

# ROBUSTE AUSLEGUNG VON VERDICHTERSCHAUFELN

**P. M. Flassig, A. K. Dutta und D. Bestle**

Lehrstuhl Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik

Brandenburgische Technische Universität Cottbus

Email: flassig@tu-cottbus.de, dutta@tu-cottbus.de, bestle@tu-cottbus.de

## Kurzfassung

Die probabilistische aerodynamische Auslegung moderner Hochdruckverdichter von Flugzeugtriebwerken unter Berücksichtigung von Unsicherheiten ist von essentieller Bedeutung und rückt immer mehr in den Fokus aktueller Forschungsarbeit. Daneben findet die Mehrkriterien-Optimierung intensive Berücksichtigung bei der virtuellen Produktentwicklung und ist bereits fester Bestandteil industrieller Auslegungspraktiken. Intention der vorliegenden Arbeit ist daher, Robustheitsbewertung und Optimierung nicht entkoppelt voneinander, sondern parallel zu betrachten.

Am Beispiel der zweidimensionalen Verdichterauslegung für eine hochbelastete transsonische Verdichtersektion einer Rotorreihe wird gezeigt, dass die probabilistische Robustheitsbewertung in Verbindung mit einer Mehrkriterien-Optimierung und effizienter Antwortflächenverfahren entscheidende Vorteile gegenüber einer rein deterministischen Auslegung aufweist. Dazu wird ein unsicherer Anströmwinkel um den Auslegungspunkt mit gegebener Dichtefunktion vorgegeben. Die unsichere aerodynamische Profilgüte wird im Anschluss daran unter Verwendung einer Antwortfläche hinsichtlich Erwartungswert und Standardabweichung der unsicheren Verlustantwort beurteilt.

Die Optimierungsergebnisse zeigen die Widersprüchlichkeit dieser Kriterien und bestätigen damit den vektoriellen Optimierungsansatz. Ein robuster Entwurf mit minimalem

Verlustniveau ist nur unter Hinnahme einer großen Streuung möglich. Ein insensitiver Entwurf ist hingegen nur mit supoptimaler mittlerer Qualität möglich. Die entgültige Entscheidung, welcher optimale Kompromiss gewählt wird, bleibt dem Entwurfsingenieur überlassen.

## Nomenklatur

$DP$	Auslegungspunkt
$SS$	Saugseite
$WR$	Teil- und Überlastbereich
$isen$	isentrop
$I, E$	Ein-, Austritt bzw. Vorder-, Hinterkante
$0$	Totalgröße
$\max$	maximal
$\min$	minimal
$\widetilde{(\cdot)}$	dimensionslose bzw. normierte Größe
$\widehat{(\cdot)}$	Antwortfläche
$\overline{(\cdot)}$	gemittelte Größe
$(\cdot)^c$	Grenze
$i$	Laufindex
$f$	Skeletlinie, Dichtefunktion
$\mathbf{f}$	Vektorkriterium
$T$	Dickenverteilung
$TC$	Verhältnis max. Dicke zur Profilsehne
$\beta$	Skeletlinienwinkelverteilung
$x$	Sehnenkoordinate

<i>c</i>	Sehnenlänge
<i>p</i>	Position der maximalen Dicke, Strafterm, Polynomgrad, Parameter, Druck
<i>r</i>	Radius
<i>u</i>	Kurvenparameter, Knoten
<i>G</i>	Zahl der Generationen
<i>M</i>	(relative) Machzahl
<i>N</i>	Basispolynom
<i>P</i>	Populationsgröße
<i>S<sub>1</sub></i>	Meridianstromfläche
<i>S<sub>2</sub></i>	Schaufelkanalstromfläche
<i>n</i>	Stichprobenumfang
<b>C</b>	B-Spline Kurve
<b>U</b>	Knotenvektor der B-Spline Kurve
<b>P</b>	Kontrollpunktmatrix
<b>p</b>	Parametervektor
$\mathcal{F}$	zugänglicher Kriterienraum
$\mathcal{G}$	zulässiger geometrischer Parameterraum
$\mathcal{N}$	Normalverteilung
$\mathcal{P}$	zulässiger Parameterraum
$\mathbb{R}$	reelle Zahl
$\omega$	dimensionsloser Druckverlustbeiwert
$\varepsilon$	Strömungsdeviation, Approximationsfehler
$\alpha$	(relativer) Strömungswinkel
$\mu$	Erwartungswert
$\sigma$	Standardabweichung
$A_I$	unsicherer Anströmwinkel
$\Omega$	unsicherer Verlust
<i>h</i>	Ungleichheitsnebenbedingung

## Einleitung

Die aerodynamische Auslegung moderner axialer Hochdruckverdichter ist nicht nur für die unmittelbare Leistungsfähigkeit des Verdichters von wesentlicher Bedeutung, sondern auch für die des gesamten Triebwerkes. Die Festlegung des Arbeitspunktes einerseits und das aerodynamische Verhalten des Verdichters im Teil- und Überlastbereich andererseits sind dabei von entscheidender Bedeutung, um einen möglichst effizienten Betrieb im Auslegungspunkt und Manöver des gesamten Triebwerkes zu ermöglichen.

Aufgrund seiner enormen Komplexität wird der aerodynamische Verdichterentwurf bis heute in vier grundlegende Entwurfsphasen unterteilt [1]. Als Kompromiss zwis-

schen begrenzter Analysezeit und Wiedergabe des realen Strömungsverhaltens beschränkt sich die vorliegende Untersuchung auf die zweidimensionale Auslegung eines Profilschnittes auf der S1-Stromfläche unter Verwendung des Strömungslösers *Mises* [2]. Idee hierfür ist, das dreidimensionale Strömungsfeld in zwei sich schneidende und von einander abhängige zweidimensionale Strömungsfelder zu zerlegen [3]. Dieser Ansatz zerlegt die Strömung in die S1- und S2-Stromfläche. Eine iterative Kopplung dieser beiden Stromflächen führt auf ein quasi-dreidimensionales Strömungsfeld [4].

Zur aerodynamischen Beurteilung eines Profilschnittes sowohl im Auslegungspunkt wie auch Teil- und Überlastbereich eines Verdichters dient hauptsächlich die aus einer Anstellwinkelvariation resultierende Verlustpolare. Im Allgemeinen wird dabei ein Entwurf gefordert, der durch einen minimalen Verlust im Auslegungspunkt  $\omega^{DP}$  und einen maximalen Arbeitsbereich  $WR$  charakterisiert ist, Abbildung 1. Beide Kriterien sind zum Teil konfliktär, so dass ein Kompromiss erforderlich ist. In [5] wurde der Widerspruch in den beiden Auslegungskriterien mit Hilfe eines Mehrkriterien-Optimierungsansatzes gelöst, bei dem gleichzeitig das deterministische Minimum der Verlustpolaren und ein möglichst großer Arbeitsbereich gesucht wurden. Die resultierenden Schaufeln zeigten allerdings zum Teil um den Auslegungspunkt unerwünschte Verläufe der Verlustpolaren mit starken Änderungen des Verlustes bei kleinen Variationen des Anströmwinkels, Abbildung 1. Um dies zu vermeiden, wird in der vorliegenden Arbeit am Beispiel eines hochbelasteten Rotors die deterministische Bestimmung des Verlustes im Auslegungspunkt durch eine probabilistische Bewertung ersetzt. Ziel ist, ein robustes Optimum zu finden. Dazu wird ein unsicherer Anstellwinkel mit vorgebender Wahrscheinlichkeitsverteilung, beispielsweise als Folge einer streuenden Abströmung der stromauf befindlichen Verdichterreihe, angenommen und eine statistische Bewertung des Verlustes im Auslegungspunkt vorgenommen. Ein optimaler robuster Entwurf liegt vor, wenn die ersten beiden statistischen Momente der unsicheren Systemantwort, d.h. der Erwartungswert und die Standardabweichung des Verlustes, minimal sind. Die Wahl dieser beiden konfliktären Kriterien begründet sich darin, dass der Erwartungswert ein Maß für den Schwerpunkt der unsicheren Verlustantwort definiert und die Standardabweichung die Streuung quantifiziert. Abhängig von den Forderungen steht der Entwurfsingenieur dann vor

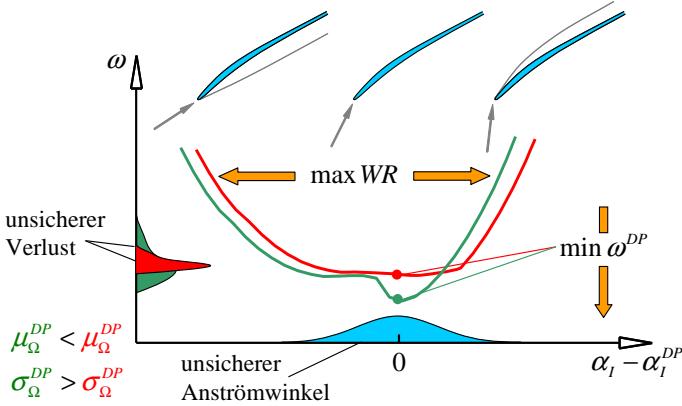


Abbildung 1. Verlustpolaren einer Verdichtersektion unter probabilistischen Aspekten bewertet

der Entscheidung, einen Kompromiss zu wählen, der entweder einen minimalen mittleren Verlust aufweist oder aber möglichst wenig streut, um einen stabilen Betrieb zu gewährleisten – auch wenn ein anderer Entwurf mit großen Streuungen kleinere Verluste aufweist, Abbildung 1.

Zur Lösung des vektoriellen Optimierungsproblems und infolge inherenter Probleme bei der numerischen Strömungsfeldanalyse wird ein robuster genetischer Optimierungsalgorithmus verwendet. Aufgrund der damit verbundenen hohen Anzahl erforderlicher Funktionsauswertungen einerseits und des nichtlinearen Zusammenhangs des Verlustes als Funktion des relativen Anströmwinkels andererseits wird dieser über eine Antwortfläche approximiert, um damit eine deutliche Reduzierung der Analysezeit zu erzielen. Der Profilaufbau der Verdichtersektion basiert primär auf den dimensionslosen Verteilungen der Skelettkettenlinienwinkel, siehe [6], und der Profildicke, die mit Hilfe von Freiformkurven parametrisiert werden. Diese garantieren einen kleinen und vor allem empfindlichen Parameterraum und erleichtern die empirische Beurteilung gefundener Entwürfe [7].

## Parametrisierung

Für die Beschreibung einer Verdichtersektion, Abbildung 2, existieren grundsätzlich zwei Möglichkeiten. In weiter zurückliegenden Untersuchungen wurde die Parametrisierung der dimensionsbehafteten Kontur über Freiformkurven bevorzugt [1], [8] und [9]. Nach [10] lässt sich die Profilkontur aber auch aus Superposition einer Skelett-

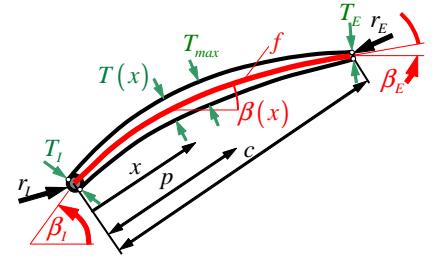


Abbildung 2. Geometrisches Modell einer Verdichtersektion

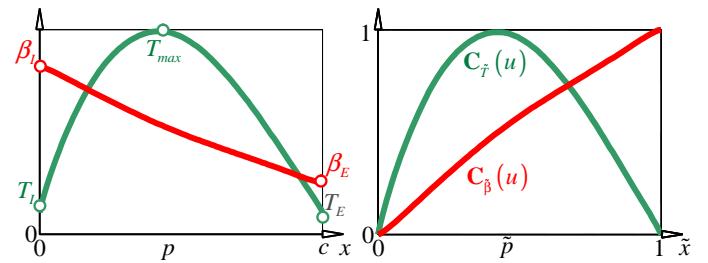


Abbildung 3. Dimensionsbehaftete (links) und dimensionslose (rechts) Skelettkettenlinienwinkel- und Dickenverteilung

linie  $f$  und einer Dickenverteilung  $T$  aufzubauen. In Anlehnung daran wird in der vorliegenden Untersuchung die Skelettkettenlinienwinkelverteilung  $\beta$  auf die Metallwinkel  $\beta_{I,E}$  an der Vorder- und Hinterkante des Profils normiert und als Funktion der normierten Sehnenlänge  $\tilde{x}$  dargestellt, siehe Abbildung 3:

$$(1) \quad \tilde{\beta}(\tilde{x}) = \frac{\beta_I - \beta(\tilde{x})}{\beta_I - \beta_E} \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = \frac{x}{c} \in [0,1].$$

Die Dickenverteilung  $T$  hingegen wird in zwei Bereiche unterteilt und jeweils auf die korrespondierende Dicke  $T_{I,E}$  an der Vorder- bzw. Hinterkante, sowie der maximalen Dicke  $T_{max}$  normiert und ebenfalls über der normierten Profil sehne  $\tilde{x}$  aufgetragen, siehe Abbildung 3:

$$(2) \quad \tilde{T}(\tilde{x}) = \begin{cases} \frac{T(\tilde{x}) - T_I}{T_{max} - T_I} & \tilde{x} \leq \tilde{p} \\ \frac{T(\tilde{x}) - T_E}{T_{max} - T_E} & \tilde{x} > \tilde{p} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \tilde{p} = \frac{p}{c}.$$

Nach [5], [11] und [12] eignen sich die dimensionslosen Skeletlinienwinkel- und Dickenverteilungen  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{T}$  besonders gut für die Diskussion und empirische Beurteilung gefundener Entwürfe sowie aufgrund einer ausgeprägten Empfindlichkeit der aerodynamischen Güte auf Variationen dieser [7].

Nach [13] stellt die Verwendung von Freiformkurven eine effektive Möglichkeit dar, die Zahl der Freiheitsgrade bei annähernd gleicher Entwurfsfreiheit drastisch zu reduzieren. Die Komplexität der verwendeten Parametrisierung respektive Freiformkurve ist dabei selbst ein Kompromiss zwischen Entwurfsvielfalt und Problemvereinfachung. Für die vorliegenden Untersuchungen werden B-Spline Kurven nach [14] verwendet. Für die dimensionslose Skeletlinienwinkelverteilung wird eine B-Spline Kurve zweiten Grades mit äquidistantem Knotenvektor und fünf Kontrollpunkten verwendet, Abbildung 4:

$$(3) \quad \mathbf{C}_{\tilde{\beta}}(u) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\tilde{\beta}}(u) & \tilde{\beta}(u) \end{bmatrix}^T = \sum_{i=0}^4 N_{i,2}(u) \mathbf{P}_{\tilde{\beta},i}$$

mit dem Kurvenparameter  $u \in [0,1]$ , den Basispolynomen

$$(4) \quad \begin{aligned} N_{i,0}(u) &= \begin{cases} 1 & U_i \leq u < U_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ N_{i,p}(u) &= \frac{u - U_i}{U_{i+p} - U_i} N_{i,p-1}(u) + \\ &\quad \frac{U_{i+p+1} - u}{U_{i+p+1} - U_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \end{aligned}$$

mit  $p = 1,2$  und dem Knotenvektor

$$(5) \quad U_{\tilde{\beta}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

sowie den Kontrollpunkten  $\mathbf{P}_{\tilde{\beta},i}$ . Angesichts geometrischer Restriktionen an die Verteilung der B-Spline Kurve  $\mathbf{C}_{\tilde{\beta}}$  ergeben sich in Summe sechs Freiheitsgrade und die Kontrollpunktmatrix  $\mathbf{P}_{\tilde{\beta}}$  ergibt sich zu

$$(6) \quad \mathbf{P}_{\tilde{\beta}} = [\mathbf{P}_{\tilde{\beta},0} \dots \mathbf{P}_{\tilde{\beta},4}] = \begin{bmatrix} 0 & p^{(1)} & p^{(3)} & p^{(5)} & 1 \\ 0 & p^{(2)} & p^{(4)} & p^{(6)} & 1 \end{bmatrix}.$$

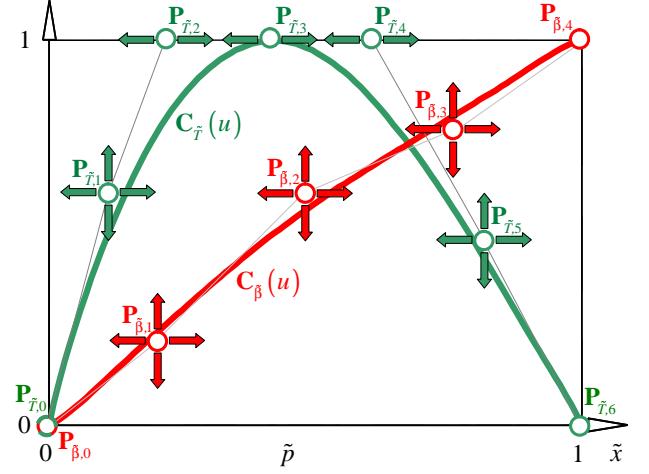


Abbildung 4. Parametrisierte dimensionslose Skeletlinienwinkel- und Dickenverteilungen als B-Spline Kurve

Die dimensionslose Dickenverteilung  $\tilde{T}$  ist ebenfalls über eine B-Spline Kurve zweiten Grades, jedoch mit sieben Kontrollpunkten definiert, Abbildung 4:

$$(7) \quad \mathbf{C}_{\tilde{T}}(u) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_T(u) & \tilde{T}(u) \end{bmatrix}^T = \sum_{i=0}^6 N_{i,2}(u) \mathbf{P}_{\tilde{T},i}$$

Weiterhin ist hier im Gegensatz zur dimensionslosen Skeletlinienwinkelverteilung  $\tilde{\beta}$  die Verwendung eines speziellen Knotenvektors

$$(8) \quad U_{\tilde{T}} = [0 \ 0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

erforderlich, um Tangentenstetigkeit im Punkt der maximalen Dicke  $\tilde{x} = \tilde{p}$  zu garantieren. Unter Berücksichtigung geometrischer Restriktionen ergibt sich folgender Kontrollpunktvektor mit sieben Freiheitsgraden:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{T}} &= [\mathbf{P}_{\tilde{T},0} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},1} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},2} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},3} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},4} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},5} \ \mathbf{P}_{\tilde{T},6}] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & p^{(7)} & p^{(9)} & p^{(10)} & p^{(11)} & p^{(12)} & 1 \\ 0 & p^{(8)} & 1 & 1 & 1 & p^{(13)} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Als weiterer Parameter mit signifikantem Einfluss auf die aerodynamische Güte der Verdichtersektion wird das Verhältnis der maximalen Dicke zur Profilsehne

$$(10) \quad TC = \frac{T_{max}}{c}$$

in den Parametervektor aufgenommen. Um eine optimale Positionierung der Verdichtersektion in der Strömung zu ermöglichen, sind die Metallwinkel  $\beta_{I,E}$  an der Vorder- und Hinterkante ebenfalls Teil des Parametervektors. Ferner werden die Radien  $r_{I,E}$  des Profils verwendet und erlauben damit Variationen der Profilvorderkante und -hinterkante. Zur Unterstützung des Optimierungsverfahrens und zur Harmonisierung aller Parametergrenzen werden diese unter Verwendung sinnvoll definierter Grenzen auf Werte zwischen Null und Eins normiert, d.h.

$$(11) \quad p^{(14)} = \frac{TC^{\min} - TC}{TC^{\min} - TC^{\max}} ,$$

$$(12) \quad p^{(15,16)} = \frac{\beta_{I,E}^{\min} - \beta_{I,E}}{\beta_{I,E}^{\min} - \beta_{I,E}^{\max}} \quad \text{und}$$

$$(13) \quad p^{(17,18)} = \frac{r_{I,E}^{\min} - r_{I,E}}{r_{I,E}^{\min} - r_{I,E}^{\max}} .$$

Der resultierende Parametervektor  $\mathbf{p}$  und der zulässige geometrische Parameterraum  $\mathcal{G}$  für die Optimierung lauten damit

$$(14) \quad \mathbf{p} = [p^{(1)} \dots p^{(18)}]^T \quad \text{und}$$

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{18} \mid h_1(\mathbf{p}) > 0, h_2(\mathbf{p}) > 0,$$

$$(15) \quad 0 \leq p^{(i)} \leq 1, \quad i = 1(1)18\} .$$

Die Ungleichheitsnebenbedingungen  $h_{1,2} > 0$  sind durch die Forderung motiviert, dass die dimensionslosen Verteilungen der Skeletlinienwinkel  $\tilde{\beta}$  und der Dicke  $\tilde{T}$  die Eigenschaft einer surjektiven Abbildung besitzen sollen. Andernfalls wäre ein Profilaufbau aufgrund von Schleifen nicht möglich. Für die parametrisierten Kurven  $\mathbf{C}_{\tilde{\beta}, \tilde{T}}$  bedeutet dies, dass für die dimensionslosen Skeletlinienwinkelverteilung

$$(16) \quad h_1(\mathbf{p}) = \frac{d\tilde{\beta}(u, \mathbf{p})}{du} > 0$$

und für die dimensionlose Dickenverteilung

$$(17) \quad h_2(\mathbf{p}) = \frac{d\tilde{T}(u, \mathbf{p})}{du} > 0$$

für alle  $u \in [0,1]$  gilt.

## Formulierung des Optimierungsproblems

Die elementaren Ziele bei der zweidimensionalen aerodynamischen Verdichterauslegung bestehen darin, einen Entwurf mit bestmöglicher Wirkungsgradcharakteristik sowohl im Auslegungspunkt selbst, als auch über den gesamten Teil- und Überlastbereich zu finden. Zudem wird gefordert, dass die aus der S2-Stromfläche geforderte Strömungsumlenkung für den Auslegungspunkt erreicht wird, um nicht nur den geforderten Druckanstieg zu erzielen, sondern auch die definierte Anströmung der stromab befindlichen Verdichterreihe zu garantieren.

Als ein Äquivalent für den aerodynamischen Wirkungsgrad der Kaskade wird in der vorliegenden Arbeit der in [2] definierte dimensionslose Verlustbeiwert

$$(18) \quad \omega = \frac{p_{0,E}^{isen} - \bar{p}_{0,E}}{p_{0,I} - p_I}$$

eingeführt, mit dem isentropen Totaldruck  $p_{0,E}^{isen}$  am Ausritt, dem massengemittelten Totaldruck  $\bar{p}_{0,E}$  am Ausritt und dem Totaldruck bzw. statischen Druck  $p_{0,I}$  bzw.  $p_I$  am Eintritt der Kaskade. Zur Quantifizierung der Strömungsumlenkung im Auslegungspunkt wird die Differenz  $\epsilon$  zwischen gefordertem Abströmwinkel  $\alpha_{E,S1}^{DP}$  und erzieltem Abströmwinkel  $\alpha_{E,S2}^{DP}$  definiert, d.h.

$$(19) \quad \epsilon = \alpha_{E,S1}^{DP} - \alpha_{E,S2}^{DP} .$$

Die Variation des Anströmwinkels  $\alpha_I$  zur Evaluation des Teil- und Überlastbereiches führt auf den nichtlinearen Zusammenhang des Verlustbeiwertes als Funktion des Anströmwinkels  $\omega = \omega(\alpha_I)$  bzw. der in Abbildung 5 gezeigten Verlustpolaren.

Intention der vorliegenden Untersuchung ist, die deterministische Beurteilung des Verlustes im Auslegungspunkt  $\omega^{DP}$  durch eine probabilistische Bewertung zu ersetzen. Dazu wird ein unsicherer Anströmwinkel  $A_I$  mit vorgegebener normalverteilter Dichtefunktion

$$(20) \quad f_{A_I}(\alpha_I) = \mathcal{N}(\alpha_I^{DP}, \sigma_{A_I}) \\ = \frac{1}{\sigma_{A_I} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_I - \alpha_I^{DP}}{\sigma_{A_I}} \right)^2 \right]$$

angenommen. Über den funktionalen Zusammenhang des Verlustes  $\omega$  als Funktion des Anströmwinkels  $\alpha_I$ , d.h.

$\omega = \omega(\alpha_I)$ , ergibt sich bei unsicherem Anströmwinkel  $A_I$  entsprechend die unsichere Verlustantwort  $\Omega$ , d.h.  $\Omega = \Omega(A_I)$ . Damit lässt sich die Dichtefunktion der unsicheren Verlustantwort  $f_\Omega(\omega)$  wie folgt darstellen:

$$(21) \quad f_{A_I}(\alpha_I) \xrightarrow{\omega=\omega(\alpha_I)} f_\Omega(\omega).$$

Ziel ist nun, sowohl den Erwartungswert

$$(22) \quad \mu_\Omega^{DP} = E[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega f_\Omega(\omega) d\omega,$$

als auch die Standardabweichung

$$(23) \quad \sigma_\Omega^{DP} = \sqrt{E[(\Omega - \mu_\Omega^{DP})^2]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \mu_\Omega^{DP})^2 f_\Omega(\omega) d\omega}$$

der unsicheren Verlustantwort  $\Omega$  um den Auslegungspunkt zu minimieren, um eine möglichst unempfindliche Polare mit minimalem Verlustniveau zu erhalten. In Abbildung 1 wird jedoch deutlich, dass diese Kriterien konfliktär sind, weshalb ein vektorielles Optimierungsproblem der Form

$$(24) \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \begin{bmatrix} \mu_\Omega^{DP} \\ \sigma_\Omega^{DP} \end{bmatrix}$$

definiert wird. Der zulässige Entwurfsraum  $\mathcal{P}$  ist Teilmenge des zulässigen geometrischen Parameterraums  $\mathcal{G}$  und ist gegeben durch

$$(25) \quad \mathcal{P} = \{ \mathcal{G} \mid h_3 \leq 0, h_4 \leq 0 \}$$

mit zusätzlichen Nebenbedingungen  $h_{3,4}$ . Die nichtlineare Ungleichsnebenbedingung  $h_3 < 0$  begründet sich in der Tatsache, dass jeder zulässige Entwurf die geforderte Strömungsumlenkung im Auslegungspunkt erfüllen muss. Unter Verwendung von Gleichung (19) und Einführung einer oberen Schranke  $\varepsilon^c$  gilt

$$(26) \quad h_3 = |\varepsilon| - \varepsilon^c.$$

Um weiterhin die aerodynamische Belastung der Verdichtersektion zu begrenzen respektive Stoßverluste einzuschränken, wird die maximale isentrope Machzahl auf der Profilsaugseite  $M_{max}^{SS}$  ebenfalls unter Einführung einer oberen Schranke  $M^c$  wie folgt restriktiert:

$$(27) \quad h_4 = M_{max}^{SS} - M^c.$$

Da eine geschlossene Lösung von Gleichung (22) und (23) zur Berechnung der Optimierungskriterien aufgrund der Komplexität nicht möglich ist, werden die erwartungstreuen Schätzer der Form

$$(28) \quad \mu_\Omega^{DP} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i$$

für den Erwartungswert und

$$(29) \quad \sigma_\Omega^{DP} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\omega_i - \mu_\Omega^{DP})^2}$$

für die Standardabweichung des unsicheren Verlustes  $\Omega$  mit  $\omega_i = \omega(\alpha_i)$  und dem Stichprobenumfang  $n$  zur probabilistischen Bewertung eingeführt. Ein hinreichend großer Stichprobenumfang mit  $n = 10^6$  garantiert vertrauenswürdige und reproduzierbare Schätzungen in den Eingangs- wie auch Antwortgrößen [15].

Im Hinblick auf eine zeitlich beschränkte Analysezeit ist die Berechnung von  $n = 10^6$  Anstellwinkelkonfigurationen nicht praktikabel. Ferner wäre eine Abbildung des nichtlinearen Zusammenhangs des Verlustes als Funktion des Anströmwinkels, Gleichung (21), mit hinreichender Genauigkeit in akzeptabler Zeit auch nicht möglich.

Ein Kompromiss zwischen beschränkter Analysezeit einerseits und geforderter Abbildungsgüte andererseits bietet daher die Verwendung einer Antwortfläche. Idee dabei ist, die exakte Transferfunktion  $\omega = \omega(\alpha_I)$  durch ein deterministisches Modell unter Verwendung vorab berechneter Stützstellen zu approximieren, d.h.

$$(30) \quad \omega(\alpha_I) = \hat{\omega}(\alpha_I) + \varepsilon(\alpha_I)$$

mit der Antwortfläche  $\hat{\omega}$  und dem Approximationsfehler  $\varepsilon$ . Abbildung 5 zeigt einen Vergleich einer annähernd ge-

nauen Verlustpolaren, die mit 100 exakt berechneten Stützstellen und kubischer Splineinterpolation gefunden wurde, mit einer Approximation basierend auf 15 Stützstellen und kubischer Splineinterpolation. Gewählt wurde ein Extrembeispiel mit auftretendem Transitionssprung sowie ein Beispiel ohne sprunghafte Änderungen. Der mittlere bzw. betragsmäßig größte Approximationsfehler beträgt  $\mu_\epsilon = 7.4 \cdot 10^{-3}\%$  bzw.  $\max\{\epsilon_i\} = 3 \cdot 10^{-2}\%$  für die Polare mit Transitionsphänomen und  $\mu_\epsilon = 3.6 \cdot 10^{-3}\%$  bzw.  $\max\{\epsilon_i\} = 7.6 \cdot 10^{-3}\%$  für die Polare ohne abrupte Variation, wobei der mittlere Approximationsfehler durch

$$(31) \quad \mu_\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\omega_i - \hat{\omega}_i|$$

gebildet wird. Der Zeitgewinn ist etwa ein Faktor fünf. Die relativen Fehler der statistischen Momente nach Gleichung (28) und (29) betragen  $5 \cdot 10^{-2}\%$  für den Erwartungswert bzw. 1.7% für die Standardabweichung des Beispiels mit Transition und  $4.3 \cdot 10^{-5}\%$  für den Erwartungswert bzw.  $4.3 \cdot 10^{-2}\%$  für die Standardabweichung des Beispiels ohne Grenzschichteffekte. Demnach kann von einer hinreichenden Approximationsgüte der Optimierkriterien ausgegangen werden, da die im Folgenden gezeigten optimalen Kompromisslösungen weitaus glattere Verläufe der Polaren aufweisen. Ferner sind Verdichtersektionen mit Transitionsphänomenen um den Auslegungspunkt nicht Teil der im Folgenden gefundenen *Pareto-optimalen* Kompromisse.

### Prozessintegration und Automatisierung

Wichtige Bestandteile der virtuellen Produktionentwicklung sind eine robuste und effiziente Prozessintegration sowie eine Automatisierung der Optimierung. Die robuste Kopplung verschiedener Auslegungs- und Analysewerkzeuge, sowohl system- als auch netzwerkübergreifend, ein logisch aufgebauter Prozessfluss und minimaler Datentransfer bilden die Grundlage für eine erfolgreiche Optimierung.

Zur Integration aller für den Prozess erforderlichen Analyseprogramme dient in der vorliegenden Arbeit *iSight-FD* [16]. Abbildung 6 zeigt dazu den in die *iSIGHT-FD* Umgebung eingebetteten Prozess der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen robusten Auslegung einer Verdichtersektion.

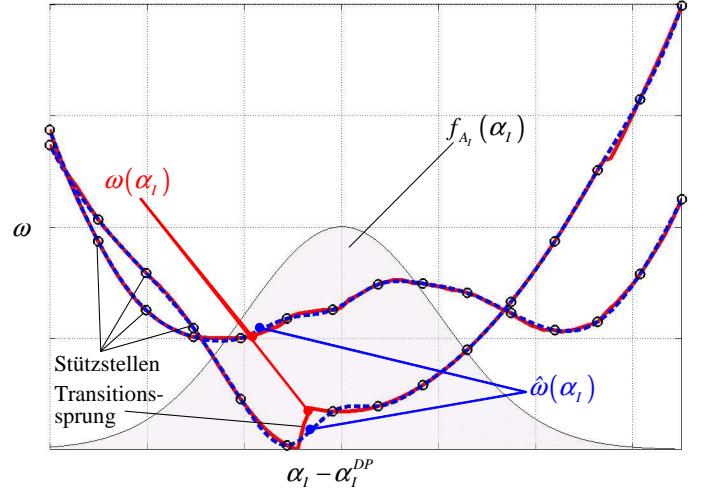


Abbildung 5. Approximation der Verlustpolaren über kubische Splineinterpolation am Beispiel zweier Entwürfe

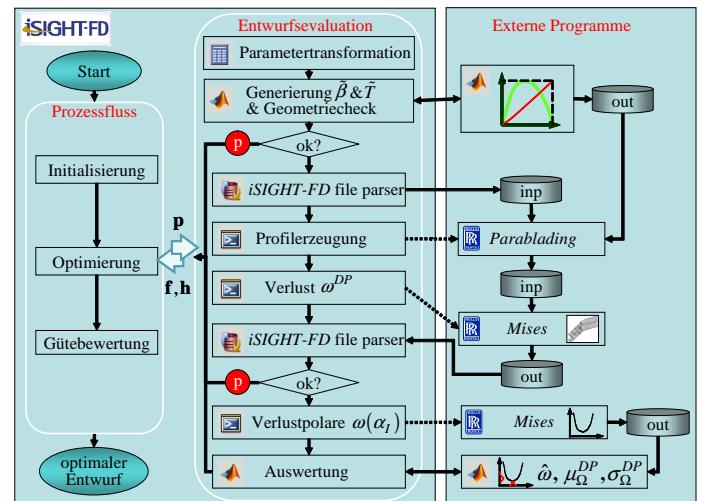


Abbildung 6. Prozess zur robusten Verdichterauslegung

Ausgehend von einem Parametervektor  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}$  erfolgt zunächst die Transformation aller dimensionsbehafteten Größen nach den Gleichungen (11), (12) und (13). Basierend auf den entsprechenden Parametern werden dann über *Matlab* [17] die dimensionslosen Verteilungen der Skeletlinienwinkel  $\tilde{\beta}$  und der Dicke  $\tilde{T}$  berechnet, erforderliche Eingangsdateien für die Geometrieerzeugung in *Parablading* [18] geschrieben und die generierten Verteilungen bezüglich geometrischer Restriktionen, d.h. hinsichtlich  $h_{1,2}$ , überprüft. Sind diese verletzt, so werden allen

relevanten Optimierungsgrößen benutzerdefinierte Strafterme  $p$  hinzugefügt und die Entwurfsevaluation wird terminiert. Diese Methodik setzt einen robusten Optimiereralgorithmus, siehe folgendes Kapitel, voraus und wäre für deterministische Verfahren ungeeignet.

Über den *iSIGHT-FD file parser* werden der Batch-Datei zur Geometrieerzeugung alle erforderlichen Informationen zugeführt. Im Anschluss daran wird die Verdichtersektion generiert und notwendige Eingangsdateien für die numerische Strömungsfeldberechnung in *Mises* erzeugt. Zur Evaluation der aerodynamischen Güte im Auslegungspunkt wird zunächst ein lösungsunabhängiges, strukturiertes Netz generiert [12], gefolgt von der eigentlichen Strömungsfeldanalyse und der Ergebnissaufbereitung. Als nächstes wird der Konvergenzstatus der CFD-Rechnung über den *iSIGHT-FD file parser* abgefragt. Ist die numerische Analyse nicht konvergiert, werden wiederum allen wichtigen Optimierungsgrößen benutzerdefinierte Strafterme  $p$ , die jedoch kleiner als die obig definierten sind, zugefügt und der Prozess terminiert.

Zur Approximation der Verlustpolaren wird für definierte Anströmwinkel die aerodynamische Güte über *Mises* berechnet. Dabei wird jeweils die sperr- und pumpseitige Hälfte der Verlustpolaren rekursiv und entkoppelt voneinander evaluiert. Dies ermöglicht eine verteilte Berechnung einerseits und beschleunigte Konvergenz andererseits, da jeweils auf die vorangehende Lösung zurückgerufen wird. Die Ergebnisse der Berechnung werden in *Matlab* zunächst auf ihre Konvergenz geprüft. Gegebenenfalls werden benutzerdefinierte Strafterme  $p$  aufgeprägt. Dann erfolgt die Berechnung der antwortflächen- und schätzerbasierten Kriterien, sowie aller nichtlinearen Ungleichheitsnebenbedingungen, so dass dem Optimierer schließlich das Vektorkriterium  $\mathbf{f}$  und die Nebenbedingungen  $\mathbf{h}$  zurückgegebenen werden können.

## Optimierungsergebnisse

Für die robuste Mehrkriterien-Optimierung unter Berücksichtigung probabilistischer Anströmwinkelvariationen bei der zweidimensionalen Verdichterauslegung wird in dieser Arbeit exemplarisch eine hochbelastete, transsonische Mittensektion einer Rotorreihe eines bewährten Hochdruckverdichters gewählt. Die relative Anströmmachzahl  $M_1$  liegt im Bereich von 0.85 und die aus der S2 Rechnung geforderte Strömungsumlenkung im Bereich von 20 Grad.

Unter Berücksichtigung des definierten Vektorkriteriums (24), der benutzerdefinierten Straftermmethodik und inhereiter Probleme bei der numerischen Strömungsfeldanalyse wird der robuste genetische Mehrkriterien-Optimierer NSGA-II [19] für die Suche nach optimalen Kompromisslösungen gewählt. Dieser bietet weiterhin die Möglichkeit, lokale Fronten nicht-dominierter Lösungen zu überwinden, um globale optimale Kompromisse zu erreichen. Die Konvergenz der Kompromisse gegen die globale exakte Front *Pareto-optimaler* Lösungen [20] hängt dabei unter anderem von der zu definierenden Zahl der Generation  $G$  ab. Über die ebenfalls zu wählende Populationsgröße  $P$  kann die Diversität der Front nicht-dominierter Lösungen beeinflusst werden. Die Wahl geeigneter Größen für  $G$  und  $P$  ist extrem problemspezifisch, erfordert Erfahrung und hängt nicht unwesentlich von der zur Verfügung stehenden Entwurfszeit ab – kann aber für initiale Untersuchungen und unter Anwendung geeigneter Konvergenzkriterien begründet werden.

Für den in Abbildung 7 dargestellten zulässigen Kriterienraum  $\mathcal{F}$  werden  $P = 100$  Individuen respektive Entwürfe über  $G = 100$  Generationen analysiert. Da die initiale Elterngeneration meist das Ergebniss eines Zufallsgenerators ist oder einer deterministischen Versuchsplanung, lässt sich in Abhängigkeit der Problemdimension die Auflösung eines Parameterbereiches abschätzen bzw. motivieren. Über einen quantitativen Vergleich *Pareto-optimaler* Kompromisse zweier Generationen über geeignete Metriken zur Untersuchung der Konvergenz und Diversität könnte eine Optimierung vorzeitig terminiert werden [21]. Qualitativ rechtfertigt die in Abbildung 7 erkennbare massive Anhäufung und dichte Auflösung des Kriterienraumes im Bereich nicht-dominierter Lösungen die getroffene Wahl der Generationenzahl. Interessant dabei ist, dass zwei Bereiche nicht-dominierter Lösungen, d.h. eine unstetige *Pareto-Front*, gefunden wurden.

Von den insgesamt 10100 evaluierten Entwürfen erfüllen in etwa zwei Drittel alle Nebenbedingungen. Gesicherte Aussagen zur Abschätzung des zeitlichen Aufwandes unter Verwendung der Ausschlusszahlen infolge der benutzerdefinierten Straftermmethodik sind jedoch erst nach mehreren Optimierungsläufen gesichert möglich, da ein genetischer Algorithmus im Gegensatz zu deterministischen Verfahren keine Reproduzierbarkeit der Ergebnisse garantiert.

Im Vergleich zum existierenden Entwurf  $\mathcal{D}$ , welcher nicht Ausgangspunkt der Optimierung ist, werden Entwürfe ge-

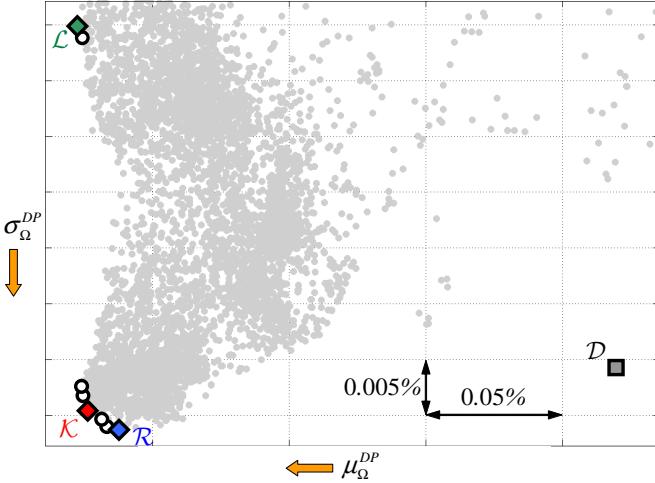


Abbildung 7. Zulässiger Kriterienraum der NSGA-II basierten Mehrkriterien-Optimierung

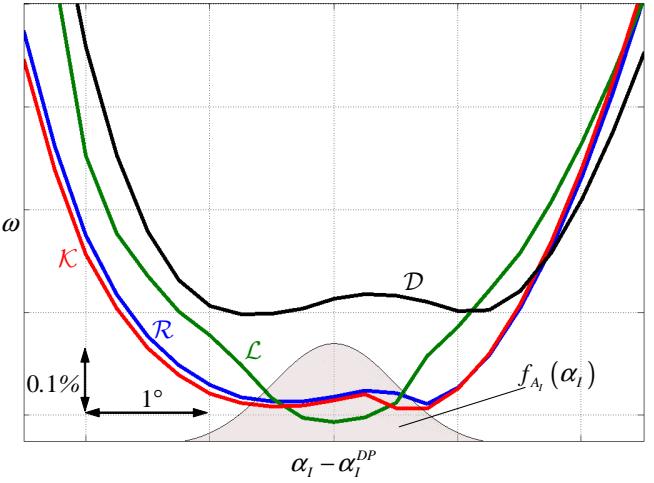


Abbildung 8. Verlustpolaren charakteristischer nicht-dominierter Lösungen aus Abbildung 7

funden, die diesen eindeutig dominieren. Zur Analyse und Diskussion korrespondierender Verlustpolaren der gefundenen nicht-dominierten Punkte werden drei charakteristische Entwürfe  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$ , und  $\mathcal{K}$ , d.h. der Punkt mit minimalem Mittelwert, minimaler Streuung und das sogenannte Knie, selektiert, Abbildung 8. Ein Vergleich der beiden Randlösungen  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{R}$  bestätigt eindeutig die Widersprüchlichkeit der gewählten Kriterien  $\mu_{\Omega}^{DP}$  und  $\sigma_{\Omega}^{DP}$ . Der Entwurf  $\mathcal{R}$  mit minimalen Streuungen weist ein größeres Verlustniveau auf, als der Entwurf  $\mathcal{L}$  mit minimalem Mittelwert, der jedoch sehr sensitiv in Form steigender Verluste auf Anströmwinkelvariationen reagiert. Ein Kompromiss beider Lösungen könnte das Knie  $\mathcal{K}$  der nicht-dominierten Entwürfe darstellen, mit geringen Streuungen bei gleichzeitig akzeptablem mittleren Verlust.

Mit Blick auf den Kriterienraum erweist sich die Standardabweichung nur bedingt zur Beurteilung des physikalischen Systemverhaltens geeignet. Vergleicht man beispielsweise die sich gegenseitig nicht-dominierenden Punkte  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{L}$ , so wäre Entwurf  $\mathcal{D}$  unter Forderung minimaler Streuungen dem Entwurf  $\mathcal{L}$  vorzuziehen. In Wirklichkeit aber ist für  $\mathcal{L}$  der Verlust für alle erlaubten Variationen des Anströmwinkels deutlich kleiner als für  $\mathcal{D}$ , siehe Abbildung 8, und deshalb eindeutig vorzuziehen. Daher sollte über alternative Kriterien als Repräsentant von Robustheit nachgedacht werden.

Eine Analyse aller nicht-dominierten Lösungen im Parameterraum zeigt, dass die Parameter der Radien an der Vorder-

und Hinterkante  $r_{I,E}$  jeweils an der fertigungsbedingten unteren Grenze liegen, so dass zukünftig eine Reduktion des Parameterraumes möglich wäre. Für alle anderen Parameter sind die geometrischen Grenzen hinreichend groß gesetzt worden.

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des VIT 2 Projektes (Virtuelles Triebwerk) in Zusammenarbeit mit Rolls-Royce Deutschland und ist zum Teil vom Land Brandenburg finanziert worden. Besonderer Dank gebührt Herrn Dr. André Huppertz von Rolls-Royce Deutschland für die zeitnahe Erweiterung der Batch-Fähigkeit und die Bereitstellung von *Parablading*.

## Literatur

- [1] A. Keskin. *Process Integration and Automated Multi-Objective Optimization Supporting Aerodynamic Compressor Design*. Ph.D. thesis, Shaker, Aachen, 2007.
- [2] H. Youngren. Analysis and design of transonic cascades with splitter vanes. GTL Report 203, Cambridge: MIT, 1991.
- [3] C.-H. Wu. A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-, Radial-, and Mixed-Flow Types. NACA TN

- 2604, Lewis Flight Propulsion Laboratory, Washington, 1952.
- [4] N. Cumpsty. *Compressor Aerodynamics*. Krieger Publishing Company, Malabar, 2004.
- [5] A. K. Dutta, P. M. Flassig and D. Bestle. A Non-Dimensional Quasi-3D Blade Design Approach with Respect to Aerodynamic Criteria. *Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2008-50687*, 2008.
- [6] A. Huppertz, P. M. Flassig, R. J. Flassig and M. Swooba. Knowledge-Based 2D Blade Design Using Multi-Objective Aerodynamic Optimization and a Neural Network. *Proceedings of ASME Turbo Expo, GT2007-28204*, 2007.
- [7] P. M. Flassig. Knowledge Based Blade Generation with the Objective of an Automatic Aerodynamic Compressor-Design. *Proceedings of ICAS Student Contribution*, 2006.
- [8] U. Köller, R. Mönig, B. Küsters, and H.-A. Schreiber. Development of Advanced Compressor Airfoils for Heavy-Duty Gas Turbines - Part I: Design and Optimization. *Journal of Turbomachinery, ASME*, Vol. 122:397–405, 2000.
- [9] D. Büche, G. Guidati, and P. Stoll. Automated Design Optimization of Compressor Blades for Stationary, Large-Scale Turbomachinery. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2003, GT2003-38421*, 2003.
- [10] I. H. Abbott and A. E. Doenhoff. *Theory of Airfoil Sections*. Dover, 1949.
- [11] A. K. Dutta, P. M. Flassig, and D. Bestle. Multi-Objective Blade Design Using a Quasi-3D Non-Dimensional Parameterization Approach. *CEAS-2007-219, Proceedings of CEAS, Berlin*, 2007.
- [12] P. M. Flassig. Multi-Objective Compressor Blade Optimisation Using a Non-Dimensional Parameterisation Approach. *CEAS-2007-220, Proceedings of CEAS, Berlin*, 2007.
- [13] J. Gräsel, A. Keskin, M. Swoboda, H. Przewozny, and A. Sixer. A Full Parametric Model for Turbomachinery Blade Design and Optimisation. *Proceedings of ASME DETC, DETC2004-57467*, 2004.
- [14] L. Piegl and W Tiller. *The NURBS Book*. Springer, Berlin, 2<sup>nd</sup> edition, 1997.
- [15] M. Padulo, M. S. Campobasso, and M. D. Guenov. Comparative Analysis Of Uncertainty Propagation Methods For Robust Engineering Design. *International Conferences on Engineering Design, ICED'07*, 2007.
- [16] Engenious Software Inc. *iSight-FD Version 2.5 User's Guide*, 2006.
- [17] E. B. Magrab, S. Azarm, B. Balachandran, J. Duncan, K. Herold, and G. Walsh. *An Engineer's Guide to MATLAB*. Prentice Hall, 2<sup>nd</sup> edition, 2004.
- [18] Rolls-Royce Deutschland Ltd & Co KG. *JA81 How-To Manual*, 2007.
- [19] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2001.
- [20] D. Bestle. *Analyse und Optimierung von Mehrkörper-systemen*. Springer, Berlin, 1994.
- [21] M. Hinz. *Prozessintegration und Optimierung in der Triebwerkstechnik – Ein Algorithmenvergleich*. Diplomarbeit, LS TMF, BTU Cottbus, 2007.