

LARGE-EDDY-SIMULATION DER WASSERSTOFFEINSPIRZUNG IN EINE TURBULENTE ÜBERSCHALLKANALSTRÖMUNG – EINE NUMERISCHE HERAUSFORDERUNG

Ch. Schaupp, R. Friedrich

Lehrstuhl für Aerodynamik, Technische Universität München,
Boltzmannstr. 15, 85748 Garching bei München, Deutschland

Zusammenfassung

In Scramjetantrieben für luftatmende Raumtransportsysteme muss einer Überschallströmung Wärme zugeführt werden. Dies geschieht bei den meisten Konzepten durch chemische Reaktion, wobei eine verlustarme und wirkungsvolle Einmischung des Brennstoffs unabdingbar ist. Allerdings ist das heutige Wissen über die Details turbulenter Verbrennungsvorgänge in Überschallströmungen unvollständig. Sowohl präzise Messungen turbulenter Korrelationen im Überschall als auch genaue numerische Vorhersagen zur Klärung der offenen Fragen erweisen sich nach wie vor als enorm schwierig. Ziel dieser Arbeit ist es, die Methode der Grobstruktursimulation (LES) auf ein generisches, geometrisch vereinfachtes Modell der Durchströmung einer Scramjetbrennkammer anzuwenden. Dabei wird Wasserstoff aus einem spannweiten Schlitz in eine turbulente Überschallkanalströmung eingeblasen; die sich einstellende Wechselwirkung von Strahl und Hauptströmung soll untersucht werden. Als Diskretisierungsverfahren kommen ein von sechster Ordnung genaues, kompaktes, zentrales Finite-Differenzenschema im Raum, sowie ein fünfstufiges Runge-Kutta-Verfahren von vierter Ordnung in der Zeit zum Einsatz.

1. EINLEITUNG

Eine große Herausforderung beim Entwurf einer Überschallbrennkammer besteht darin, die schnelle und wirksame Vermischung von Brennstoff und Oxidator herbeizuführen und innerhalb einer Brennkammer von sinnvoller Länge Zündbedingungen herzustellen. Meist geschieht dies durch die Injektion eines gasförmigen Brennstoffes durch Öffnungen in der Wandung des Strömungskanals oder in keil- oder pylonförmigen Körpern („Injektoren“), die in die Überschallströmung hineinragen. Hierbei muss eine Abwägung der Verluste durch die beim Injektionsvorgang hervorgerufenen Stoßsysteme und der Verluste durch die Wandreibung erfolgen. Insbesondere im experimentellen Bereich findet sich ein großer Anzahl von Untersuchungen zu verschiedenen Formen der Injektionsöffnung und zur Injektion unter verschiedenen Winkeln zur Hauptströmung. Obwohl die Mischungsvorgänge in der allgemeineren Strömungssituation eines in eine Querströmung eindringenden Strahls (*jet in supersonic crossflow*) zusammen mit der Eindringtiefe des Strahls wesentlichen Einfluß auf die Reaktion des Brennstoffes mit Luftsauerstoff und damit auf die Betriebseigenschaften dieses Antriebssystems haben, sind zur Zeit nur wenige Untersuchungen der Überschallsituation mit zeitgenauen numerischen Methoden bekannt.

1.1. Modellproblem und Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Methode der Grobstruktursimulation (Large-Eddy-Simulation, LES) an der generischen Konfiguration der Injektion eines ebenen Strahls in eine Überschallkanalströmung zu testen. Wie im Bild 1 gezeigt, wird ein geometrisch vereinfachtes Modell einer

Brennkammer betrachtet, dessen numerische Behandlung auf kartesischen Rechengittern erfolgen kann. Ein Gemisch von H_2 und N_2 wird durch einen spannweiten Schlitz senkrecht zur Wand in eine Luftströmung injiziert. Im Kanal finden chemische Reaktion und Wärmefreisetzung statt. Dabei wird hier eine unendlich schnelle chemische Reaktion zu Grunde gelegt; die Gültigkeit dieses Reaktionsmodells ist bei Verbrennungsprozessen im Überschallbereich fragwürdig, seine Verwendung wird hier jedoch als erster Schritt gesehen, um die Auswirkung der Wärmefreisetzung auf die Struktur des turbulenten Strömungsfeldes zu untersuchen. Bei den Simulationen kommen Diskretisierungsverfahren hoher Genauigkeitsordnung sowohl im Raum wie auch in der Zeit zur Anwendung.

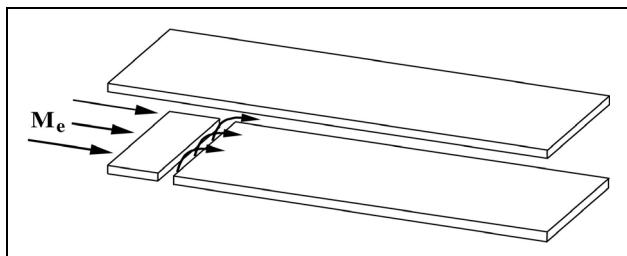


BILD 1. Statistisch zweidimensionales Modellproblem:
Injektion eines ebenen Freistrahls in eine Kanalströmung

Von den Rechnungen werden detaillierte Informationen über die Strömungsphysik erwartet, die infolge der Strömungsablösung, der Wechselwirkung zwischen Verdichtungsstößen und turbulenten Strukturen sowie der Wechselwirkung von Verbrennungsvorgängen mit der

Turbulenz und den gekühlten Wänden von sehr komplizierter Natur ist. Auf Schrägeinblasung oder die Ausdehnung auf eine statistisch dreidimensionale Konfiguration wird verzichtet, da daraus keine neuen Erkenntnisse für die Vorhersagemethode (LES) erwartet werden.

1.2. Allgemeine Bemerkungen zum „Jet in Crossflow“

Für inkompressible Strömung existiert eine große Anzahl numerischer und experimenteller Studien an kreisrunden und ebenen quereingeblasenen Freistrahlen. Einen Überblick über ältere Arbeiten gibt Margason [1]. Von Yuan et al. [2], Muppidi und Mahesh [3] und Jones und Wille [4] sowie Wegner et al. [5] und Denev et al. [6] sind neuere Arbeiten zur DNS und LES dieser Strömung bekannt.

Numerische Untersuchungen der Überschallsituation durch Lösen der gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen unter Verwendung verschiedener Turbulenzmodelle wurden beispielsweise von Chenault et al. [7], Sriram [8], Grasso und Magi [9], Gerlinger et al. [10] und anderen für unterschiedliche Formen der Injektionsöffnung durchgeführt. Srinivasan [11] führte zusätzlich Detached-Eddy-Simulationen (DES) des Strömungsproblems durch. Eine LES der Quereinblasung von Wasserstoff in eine Überschallströmung und nachfolgende Verbrennung mit einem Finite-Volumen-Verfahren von 2. Ordnung wurde durch von Lavante et al. [12] vorgestellt. Numerische Verfahren von hoher Genauigkeit kommen in der Grobstruktursimulation von Kawai und Lele [13] zum Einsatz. Die Konfiguration wurde auch in zahlreichen experimentellen Arbeiten untersucht, so zum Beispiel durch Santiago und Dutton [14] für eine kreisrunde Injektionsöffnung, und von Spaid und Zukoski [15] für einen spannweitenigen Schlitz. Vor dem Strahl bilden sich eine Bugwelle, eine Ablösezone und ein entsprechender zweiter schräger Stoß aus. Der injizierte Strahl expandiert beim Eintritt in die Hauptströmung, wobei sich eine charakteristische Stoßstruktur (*barrel shock*) ausbildet, und er tritt am Ende der Struktur durch eine Machscheibe, die einen erheblichen Impulsverlust verursacht. Daneben dürfen, wie bei Powrie et al. [16] für die Injektion durch einen spannweitenigen Schlitz beschrieben, beim Wiederanlegen der Strahlströmung an die Wand längsgerichtete Wirbel vom Görtler-Typ erwartet werden. Je nachdem, ob der Strahl an den Druck in der Hauptströmung angepasst oder unterexpandiert ist, findet man unterschiedliche Strömungsbilder; auch die Dicke der Grenzschicht, in die injiziert wird, ist hierfür von Bedeutung. Für die Eindringtiefe des Strahls können empirisch begründete Beziehungen angegeben werden, vgl. z. B. Orth et al. [17]. Über Unterschiede bei der Injektion unterschiedlicher gasförmiger Brennstoffe (mit deutlich verschiedener Molmasse) bei ähnlichem Impulsstromverhältnis berichten Ben-Yakar et al. [18].

Experimentelle, numerische und theoretische Arbeiten zeigen, daß die Vermischungsvorgänge in freien Scherschichten weniger wirkungsvoll ablaufen, wenn die Machzahl zunimmt. Der Austausch von Energie zwischen den turbulenten Strukturen wird weniger effizient, und bei gleichzeitiger Freisetzung von Wärme geht die Wachstumsrate der Scherschicht weiter zurück. Auch Mahle [19], Mahle et al. [20] und Friedrich [21] beobachteten dieses Verhalten.

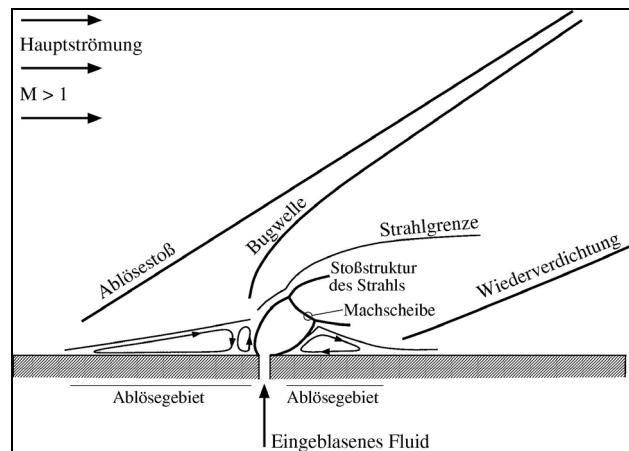


BILD 2. Schematische Darstellung des in eine Überschallströmung eingeblasenen Strahls, nach [9,10,15,18, 52,53]

2. PHYSIKALISCHES MODELL

Die Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible reagierende Strömungen werden zu Grunde gelegt. Der hier verwendete Code ist in der Lage, ein aus mehreren Spezies zusammengesetztes Gemisch thermisch idealer Gase zu behandeln, somit gilt die Zustandsgleichung des idealen Gasgemisches,

$$(1) \quad p = \rho RT \quad \text{mit der Gaskonstante } R.$$

Im vorliegenden Fall werden der Transport und die Reaktion verschiedener Spezies, wie bei Mahle [19] für kompressible Mischungsschichten geschehen, mit Hilfe eines Mischungsbruches ξ modelliert. Die Entwicklung des Mischungsbruches gehorcht dabei der Transportgleichung für einen passiven Skalar. Es wird eine unendlich schnell ablaufende chemische Ein-Schritt-Reaktion, $2 H_2 + O_2 \rightarrow 2 H_2O$, angenommen. Der verwendete Gleichungssatz lautet:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \tau_{ij}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} (p u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \sum_k h_{s,k} Y_k V_{k,j} \right) \\ &\quad - \sum_k \Delta h_{f,k}^0 \omega_k \\ \frac{\partial(\rho \xi)}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \xi) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen ρ die Dichte, u_i die Geschwindigkeitskomponenten in den drei Raumrichtungen, p den Druck, T die Temperatur und $E = e_s + u_i^2/2$ die Totalenergie, gebildet mit der fühlbaren inneren Energie e_s . Die fühlbare Enthalpie wird mit h_s , der viskose Spannungstensor mit τ_{ij} bezeichnet. $\Delta h_{f,k}^0$ ist die

Bildungsenthalpie der Spezies k , ω_k ihre Reaktionsrate. Nimmt man die Gültigkeit des Fickschen Gesetzes und eine konstante, für alle Spezies identische Schmidtzahl Sc an, so erhält man für den Diffusionsfluss für eine Gaskomponente k die folgende vereinfachte Form:

$$(3) \quad \rho Y_k V_{k,j} = -\rho D_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} = -\frac{\mu}{Sc} \frac{d Y_k}{d \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j}$$

(Y_k ist der Massenbruch der Komponente k , $V_{k,j}$ ihre Diffusionsgeschwindigkeit, D_k der Diffusionskoeffizient, W_k die Molmasse)

3. NUMERISCHE METHODE

3.1. Rechengebiet

Eine realistische Simulation der jet-in-crossflow-Konfiguration muss den Seitenkanal, der zur Injektionsöffnung führt, mitberücksichtigen. Das Rechengebiet für die Simulation der Injektion besteht daher aus zwei miteinander verbundenen, quaderförmigen Teilgebieten (hier als Haupt- und Seitenkanal mit den Indizes 1 und 2 bezeichnet), die jeweils durch ein kartesisches Punktgitter diskretisiert werden. Dabei entsteht beiderseits der Injektionsöffnung eine scharfkantige Ecke. Die Ausdehnung des Rechengebietes in der Spannweiterichtung ist in beiden Teilgebieten gleich. Für die Injektion in die Überschallkanalströmung entspricht das Verhältnis der Querschnittsflächen von Haupt- und Seitenkanal somit dem Verhältnis ihrer halben Kanalhöhen und beträgt hier $h_1/h_2 = 32$.

3.2. Diskretisierung und LES-Verfahren

Beiträge konvektiver Nichtlinearitäten zum LES-Schließungsproblem werden mit dem ADM-Verfahren (Approximate Deconvolution Method nach Stolz und Adams [22] in einer Modifikation nach Mathew et al. [23]) behandelt. Bei diesem Verfahren wird das Strömungsfeld in regelmäßigen Abständen einer Tiefpassfilterung unterzogen. Die räumlichen Ableitungen werden sowohl für konvektive wie auch für diffusive Beiträge mit einem kompakten, tridiagonalen, zentralen Finite-Differenzen-Verfahren nach Lele [24], von sechster Ordnung genau, berechnet. Die Zeitintegration wird durch einen expliziten Runge-Kutta-Algorithmus von vierter Ordnung in fünf Teilschritten nach Kennedy et al. [25] bewerkstelligt. Konvektive und diffusive Stabilitätskriterien nach Müller [26] werden zur Bestimmung des maximal zulässigen Zeitschritts verwendet.

3.3. Temperaturabhängige Stoffeigenschaften

Bei der Durchströmung einer Brennkammer mit hohen Geschwindigkeiten und Freisetzung von Wärme durch chemische Reaktion muss mit großen Temperaturunterschieden zwischen gekühlter Wand und dem Kernbereich der Strömung gerechnet werden, so dass eine Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen und der molekularen Transporteigenschaften des Fluids berücksichtigt werden muss. Das Verhalten der spezifischen Wärmen einzelner Spezies wird wie in der Arbeit von Mahle [19] durch temperaturabhängige Polynome dargestellt, wobei die Temperatur des Fluids

während der Simulation aus der Totalenergie durch Aufsuchen der Nullstelle der Gleichung

$$(4) \quad f(T) = \sum_k h_{s,k} Y_k + \frac{u_i^2}{2} - RT \sum_k \frac{Y_k}{W_k} - E$$

bestimmt wird; der Algorithmus von Brent [27] wird hier angewandt, das Verfahren erwies sich bislang als robust. Durch die Bibliothek **EGlib** von Ern und Giovangigli [28] werden molekulare Transporteigenschaften für die einzelnen Gaskomponenten bereitgestellt. Für die Diffusionsvorgänge wird in allen Fällen eine konstante Schmidtzahl von $Sc = 0,7$ angenommen.

3.4. Modellierung der Wärmefreisetzung

Die Modellierung des gefilterten Wärmefreisetzungsterms

$$(5) \quad \bar{\omega} = -\sum_k \overline{\Delta h_{f,k}^0 \omega_k}$$

erfolgt nach Mahle [19] und Mellado et al. [29]. Hierfür wird die gefilterte PDF des Mischungsbruches benötigt, die als Betafunktion modelliert wird. Für diese wird die erforderliche Feinstrukturvarianz des Mischungsbruches durch ein Gradientenmodell abgeschätzt. Außerdem erfordert die Modellierung von Gl. (5) die Kenntnis der gefilterten Skalardissipation, deren nichtaufgelöster Anteil ebenfalls über ein Modell vom Smagorinsky-Typ approximiert wird. Zur genauen Vorgehensweise siehe Mahle [19].

3.5. Randbedingungen

Am Einlass von Haupt- und Seitenkanal sind jeweils physikalisch sinnvolle, ggf. zeitlich veränderliche Randbedingungen aufzuprägen. In der Einströmebene des Hauptkanals wird daher eine vollentwickelt turbulente Strömung angenommen, und das turbulente Feld wird dort einer in Längsrichtung periodischen Kanalsimulation entnommen. Direkte numerische Simulationen der turbulenten Überschallkanalströmung wurden u.a. von Coleman et al. [30] sowie von Lechner et al. [31] und Foysi [32] durchgeführt. Periodizität in Hauptströmungsrichtung wird dabei durch eine Volumenkraft erzeugt, die die Strömung treibt. Auch am Einlass des Seitenkanals wurde diese Vorgehensweise vorgesehen, dort kann aber auch ein laminares, zuvor errechnetes Profil angenommen werden – die Entscheidung muss auf Grund der im Hauptkanal vorliegenden Reynoldszahl und des realisierbaren Querschnittsverhältnisses getroffen werden. Bei den in dieser Arbeit gewählten Reynoldszahlen bleibt grundsätzlich auch die Möglichkeit der Durchführung einer direkten numerischen Simulation gewahrt, die resultierenden absoluten Kanalhöhen, somit auch die Gitterweite und die absolute Zeitschrittgröße, sind dann allerdings sehr gering.

Die hier durchgeführten Simulationen bestehen aus drei bzw. vier simultan ablaufenden, jeweils durch Gebietszerlegung parallelisierten Prozessen. Die Skizze in Bild 3 zeigt die logische Anordnung und die Verknüpfung der Gitterblöcke. Diese Prozesse wurden mit Hilfe des MPI-Protokolls gekoppelt.

Um die massengemittelten Zustände in den Ein- und Ausströmebenen vor Beginn einer aufwendigen gekoppelten Rechnung abschätzen zu können, wurde eine

vereinfachte reibungsfreie Untersuchung [33] der Einblasung in die Überschallströmung in einem Kanal mit adiabaten Wänden durchgeführt. Weitere Anhaltspunkte für die richtige Parameterwahl werden aus einer Abschätzung der Eindringtiefe des Strahls und seines Widerstands nach Spaid und Zukoski [15] gewonnen.

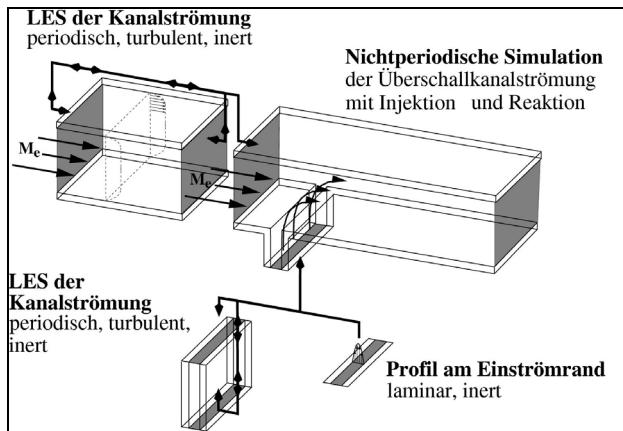


BILD 3. Numerische Konfiguration: Erzeugung turbulenter Zuströmbedingungen und Simulation der Injektion.

Die Kenntnis zumindest der über den jeweiligen Stromfaden gemittelten Zustände in den Einströmebenen, die dazu führen, dass im Hauptkanal bei Wärmefreisetzung und Massenzufuhr die Überschallströmung erhalten bleibt und sich gleichzeitig das charakteristische Strömungsfeld des *jet in supersonic crossflow* ausbildet, ist erforderlich, um bereits zuvor die Simulation der vollentwickelten Überschallkanalströmung, die die Zuströmbedingungen liefert, durchführen zu können. Von letzterer wird verlangt, dass sie auf einem an den Injektionsfall angepassten Rechengitter durchgeführt wird, und bereits bei Beginn der Injektion einen statistisch stationären Zustand erreicht hat. Diese Vorarbeit nahm für eine Überschallkanalströmung im Hauptkanal bei einer Machzahl von $M = u_m/c_w = 3,1$ (gebildet mit der massengemittelten Geschwindigkeit u_m und der Schallgeschwindigkeit an der Wand c_w) und einer Reynoldszahl $Re_r \approx 456$ bereits etwa zwei Monate Rechenzeit in Anspruch.

Nachdem zur Simulation der beschriebenen kompressiblen Strömungssituation Finite-Differenzen-Verfahren verwendet werden, deren Übertragungsverhalten im Wellenzahlraum auch die korrekte Beschreibung der Fortpflanzung akustischer Wellen im Fluid erlaubt, sind die Randbedingungen für die Rechnung so zu wählen, dass akustische Wellen nicht in unphysikalischer Weise an offenen Gebietsrändern reflektiert werden. Im Kernbereich der Überschallkanalströmung kann es nicht zu einer Fortpflanzung von akustischer Information stromauf kommen, im wandnahen Bereich jedoch existieren Bereiche subsonischer Strömung, wo dies möglich ist. Zur Vermeidung von Reflexionen werden Ein- und Ausströmrandbedingungen auf Grundlage der charakteristischen Zerlegung der Navier-Stokes-Gleichungen von Sesterhenn [34] und Poinsot und Lele [35] verwendet. Die in der Arbeit von Mahle [19] auf Speziesgemische ausgedehnte

Charakteristikenformulierung wurde hier für den konservativen Variablenatz ($\rho, \rho u_i, \rho E, \rho \xi$) formuliert.

Am Einlassrand werden viskose und nichtviskose Beiträge getrennt behandelt. In jedem Teilschritt der zeitlichen Integration werden die einlaufenden charakteristischen Wellen der periodischen Simulation entnommen und in die sich räumlich entwickelnde Strömung eingespeist. Unter- und Überschallrandbedingung können mit der implementierten Methode vereinheitlicht behandelt werden. Die Amplituden der akustischen Wellen lauten in der verwendeten Formulierung

$$(6) \quad X^\pm = (u \pm c) \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho c} \pm \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Diffusive Beiträge werden mit Hilfe einer Reihe von ‚Ghost Cells‘ stromauf der Einlassesebene bestimmt. Laminare Tests ohne Injektion zeigen, dass dieses Verfahren allein für sich genommen nicht zu einer stationären Strömung im Hauptkanal führt; es kommt zu einem Driften des mittleren Profils. Für die beschriebene Behandlung der diffusiven Beiträge ist dies nachteilig, daher wird den eingespeisten Wellen ein von Poinsot und Veynante [36] beschriebener Relaxationsterm hinzugefügt, für die eingespeiste akustische Welle bedeutet dies

$$(7) \quad X^+ = X_{\text{per}}^+ + K_+ \cdot (u - u_{\text{ref}}).$$

In Bereichen des Auslassquerschnitts, in denen normal zur Ausströmebene eine lokale Machzahl von $M=1$ unterschritten wird, existieren einlaufende akustische Wellen X^- .

Wird die dort in das Gebiet einlaufende Charakteristik als verschwindend angenommen, so erhält man eine vollständig nichtreflektierende Randbedingung, die allerdings wiederum ein Driften des mittleren Feldes erlaubt. Poinsot und Lele [35] schlagen vor, für die einlaufende Welle den Ausdruck

$$(8) \quad X^- = K \cdot (p - p_\infty)$$

anzusetzen und so den Einfluss der Umgebung (stromab des Ausströmrandes) zu modellieren. So können ein stationärer Zustand und gleichzeitig eine reflektionsarme Randbedingung sichergestellt werden. Von der Wahl des Koeffizienten K und des Referenzdrucks p_∞ hängt die Reflektivität dieses Randes ab; der Referenzdruck kann über eine Impulsbilanz abgeschätzt werden, die über die Oberfläche des gesamten Rechengebiets gezogen wird.

Die Kopplung zweier Gitter in der Injektionsebene erfolgt über beiderseits davon angeordnete ‚Ghost Cells‘, die es erlauben, die Differentiation und Filterung in jedem der Blöcke mit dem inneren Differenzen- und Filterschema durchzuführen. Es findet hier gegenwärtig keine Interpolation statt, die ‚Ghost Cells‘ können dem Rechengitter exakt zugeordnet werden.

Alle Kanalwände sind mit einer Haftbedingung versehen, außerdem isotherm, gekühlt und massedicht, was bei der Betrachtung einer im stationären Betrieb arbeitenden Scramjet-Brennkammer als gerechtfertigt angenommen

werden kann. Die hier beschriebenen Rechnungen gehen alle von einer Wandtemperatur von $T_w = 700$ K aus. Es kommt weder zu einer Diffusion in das Wandmaterial noch zu einer katalytischen Reaktion an der Wand – im Hinblick auf eine reale Brennkammer sind die letzten beiden Annahmen sicher überdenkenswert, erfordern dann aber auch eine Kenntnis der verwendeten Materialien. Formelmäßig findet man nun an der Wand

$$(9) \quad \rho Y_k V_{k,z} = 0$$

bzw. in vereinfachter Form bei Verwendung eines Mischungsbruches und unter der Annahme konstanter Schmidtzahl Sc

$$(10) \quad \mu \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad \text{im Wandpunkt.}$$

3.6. Rechengitter

Obwohl die LES-Methode eine Reduktion der Gitterpunktzahlen gegenüber einer direkten numerischen Simulation erlaubt, sollte das Strömungsfeld nahe der Kanalwand so gut aufgelöst werden, dass die Gitterweite dort knapp unterhalb der Wandeinheit liegt. Eine uniforme Punkteverteilung wird nur in der Spannweitenrichtung verwendet, in wandnormaler Richtung wird das Gitter im Wandbereich verfeinert. Um den durch die Verwendung von Interpolationsverfahren in die Lösung eingetragenen Fehler zu vermeiden, wird bei der Kopplung von Haupt- und Seitenkanal eine exakte Übereinstimmung der Gitter in der Injektionsebene verlangt.

Die im Raum verwendeten Finite-Differenzen-Verfahren von hoher Genauigkeitsordnung verlangen außerdem, daß die Änderung der Gitterweite von Punkt zu Punkt im Bereich weniger Prozent liegt und die Abbildung des strukturierten, aber nicht äquidistanten Gitters im physikalischen Raum auf das äquidistante Einheitsgitter durch glatte Funktionen geschieht. Auch über die Injektionsöffnung hinweg soll dies gewährleistet sein. In dem vorliegenden Projekt kommt ein von Lui [37] für sehr genaue aeroakustische Simulationen der stoßinduzierten Schallerzeugung verwendetes Verfahren zum Einsatz, bei dem die relative Streckung f_{gr} als Summe skalierter und gegeneinander verschobener Gaußscher Fehlerfunktionen vorgeschrieben und zweimal integriert wird.

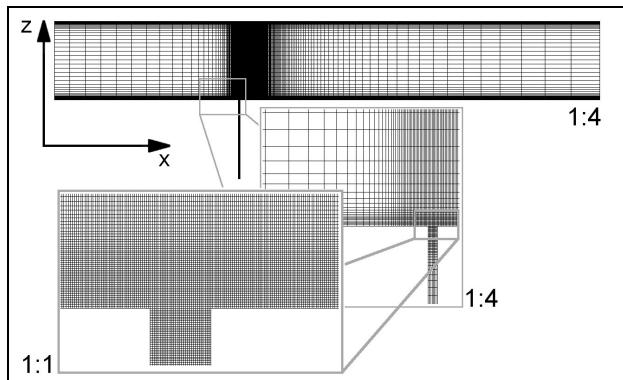


BILD 4. Rechengitter für die Injektion in eine Überschallkanalströmung; die turbulente Reynoldszahl der Zuströmung beträgt $Re_t \approx 456$, das viskose Längemaß wird in Wandnähe aufgelöst.

Aktuell werden in wandnormaler Richtung des Hauptkanals sechs, in Längsrichtung des Hauptkanals acht skalierte und verschobene Funktionen addiert, um den gewünschten Verlauf zu erhalten:

$$(11) \quad f_{\text{gr}} = \frac{1}{2} \sum_i R_i \left(\operatorname{erf}(\sigma_i(\xi - \xi_i)) \pm 1 \right)$$

Hierbei bezeichnet $0 \leq \xi \leq 1$ die Koordinate im Rechenraum, R_i , σ_i und ξ_i sind die Parameter des Gitters.

Neben einer glatten Gitterverteilung erlangt man dabei auch direkte Kontrolle über die relative Streckung. Bild 4 zeigt ein Gitter für die Injektion in die Überschallströmung, das mit diesem Verfahren erzeugt wurde. In der Abbildung ist angegeben, welcher Anteil der tatsächlich vorhandenen Gitterpunkte in dem jeweiligen Ausschnitt gezeigt ist. Die Abbildungen 5 und 6 illustrieren die Variation der Gitterweite in den beiden nicht-periodischen Richtungen.

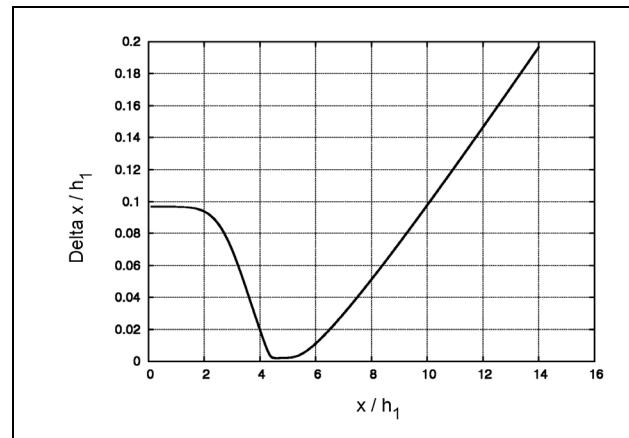


BILD 5. Variation der Gitterweite in Längsrichtung x des Injektionsgebietes, für das in Bild 4 gezeigte Gitter. Die Mitte der Injektionsöffnung liegt bei etwa $x/h_1 = 4,61$.

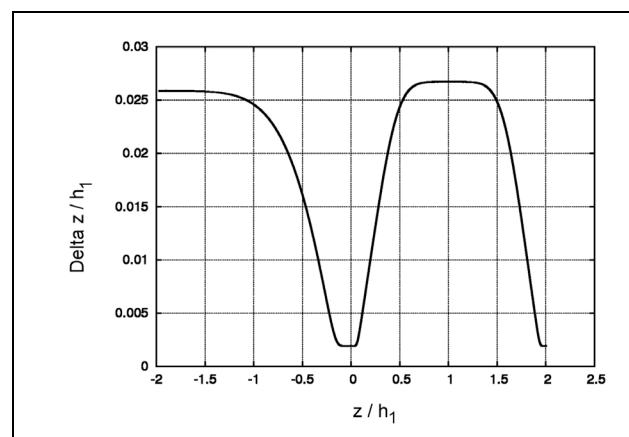


BILD 6. Variation der Gitterweite in der wandnormalen Richtung z des Hauptkanals, für das Gitter in Bild 4. Die Ebene der unteren Wand, durch welche die Einblasung erfolgt, liegt bei einer normierten Koordinate $z/h_1 = 0$.

3.7. Sonderbehandlung des Eckbereichs

Die Ecken des Seitenkanals, besonders der Bereich um die stromab gelegene scharfe Ecke, haben sich bereits in der Vergangenheit zum Beispiel bei Untersuchungen zur Strömung über eine Kavität bei Verwendung von Verfahren hoher Genauigkeitsordnung als Quelle numerischer Instabilität erwiesen. In einem Gebiet, das durch einen Polygonzug begrenzt ist, weist die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen durch die scharfen Ecken der Begrenzung hervorgerufene Singularitäten auf, die auch Gegenstand aktueller Forschung sind, siehe zum Beispiel Kweon [38,39] sowie Kweon und Kellogg [40]. Gloerfelt [41] beispielsweise benutzte für die Simulation der Strömung über eine Kavität eine zusätzliche Filterung im Bereich der rechtwinkligen Ecken. Die vorliegende Arbeit verwendet in einem Eckbereich geringer Ausdehnung einen Gaußschen Filter der Weite $4 \Delta x$. Die explizite Filteroperation

$$(12) \quad \bar{f}_i = f_i - w_{c,i} \sum_{j=-4}^4 c_j f_{i+j}$$

mit den Koeffizienten c_j (Filterschema nach Cook und Cabot [42]) wird mit einer Gewichtung $w_{c,i}$ versehen, die nahezu überall im Rechengebiet mit Ausnahme eines kleinen Bereichs um die Ecken verschwindet, wie in Bild 7 für einen Ausschnitt um die Injektionsöffnung gezeigt. Diese Gewichtung hat den Verlauf einer Gaußschen Fehlerfunktion, die mit dem radialen Abstand von der Ecke abfällt.

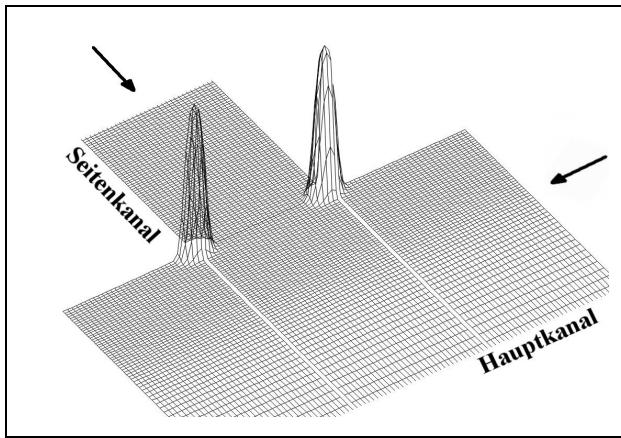


BILD 7. Gewichtungsfunktion $0 \leq w_c(x, z) \leq 1$ für eine explizite Filterung des Strömungsfeldes im Bereich der Ecken des Seitenkanals.

3.8. Künstliche Viskosität

Die Anwendung eines zentralen Finite-Differenzenschemas hoher Genauigkeitsordnung auf ein Strömungsfeld, in dem sich Unstetigkeiten (z. B. Verdichtungsstöße in einer Lösung der Euler-Gleichungen) bilden, führt zum wohlbekannten Auftreten unphysikalischer Oszillationen der Lösung beiderseits der Unstetigkeit.

Im Kontext der Navier-Stokes-Gleichungen variieren die Strömungsgrößen stetig über einen Verdichtungsstoß hinweg, die Gradienten sind allerdings meist so groß, dass ihr Verlauf auf dem verwendeten Rechengitter (konzipiert für einen mehrdimensionalen, komplexen

Strömungsfall) bei behandelbarer Punktezahl nicht mehr dargestellt werden kann.

Man findet (siehe bspw. die Darstellungen in Sesterhenn [43], Friedrich [44] und Becker [45]) für die Geschwindigkeitsgradientendicke eines Stoßes

$$(13) \quad \delta_u = \lambda \frac{(u_2 - u_1)c^*}{(u_1 - c^*)(u_2 - c^*)}$$

mit der Differenz der Geschwindigkeit über den Stoß $u_2 - u_1$, der kritischen Schallgeschwindigkeit c^* und einem Längemaß

$$(14) \quad \lambda = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{4/3\mu + \mu_d}{\rho_1 u_1}.$$

γ bezeichnet das Verhältnis der spezifischen Wärmen, μ und μ_d die Scher- und Volumenviskositäten, ρ_1 die Dichte vor dem Stoß.

Das Hinzuzaddieren einer künstlichen Volumen- und Scherviskosität kann genutzt werden, um die Stoßdicke hinreichend zu erhöhen. Von Neumann und Richtmyer [46] nutzten als erste diesen Gedanken. Cook und Cabot [47] setzen sich zum Ziel, unaufgelöste Verdichtungsstöße mit Hilfe einer künstlichen Volumenviskosität auflösbar zu machen. Fiorina und Lele [48] erweitern dieses Verfahren um einen künstlichen Diffusionskoeffizienten, um auch Kontaktunstetigkeiten behandeln zu können; Ziel ist die Anwendung der Methode auf Strömungen, in denen es zu Wechselwirkungen von Stößen, Turbulenz und Reaktion kommt. Kawai und Lele [49] formulieren eine Erweiterung der Methode für nicht-uniforme Gitter.

In dem vorliegenden Strömungsfall kommt es nicht nur zu schrägen Verdichtungsstößen, sondern auch zur Bildung einer Machscheibe, siehe Bild 2. Strömungsprobleme mit Schrägstößen wurden in der Vergangenheit erfolgreich mit dem ADM-Verfahren numerisch simuliert, so zum Beispiel von Loginov et al. [50]. Es zeigte sich jedoch, dass der hier vorliegende senkrechte Stoß (Machscheibe) eine weitergehende Behandlung erforderlich macht. Wie bei Kawai und Lele [13] soll dies hier durch Einführen einer Hyperviskosität geschehen. Der viskose Spannungstensor τ_{ij} wird in der folgenden modifizierten Form verwendet:

$$(15) \quad \tau_{ij} = 2(\mu + \mu^a)S_{ij} + \left(\mu_d + \mu_d^a - \frac{2}{3}(\mu + \mu^a) \right) S_{kk} \delta_{ij},$$

$$\text{wobei } S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

den Deformationstensor und δ_{ij} das Kroneckersymbol bezeichnen. Die künstlichen Viskositäten sind

$$(16) \quad \mu^a = C_\mu \eta \quad \text{und} \quad \mu_d^a = C_{\mu_d} \eta \quad \text{mit}$$

mit einer Größe η , die auf der vierten Ableitung der Scherrate S , $S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$, basiert:

$$(17) \quad \eta = \rho \cdot \sqrt{\Delta x^6 \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \Delta y^6 \frac{\partial^4 S}{\partial y^4} + \Delta z^6 \frac{\partial^4 S}{\partial z^4}}$$

Der Querstrich stellt eine Gaußsche Filterung nach Cook und Cabot [42] dar.

In Bild 8 ist für einen eindimensionalen Testfall (Stoßwellenrohr) gezeigt, wie sich die Geschwindigkeit in der Nähe des Verdichtungsstoßes mit und ohne Addition einer Hyperviskosität nach Gl. (16) und (17) verhält.

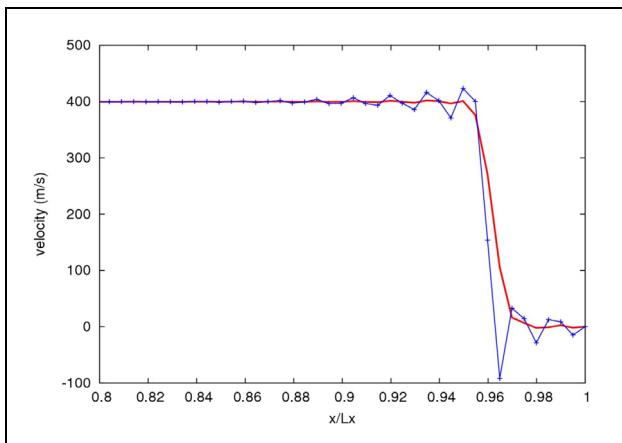


BILD 8. Test der Hyperviskosität nach Gl. (16) und (17) für ein Stoßwellenrohr bei einem Dichteverhältnis von 1:8 ; das Fluid ist Luft bei einer Temperatur von 700 K, die Stoßmachzahl beträgt $M_s \approx 1,55$. Das Gebiet wurde mit 200 äquidistant verteilten Gitterpunkten aufgelöst. Die Dämpfungswirkung der Hyperviskosität wird ersichtlich (breite rote Linie); die blaue Linie mit Symbolen entstammt einer Rechnung ohne Hyperviskosität.

Künstliche molekulare Transporteigenschaften dieser Art sind attraktiv, da sie auf einfache Weise implementiert werden können. Nachteilig wirkt sich aus, dass die Veränderung von Viskosität, Wärmeleitfähigkeit,... Einfluss auf die diffusiven Stabilitätskriterien für die explizite Zeitintegration hat und der maximal zulässige Zeitschritt beim Auftreten von Verdichtungsstößen erheblich reduziert wird.

4. ERGEBNISSE

4.1. Vollentwickelte Überschallkanalströmung

Um saubere Einströmbedingungen für den Injektionsfall zu erhalten, wurde zunächst die vollturbulente Kanalströmung, ausgehend von reskalierten Strömungsfeldern aus den Arbeiten von Foysi [32], simuliert; der Kanal wird von Luft mit

$$\xi = 0, Y_{O2} = 0,23, Y_{N2} = 0,77$$

durchströmt.

Im Gegensatz zu den früheren Arbeiten ist nun aber das Verhältnis der spezifischen Wärmen temperaturabhängig, die molekularen Transporteigenschaften werden aus einem realistischen Modell bestimmt, und eine hinreichend niedrige Reynoldszahl kann nur durch Verringerung der Abmessungen erreicht werden; hier ergibt sich eine halbe Kanalhöhe von

$$h_{\text{per}} = h_1 = 4,19 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Die Simulation der Strömung wurde nach dem Reskalierungsvorgang bis zum Erreichen eines statistisch stationären Zustandes fortgesetzt. Hierfür wurden 12 CPUs des Höchstleistungsrechners Altix 4700 des Leibniz-Rechenzentrums benutzt; die Laufzeit dieser Rechnung betrug etwa 17500 CPU-Stunden. Sie wurde auf einem Gitter mit $168 \times 96 \times 192$ Punkten in (x,y,z)-Richtung ausgeführt, dessen Punktverteilung in der wandnormalen Richtung z auch für den Injektionsfall verwendet wird. Bild 9 zeigt die axiale Geschwindigkeitskomponente im turbulenten Strömungsfeld in einem wandparallelen Schnitt. Der Abstand dieser Schnittebene von der Wand beträgt $\Delta z^+ = 8,0$, um die typischen kohärenten wandnahen Strukturen hervortreten zu lassen.

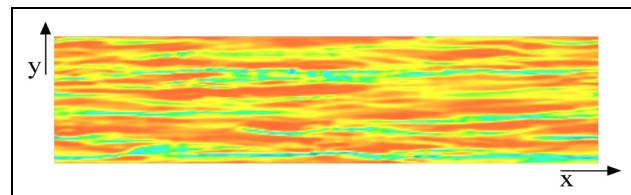


BILD 9. Wandnahe Strukturen in einer turbulenten Überschallkanalströmung bei $M = u_m/c_w = 3,1$ und $Re_r \approx 456$, im wandparallelen Schnitt. Gezeigt ist die axiale Geschwindigkeitskomponente.

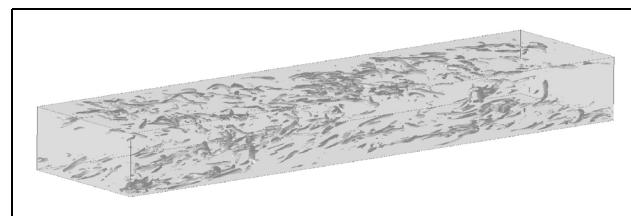


BILD 10. Turbulente Strukturen in der Überschallkanalströmung. Gezeigt ist eine Isofläche des Q-Kriteriums, $Q = (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij})/2$.

4.2. Injektion in die Überschallkanalströmung

Eine LES wird durchgeführt für die Injektion mit chemischer Reaktion bei einer Machzahl in der Zuströmung von $M = u_m/c_w = 3,1$ und einem Verhältnis der Kanalhöhen von $h_1/h_2 = 32$. Die Gase in Haupt- und Seitenkanal sind folgendermaßen zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, Y_{O2,1} = 0,23, Y_{N2,1} = 0,77, Y_{H2,1} = 0, \\ \xi_2 &= 1, Y_{O2,2} = 0, Y_{N2,2} = 0,983125, Y_{H2,2} = 0,016875. \end{aligned}$$

Dabei entspricht der Anströmzustand im Hauptkanal einem Mischungsbruch von $\xi = 0$, im Seitenkanal einem Wert von $\xi = 1$. Die Gebietslängen von Haupt- und Seitenkanal und periodischem Kanal lauten:

$$\begin{aligned} L_{x,1} &= 4,524 \pi h_1, \quad L_{x,2} = 2,003 h_1, \quad L_{x,\text{per}} = 5,172 \pi h_1, \\ L_{y,1} &= \dots, \quad L_{y,2} = \dots, \quad L_{y,\text{per}} = \frac{4}{3} \pi h_1, \\ h_1 &= 4,19 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad h_2 = h_1/32 = 1,309375 \cdot 10^{-5} \text{ m} \end{aligned}$$

Zur Diskretisierung wurden folgende Gitterpunktzahlen jeweils in Längs-, Spannweiten- und Wandnormalenrichtung gewählt:

Hauptkanal: 768 x 96 x 192 Punkte, 24 x 2 CPUs

Seitenkanal: 192 x 96 x 32 Punkte, 2 x 2 CPUs

Um zu vermeiden, dass es nach dem Start der Simulation zu einem langen transienten Vorgang kommt, wurde für die gegebene Geometrie und Parameterwahl zunächst von Förster [51] mit einer statistischen Methode (RANS), ausgehend von Einlaßprofilen, die der LES der Überschallkanalströmung entnommen wurden, ein zeitlich gemitteltes Feld errechnet. Dieses Strömungsfeld wurde auf das weiter oben beschriebene kartesische Rechengitter für die Grobstruktursimulation interpoliert; es wird nun aber zu Beginn der Grobstruktursimulation an den Einströmrändern nicht vollständig mit dem instantanen Feld der dort angekoppelten, vollentwickelten Überschallkanalströmung übereinstimmen, was für die Randbedingung von Nachteil ist. Daher wurde das gemittelte Feld am Einlass von Haupt- und Seitenkanal in einem gewissen Bereich mit dem periodisch fortgesetzten, vollentwickelt turbulenten Strömungsfeld bzw. dem laminaren Profil überlagert. Die Abbildungen 11 und 12 zeigen instantane Strömungsfelder für die Injektion mit anschließender chemischer Reaktion.

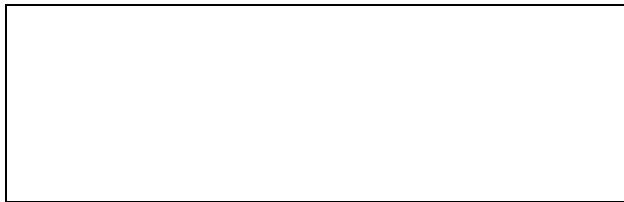


BILD 11. Numerisches Schlierenbild der Injektion in die Überschallströmung. Das gesamte Rechengebiet ist sichtbar. Um einen Einfluss der Randbedingungen auf die Wechselwirkung von Strahl und Querströmung möglichst auszuschließen, befinden sich die Ränder in großem Abstand von der Injektionsöffnung.

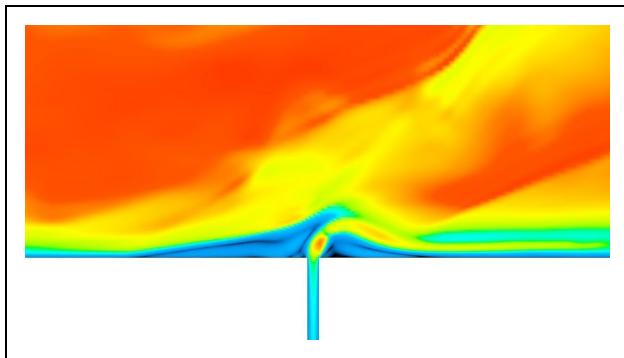


BILD 12. Schnitt durch das Feld der lokalen Machzahl, in wandnormaler Richtung, Ausschnitt in der Nähe des Einblaseschlitzes. Die Ablösegebiete vor und hinter dem injizierten Strahl, das Wiederauflösen des Strahls an die Wand, das Expandieren des eingeblasenen Gasgemisches nach dem Austritt aus dem Seitenkanal und die entstehende kleine Machscheibe werden sichtbar.

5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Eine numerische Methode für die Simulation der Injektion eines Freistrahls in eine Überschallkanalströmung unter der Annahme eines Gasgemisches wurde vorgestellt. Ergebnisse für die Zuströmung aus einer vollturbulenten Überschallkanalströmung und erste Ergebnisse für einen Injektionsfall mit (unendlich schnell ablaufender) Reaktion des eingeblasenen Wasserstoffs mit dem Luftsauerstoff liegen vor. Bei den hier gezeigten Arbeiten handelt es sich um ein laufendes Projekt, die Rechnungen sind bislang nicht abgeschlossen.

Neben der Grobstruktursimulation der Injektion in die Überschallkanalströmung bei einer Machzahl von 3,1 wird auch die Simulation des Unterschallfalles bei einer Machzahl von 0,5 vorbereitet. Die die Zuströmbedingungen liefernde Kanalströmung besitzt in diesem Fall eine turbulente Reynoldszahl von etwa $Re_t \approx 200$. Ziel ist es, die Unterschiede bei der Injektion in die Überschall- und in die Unterschallströmung bei gleichem Impulsstrom- und Massenstromverhältnis zu untersuchen.

Von April 2005 bis März 2008 wurden die vorgestellten Arbeiten innerhalb des Graduiertenkollegs 1095/1 „Aerothermodynamische Auslegung eines Scramjet-Antriebssystems für zukünftige Raumtransportsysteme“ gefördert. Die numerischen Simulationen wurden auf dem Höchstleistungsrechner Altix 4700 (HLRB II) des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Garching bei München durchgeführt.

Schrifttum

- [1] Margason, R.J.: Fifty years of jet in crossflow research. No. 534 in AGARD Conference Proceedings, 1-1 to 1-41 (1993)
- [2] Yuan, L.L., Street, R.L., Ferziger, J.H.: Large-eddy simulations of a round jet in crossflow. Journal of Fluid Mechanics 379, 71-104 (1999)
- [3] Muppudi, S., Mahesh, K.: Study of trajectories of jets in crossflow using direct numerical simulations. Journal of Fluid Mechanics 530, 81-100 (2005)
- [4] Jones, W.P., Wille, M.: Large-eddy simulation of a plane jet in a crossflow. International Journal of Heat and Fluid Flow 17(3), 296-306 (1996)
- [5] Wegner, B., Huai, Y., Sadiki, A.: Comparative study of turbulent mixing in jet in cross-flow configurations using LES. International Journal of Heat and Fluid Flow 25, 767-775 (2004)
- [6] Denev, J.A., Fröhlich, J., Bockhorn, H.: Direct numerical simulation of a transitional jet in crossflow with mixing and chemical reactions. In: Fifth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, 1243-1248. Garching, Germany (2007)
- [7] Chenault, C.F., Beran, P.S., Bowersox, R.D.W.: Numerical investigation of supersonic injection using a Reynolds-stress turbulence model. AIAA Journal 37(10), 1257-1269 (1999)
- [8] Sriram, A.T.: Numerical simulations of transverse injection of plane and circular sonic jets into turbulent

- supersonic crossflows. Ph.D. thesis, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore (2003)
- [9] Grasso, F., Magi, V.: Simulation of transverse gas injection in turbulent supersonic air flows. AIAA Journal 33(1), 56-62 (1995)
- [10] Gerlinger, P., Algermissen, J., Brüggemann, D.: Numerical simulation of mixing for turbulent slot injection. AIAA Journal 34(1), 73-78 (1996)
- [11] Srinivasan, R.: Improved understanding and control of high-speed jet interaction flows. Ph. D. Thesis, Texas A&M University (2005)
- [12] von Lavante, E., Zeitz, D., Kallenberg, M.: Numerical simulation of supersonic airflow with transverse hydrogen injection. Journal of Propulsion and Power 17(6), 1319-1326 (2001)
- [13] Kawai, S. and Lele, S.K.: Mechanisms of jet mixing in a supersonic crossflow: a study using large-eddy simulation. CTR Research Briefs, Stanford University, 353-365 (2007)
- [14] Santiago, J.G., Dutton, J.C.: Velocity measurements of a jet injected into a supersonic crossflow. Journal of Propulsion and Power 13(2), 264-273 (1997)
- [15] Spaid, F.W., Zukoski, E.E.: A study of the interaction of gaseous jets from transverse slots with supersonic external flows. AIAA Journal 6(2), 205-212 (1968)
- [16] Powrie, H.E.G., Ball, G.J., East, R.A.: Comparison of the interactions of two and three dimensional transverse jets with a hypersonic free stream. No. 534 in AGARD Conference Proceedings, pp. 20-1 to 20-8 (1993)
- [17] Orth, R.C., Schetz, J.A., Billig, F.S.: The interaction and penetration of gaseous jets in supersonic flow. NASA CR-1386 (1968)
- [18] Ben-Yakar, A., Mungal, M.G., Hanson, R.K.: Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows. Physics of Fluids 18, 026101 (2006)
- [19] Mahle, I.: Direct and large-eddy simulation of inert and reacting compressible turbulent shear layers. Dissertation, Technische Universität München (2007)
- [20] Mahle, I., Foysi, H., Sarkar, S., Friedrich, R.: On the turbulence structure in inert and reacting compressible mixing layers. Journal of Fluid Mechanics 593, 171-180 (2007)
- [21] Friedrich, R.: Compressible turbulent flows: Aspects of prediction and analysis. ZAMM 87, 189-211 (2007)
- [22] Stoltz, S., Adams, N.A.: An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation. Physics of Fluids 11(7), 1699-1701 (1999)
- [23] Mathew, J., Lechner, R., Foysi, H., Sesterhenn, J., Friedrich, R.: An explicit filtering method for LES of compressible flows. Physics of Fluids 15(8) 2279-2289 (2003)
- [24] Lele, S.K.: Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics 103, 16-42 (1992)
- [25] Kennedy, C.A., Carpenter, M., Lewis, R.: Low-storage, explicit Runge-Kutta schemes for the compressible Navier-Stokes equations. Technical Report 99-22, ICASE (1999)
- [26] Müller, B.: Linear stability condition for explicit Runge-Kutta Methods to solve the compressible Navier-Stokes equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences 12, 139-151 (1990)
- [27] Brent, R.: Algorithms for minimization without derivatives. Prentice-Hall (1973)
- [28] Ern, A., Giovangigli, V.: Fast and accurate multi-component transport property evaluation. Journal of Computational Physics 120, 105-116 (1995)
- [29] Mellado, J.-P., Friedrich, R., Sarkar, S.: Modeling of filtered heat release for large-eddy simulation of compressible infinitely fast reacting flows. Proceedings of the Combustion Institute 31, 1691-1699 (2007)
- [30] Coleman, G., Kim, J., Moser, J.: A numerical study of turbulent supersonic isothermal wall channel flow. Journal of Fluid Mechanics 305, 159-183 (1995)
- [31] Lechner, R., Sesterhenn, J., Friedrich, R.: Turbulent supersonic channel flow. Journal of Turbulence 2, 001 (2001)
- [32] Foysi, H.: Transport passiver Skalare in wandgebundener und isotroper kompressibler Turbulenz. Dissertation, Technische Universität München (2005)
- [33] Handbook of supersonic aerodynamics. NAVORD Report 1488, Vol. 1. A Bureau of Ordnance Publication (1949)
- [34] Sesterhenn, J.: A characteristic-type formulation of the Navier-Stokes equations for high order upwind schemes. Computers & Fluids 30(1), 37-67 (2001)
- [35] Poinsot, T., Lele, S.: Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. Journal of Computational Physics 101, 104-129 (1992)
- [36] Poinsot, T., Veynante, D.: Theoretical and Numerical Combustion, second edition. Edwards (2005)
- [37] Lui, C.C.M.: A numerical investigation of shock associated noise. Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University (2003)
- [38] Kweon, J.R.: The evolution compressible Navier-Stokes system on polygonal domains. Journal of Differential Equations 232, 487-520 (2007)
- [39] Kweon, J.R.: Regularity of solutions for the Navier-Stokes system of incompressible flows on a polygon. Journal of Differential Equations 235, 166-198 (2007)
- [40] Kweon, J.R., Kellogg, R.B.: Regularity of solutions to the Navier-Stokes system for compressible flows on a polygon. SIAM J. Math. Anal. 35(6), 1451-1485 (2004)
- [41] Gloerfelt, X.: Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité: simulation aeroacoustique directe et application de méthodes intégrales. Dissertation, École Centrale de Lyon (2001)
- [42] Cook, A.W., Cabot, W.H.: A high-wavenumber viscosity for high-resolution numerical methods. Journal of Computational Physics 195, 594-601 (2004)
- [43] Sesterhenn, J.: Strömungsinstabilitäten im Staufliegenbereich schiebender Tragflügel. Habilitationsschrift, Technische Universität München (2004)
- [44] Friedrich, R.: Kompressible Strömungen mit Reibung und Wärmeleitung. Vorlesungsmanuskript, Technische Universität München
- [45] Becker, E.: Gasdynamik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1966)
- [46] von Neumann, J., Richtmyer, R.D.: A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. Journal of Applied Physics 21, 232-237 (1950)
- [47] Cook, A.W., Cabot, W.H.: Hyperviscosity for shock-turbulence interactions. Journal of Computational Physics 203, 379-385 (2005)
- [48] Fiorina, B., Lele, S.K.: An artificial nonlinear diffusivity method for supersonic reacting flows with shocks. Journal of Computational Physics 222, 246-264 (2007)

- [49] Kawai, S., Lele, S.K.: Localized artificial viscosity and diffusivity scheme for capturing discontinuities on curvilinear and anisotropic meshes. CTR Research Briefs, Stanford University, 83-95 (2007)
- [50] Loginov, M.S., Adams, N.A., Zheltovodov, A.A.: Large-eddy simulation of shock-wave/turbulent-boundary-layer interaction. Journal of Fluid Mechanics 565, 135-169 (2006)
- [51] Förster, H.: Private Mitteilung (2007,2008)
- [52] Lee, M.P., McMillin, B.K., Palmer, J.L., Hanson, R.K.: Planar fluorescence imaging of a transverse jet in a supersonic crossflow. Journal of Propulsion and Power 8(4), 729-735 (1992)
- [53] Gruber, M.R., Nejad, A.S., Chen, T.H., Dutton, J.C.: Transverse Injection from Circular and Elliptic Nozzles into a Supersonic Crossflow. Journal of Propulsion and Power 16(3), 449-457 (2000)