf sehr gut wiedergegeben werden kann. Für die linearen gradierten sowie die linearen und quadratischen Standard-Elemente ergibt sich ein quantitativ sehr ähnlicher Verlauf, so dass hier nur eine Kurve für diese drei Elemente abgebildet ist.

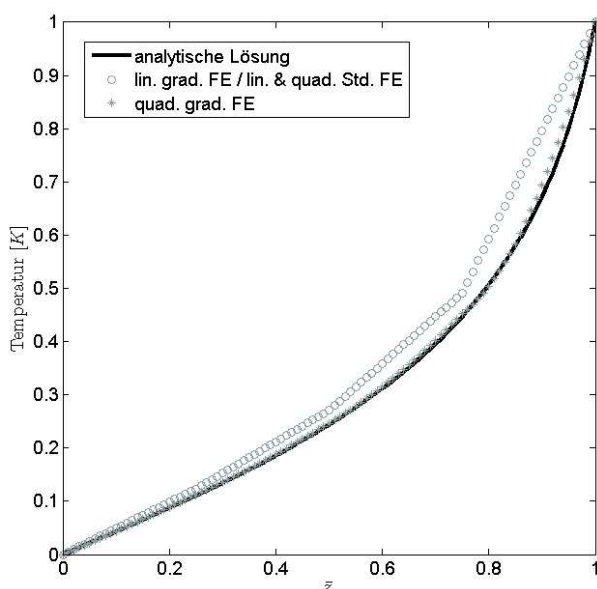


Abbildung 5: Temperaturverteilung über die Dicke im Plattenmittelpunkt für die gradierten und Standard-Kontinuumelemente.

Dieses auf den ersten Blick überraschende Ergebnis lässt sich wie folgt erklären. In den Standard-Elementen stellt sich aufgrund der geringen Dicke des Einzelements ($h^e =$

$h/4$) eine nahezu eindimensionale Wärmeleitung ein, die mit den konstanten Materialeigenschaften zu einem praktisch linearen Temperaturverlauf über z im Element führt. Dieser lineare Verlauf wird von beiden Standard-Elementen gleichermaßen wiedergegeben. Bei den gradierten Elementen ergibt sich die Leitfähigkeitsmatrix als gewichtete Summe der Leitfähigkeiten an den Knoten, vgl. Gleichung (11)₁. Dies bedeutet für das lineare gradierte Element bei einem nur in z -Richtung gradierten Material eine Mittelung der Leitfähigkeiten, die an der Ober- und Unterseite des Elements vorliegen. Bei nicht allzu steilen Materialgradienten ergibt sich somit für das gradierte Element eine ähnliche Leitfähigkeitsmatrix als wenn die im Centroid vorliegenden Eigenschaften für das ganze Element als konstant angenommen worden wären, vergleiche Abbildung 1a und b.

Die zuvor qualitativ anhand der Abbildungen 4 und 5 beschriebenen Zusammenhänge können quantitativ in Tabelle 1 nachvollzogen werden. Besonders deutlich fallen hierbei die nahezu identischen Lösungen für die linearen und quadratischen Standard-Elemente auf sowie die nur geringen Unterschiede der letztgenannten Elemente gegenüber dem linearen gradierten Element. Das quadratische gradierte Element liefert zusammen mit den Plattenelementen höherer Ordnung ($N_{exp} \geq 6$) die genaueste Lösung, wobei bei gleicher Gesamtfreiheitsgradanzahl – das Plattenelement mit $N_{exp} = 8$ und das quadratische gradierte Element haben je neun Freiheitsgrade über die Dicke – die Plattenelemente die genauere Lösung aufweisen.

5.3 Verteilung des Querwärmestroms

Abbildung 6 zeigt die Verteilung des Querwärmestroms q_z über die Dicke im Plattenmittelpunkt für die Finiten Plattenelemente. In der Abbildung ist deutlich das Schwingen der Lösung um die exakte Lösung zu erkennen, wobei die Amplitude der „Schwingung“ mit zunehmender Ansatzordnung N_{exp} deutlich abnimmt. Die Ursache für dieses Phänomen ist direkt im Dickenansatz zu finden. Für das hier betrachtete isotrope, funktional gradierte Material hängt der Querwär-

mestrom einzig vom Temperaturgradienten $\theta_{,z}$ ab. Letzterer ergibt sich zu

$$(18) \quad \theta_{,z} = (F_s(z) N_r(x, y))_{,z} \hat{\theta}_{sr} = F_{s,z} N_r \hat{\theta}_{sr}$$

und hängt somit direkt von der Ableitung der Dickenfunktion $F_{s,z}$ ab. Die bereits in der Temperaturverteilung durch F_s enthaltene Schwingung wird durch die Ableitung amplifiziert und ergibt den in Abbildung 6 erkennbaren Verlauf für q_z .

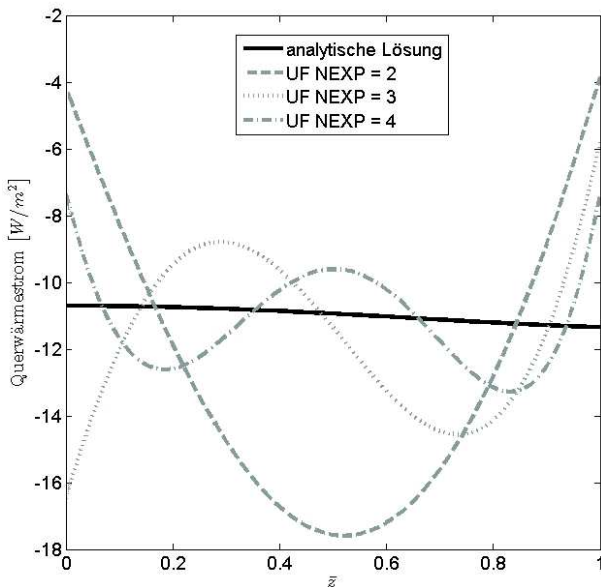


Abbildung 6: Verteilung des Querwärmestroms über die Dicke im Plattenmittelpunkt für die Plattenelemente (Unified Formulation, UF).

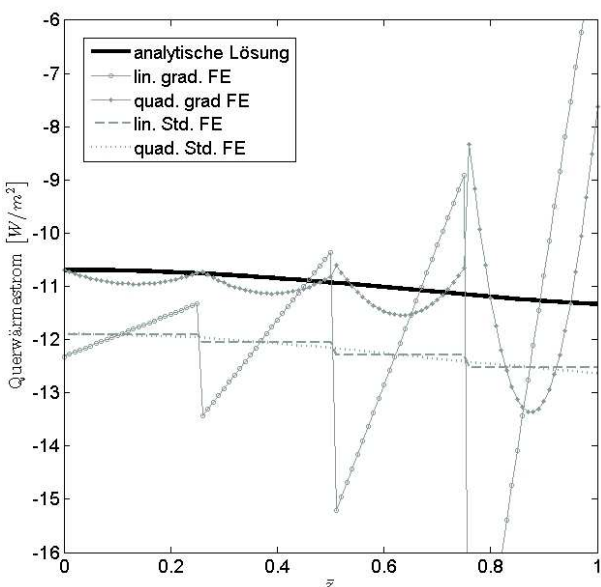


Abbildung 7: Verteilung des Querwärmestroms über die Dicke im Plattenmittelpunkt für die gradierten und Standard-Kontinuums-elemente.

In Abbildung 7 ist der Verlauf des Querwärmestroms für die gradierten und Standard-Kontinuums-elemente dargestellt. Die Standard-Elemente geben den Trend im Verlauf von q_z gut wieder, allerdings mit einem relativ großen Versatz ($\approx 10\%$) gegenüber der exakten Lösung. Die Sprünge im Verlauf sind klein bzw. für die quadratischen Standard-Elemente graphisch nicht mehr feststellbar. Die gradierten Finiten Elemente zeigen in der Berechnung des Querwärmestroms hingegen große Fehler, die sich jedoch wie folgt erklären lassen. Die gradierten Elemente berechnen analog zu den Standard-Elementen einen konstanten bzw. linearen Temperaturgradienten $\theta_{,z}$ im Element. Im Gegensatz zu den Standard-Elementen, die konstante Materialeigenschaften aufweisen, wird dieser Temperaturgradient jedoch in den gradierten Elementen mit einem linearen bzw. quadratischen Verlauf der Wärmeleitfähigkeit multipliziert, so dass sich der in Abbildung 7 erkennbare sprunghafte Verlauf für q_z ergibt.

Zusammenfassend muss festgestellt werden, dass die zuvor präsentierten Ergebnisse für den Querwärmestrom q_z für keines der Finiten Elemente zufriedenstellend sind. Für die Plattenelemente kann die Bandweite der Schwingung mit zunehmender Ordnung N_{exp} zwar deutlich reduziert werden und der relative Fehler gegenüber der exakten Lösung liegt für $N_{exp} \geq 12$ unter $\pm 1\%$. Die mit der hohen Ansatzordnung verbundene zusätzliche Rechenzeit und die nach wie vor erkennbaren Oszillationen (hier nicht gezeigt) sind jedoch nicht akzeptabel. Die gradierten Kontinuums-elemente erweisen sich bei der hier gewählten, recht groben Diskretisierung in Dickenrichtung (vier Elemente) als völlig ungeeignet zur Bestimmung des Querwärmestroms, obwohl die Temperaturverteilung mit dem quadratischen gradierten Element bereits recht genau erfolgt. Einzig die Standard-Elemente erlauben eine „konservative“ Abschätzung des Wärmestroms, die jedoch für die gewählte Diskretisierung einen zu großen Fehler aufweist. Im folgenden Kapitel wird daher kurz auf zwei einfache und effiziente Methoden zur Bestimmung des Wärmestroms eingegangen.

5.4 Verbesserte Berechnung des Querwärmestroms

Least-Squares-Fit für die UF Eine Betrachtung der Verläufe des Querwärmestroms für die Plattenelemente verschiedener Ordnung (vgl. Abbildung 6) zeigt, dass diese die exakte Lösung in genau N_{exp} Punkten schneiden. Aus der Finite Elemente Theorie ist bekannt, dass abgeleitete Größen wie Spannungen und Wärmeströme an gewissen Punkten im Element besonders genau berechnet werden können. Diese auch als *superkonvergent* bezeichneten Punkte zeichnen sich durch höhere Konvergenzraten aus als es die Ansatzordnung eigentlich erwarten ließe und fallen häufig mit den Gauss-Punkten der numerischen Integration zusammen. Ein Blick auf die Koordinaten der Schnittpunkte der Näherungslösung mit der analytischen Lösung zeigt, dass diese mit zunehmender Ansatzordnung mit den Koordinaten der Gauss-Punkte zusammenfallen, siehe Abbildung 8. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um die Gauss-Punkte, die für eine exakte Integration eines Polynoms vom Grad N_{exp} notwendig sind, d.h. $N_{GP} = (N_{exp} + 1)/2$, sondern um $N_{GP} = N_{exp}$ über z verteilte Gauss-Punkte.

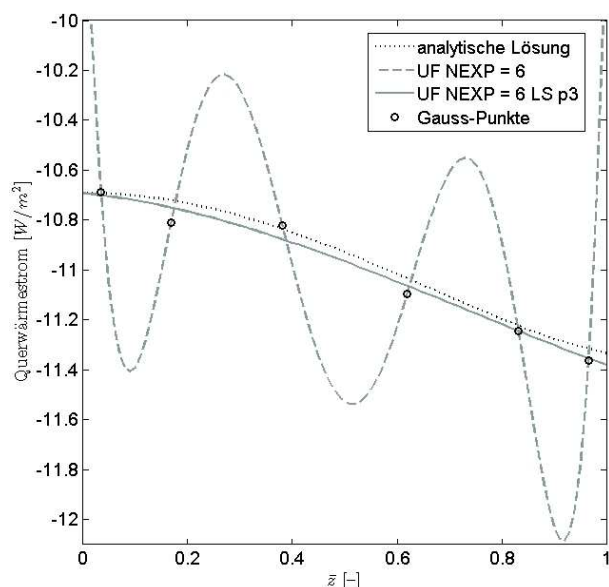


Abbildung 8: Bestimmung verbesserter Werte für den Querwärmestrom mittels Fehler-Quadrat-Methode.

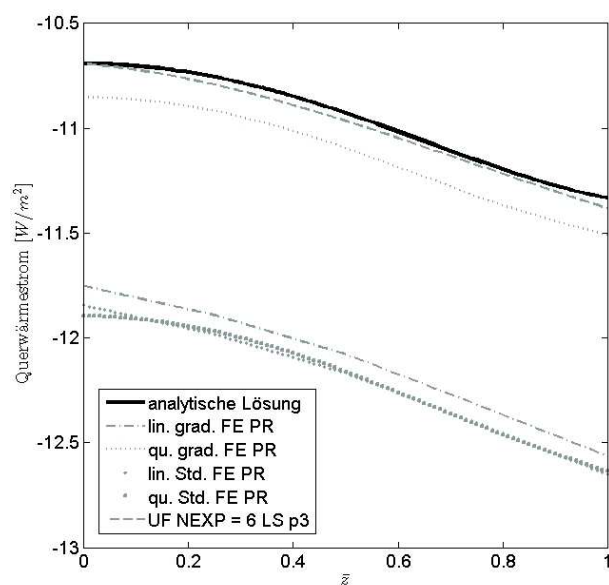
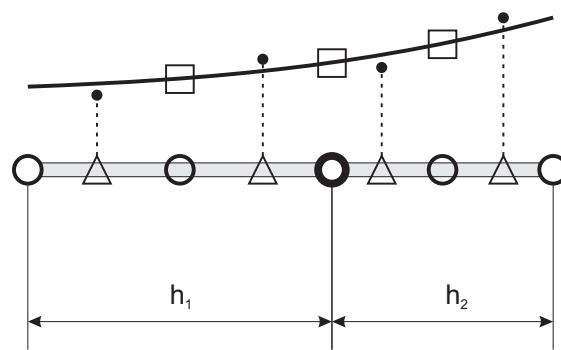


Abbildung 9: Mittels Postprocessing ermittelte Verteilung des Querwärmestroms für die verschiedenen Elemente.

Prinzipiell könnte man mit Hilfe der N_{exp} superkonvergenten Punkte bereits durch einfache lineare Inter- bzw. Extrapolation genauere Werte des Querwärmestroms ermitteln. Um einen glatten Verlauf zu erreichen, ist es jedoch – in Anlehnung an das Vorgehen im nächsten Abschnitt – sinnvoller, mittels der Fehler-Quadrat-Methode (Least-Squares) ein Polynom zu bestimmen, welches die Werte an den Gauss-Punkten am besten annähert, vgl. Abbildung 8. Um von der Fehler-Quadrat-Methode praktischen Nutzen ziehen zu können, muss dabei die Ordnung des Näherungspolynoms $p \leq N_{exp} - 2$ gewählt werden. Betrachtet man

den für ein Plattenelement mit $N_{exp} = 6$ und mit kubischem Näherungspolynom ($p = 3$) bestimmten Querwärmestrom in Abbildung 9, so erkennt man die nun sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung.

Patch-Recovery nach Zienkiewicz und Zhu Das Patch-Recovery-Verfahren von Zienkiewicz und Zhu [15] basiert ebenfalls auf superkonvergenten Gauss-Punkten. Im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen Methode werden jedoch nicht die Gauss-Punkte innerhalb eines einzelnen Elements betrachtet, sondern die Gauss-Punkte um den Knoten im Zentrum eines Element-Patches, siehe Abbildung 10. Durch die Verwendung der superkonvergenten Punkte mehrerer Elemente ist es nun mittels Fehler-Quadrat-Methode möglich, eine Kurve (1D)/ (Hyper-)Fläche (2D/3D) vom selben Grad wie die Ansatzfunktionen des Finiten Elementes zu bestimmen, welche die in den Gauss-Punkten bestimmten Werte des Wärmestroms optimal annähert. Die abgeleitete Größe kann also durch eine Funktion beschrieben werden, deren Grad um Eins höher als durch die Ansatzfunktionen vorgegeben ist. Eine genauere Beschreibung des Vorgehens kann in [15] nachgelesen werden.



Element-Patch zweier quadratischer 3-Knoten-Elemente

— Quadratisches Näherungspolynom

○ Element-Knoten

● Patch-Center-Knoten

△ Superkonvergente Gauss-Punkte

□ mit Näherungspolynom bestimmte Werte an den inneren Knoten

Abbildung 10: Schematische Darstellung des Patch-Recovery-Verfahrens im 1D-Fall.

Wird die Patch-Recovery-Technik (PR) auf die gradierten und Standard-Kontinuums-elemente angewendet, ergibt

sich der in Abbildung 9 dargestellte Verlauf für q_z . Hierbei kann für die linearen Standard-Elemente eine geringfügige Verbesserung festgestellt werden. Einerseits werden durch das Patch-Recovery die kleinen Sprünge im ursprünglichen Verlauf geglättet. Andererseits geht der ursprüngliche, elementweise konstante Verlauf in einen genaueren linearen Verlauf über. Für die quadratischen Standard-Elemente sind praktisch keine Änderungen feststellbar. Insgesamt bleibt für die Standard-Elemente der schon im ursprünglichen Verlauf erkennbare Parallelversatz zur exakten Lösung bestehen. Dies folgt einerseits aus der sehr ungenauen Beschreibung des Temperaturfeldes, vgl. Abbildung 5 und Tabelle 1, und zum anderen aus der sehr groben Approximation der Gradierung. Die Werte des Querschnittes an den für das Patch-Recovery verwendeten Gauss-Punkten sind daher schon von Beginn an stark fehlerbehaftet.

Bei den gradierten Elementen macht sich das Patch-Recovery noch deutlicher positiv bemerkbar. Die im ursprünglichen Verlauf zu beobachtenden großen Sprünge zwischen den Elementen konnten für beide gradierte Elemente beseitigt werden. Beide Elemente zeigen nun den korrekten Trend im Wärmestromverlauf, das quadratische gradierte Element weist sogar nur einen geringen Versatz (+1.5%) gegenüber der analytischen Lösung auf. Das im Vergleich zu den Standard-Elementen geringfügig bessere Verhalten des linearen gradierten Elementes lässt sich – bei praktisch identischer Temperaturverteilung – nur als Folge der genaueren Beschreibung der kontinuierlich variierenden Materialeigenschaften erklären.

6 DISKUSSION

Anhand der in Kapitel 5 vorgestellten Ergebnisse lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Die kontinuierliche Variation der Wärmeleitfähigkeit führt in funktional gradierten Strukturen selbst für einfache Wärmeleitprobleme zu einem stark nichtlinearen Temperaturverlauf.
- Diese ausgeprägte Nichtlinearität erfordert hinsichtlich der Finite Element Diskretisierung allgemein die Wahl von Ansatzfunktionen höherer Ordnung, da mit linearen Ansätzen der wahre Temperaturverlauf nur unzureichend oder nur bei sehr feiner Vernetzung wiedergegeben werden kann.
- Sowohl die Plattenelemente mit Dickenansätzen höherer Ordnung ($N_{exp} \geq 6$) als auch die quadratischen gradierten Kontinuumsselemente können die Variation der Wärmeleitfähigkeit sehr gut erfassen und das Temperaturfeld genau wiedergeben. Hierbei erweisen sich die Plattenelemente bei gleicher Gesamtfreihitsgradanzahl als genauer.
- Die linearen, gradierten sowie die linearen und quadratischen Standard-Elemente zeigen für den hier

untersuchten Testfall eine nahezu identische, im Vergleich zu den zuvor genannten Elementen aber ungenaue Temperaturverteilung. Die Ähnlichkeit der Temperaturverläufe wird Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein. Insbesondere ist zu klären, ob dieses Phänomen auch bei einem Wärmeleitproblem quer zur Gradierung oder bei instationärer Wärmeleitung auftritt.

- Die ohne spezielles Postprocessing bestimmten Verläufe für den Querschnitt q_z sind für keines der vorgestellten Elemente zufriedenstellend. Erst eine Berechnung mittels Least-Squares-Fit bzw. Patch-Recovery führt zu genauen Ergebnissen. Es sollte daher zukünftig untersucht werden, in wie weit Finite Elemente basierend auf gemischten Variationsprinzipien, in denen die Querschnittsströme als Unbekannte auftreten, hier zu einem besseren Lösungsverhalten beitragen können.

7 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In diesem Beitrag wurden drei verschiedene Finite Elemente zur Berechnung des dreidimensionalen, stationären Wärmeleitproblems in funktional gradierten Strukturen vorgestellt und am Beispiel einer gradierten Rechteck-Platte unter sinusförmig verteilter Temperaturlast miteinander verglichen. Die Ergebnisse zeigen, dass die auf einem axiomatischen Dickenansatz (für Temperatur und Gradierung) beruhenden Finiten Plattenelemente und die gradierten Finiten Kontinuumsselemente (mit einer separaten Ansatzfunktion für die Variation der Wärmeleitfähigkeit) gleichermaßen geeignet sind, um die Variation der Materialeigenschaften zu berücksichtigen und die Temperaturverteilung genau wiederzugeben. Die Berechnung der Querschnittsströme führt allerdings nur unter Zuhilfenahme geeigneter Postprocessing-Methoden zu akkuraten Ergebnissen. Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sollten daher Finite Elemente basierend auf gemischten Variationsprinzipien, wie beispielsweise das Reissner Mixed Variational Theorem [16], sein. Diese behandeln die abgeleiteten Größen (Querspannungen, Querschnittstrom) als zusätzliche Unbekannte und sollten daher zu besseren Ergebnissen führen.

Danksagung

Für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeiten im Rahmen des Graduiertenkollegs 1095/1 „Aerothermodynamische Auslegung eines Scramjetantriebes für zukünftige Raumtransportsysteme“ sei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) an dieser Stelle herzlich gedankt.

Literatur

- [1] Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, and R.G. Ford. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Technology and Industrial Arts. Springer, 1999.
- [2] V. Birman and L.W. Byrd. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 60:195–215, 2007.
- [3] G.N. Praveen and J.N. Reddy. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35:4457–4476, 1998.
- [4] J.N. Reddy. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:663–684, 2000.
- [5] J.N. Reddy and Z.-Q. Cheng. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20:841–855, 2001.
- [6] Z.-H. Jin. An asymptotic solution of temperature field in a strip of functionally graded material. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 29(7):887–895, 2002.
- [7] L.F. Qian and R.C. Batra. Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless petrov-galerkin method. *Computational Mechanics*, 35:214–226, 2005.
- [8] M.H. Santare and J. Lambros. Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, 67:819–822, 2000.
- [9] J.-H. Kim and G.H. Paulino. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *Journal of Applied Mechanics*, 69:502–514, 2002.
- [10] S. Brischetto, R. Leetsch, E. Carrera, T. Wallmersperger, and B. Kröplin. Thermo-mechanical bending of functionally graded plates. *Journal of Thermal Stresses*, 31(3):286–308, 2008.
- [11] R. Leetsch, T. Wallmersperger, and B. Kröplin. Thermomechanical modeling of functionally graded plates. submitted to *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2008.
- [12] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10(3):215–296, 2003.
- [13] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, and P. Nithiarsu. *The Finite Element Method*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 6th edition, 2005.
- [14] H. Hatta and M. Taya. Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite. *Journal of Applied Physics*, 58:2478–2486, 1985.
- [15] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992.
- [16] E. Reissner. On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:193–198, 1986.