

# EFFIZIENTE ANALYSE INTERLAMINARER SPANNUNGEN IN THERMOMECHANISCH BEANSPRUCHTEN COMPOSITE-LAMINATEN

W. BECKER, Technische Universität Darmstadt, Hochschulstr. 1, D-64289 Darmstadt  
C. MITTELSTEDT, AIRBUS Deutschland GmbH, Kreetlag 10, D-21129 Hamburg

## Zusammenfassung

Dieser Beitrag ist dem Laminat-Randeffekt gewidmet, der im Auftreten stark lokalisierter hoher interlaminarer Spannungen im Bereich der freien Ränder eines Laminats besteht, mit der möglichen Folge vorzeitigen Laminatversagens und dem Auftreten von Randdelaminationen. Zunächst wird ein Überblick über die generelle Charakteristik des Laminat-Randeffekts gegeben. Darauf folgend werden drei unterschiedliche praxistaugliche Verfahren zur Analyse des Laminat-Randeffekts ausgewiesen, nämlich zum einen die Bewertung mit Hilfe von Delaminationskräften und –momenten, zum anderen die Finite-Elemente-Methode, und anschließend ein speziell entwickeltes effizientes semi-analytisches Verfahren, basierend auf lagenweisen Verschiebungsansätzen und einem Variationsprinzip. Die vorgestellten Verfahren erlauben es herauszufinden, wie sich die im konkreten Fall gegebene Randeffekt-Problematik jeweils möglichst weitgehend verharmlosen lässt. Einige allgemeine Empfehlungen für die Praxis und ein Ausblick auf weiterführende Probleme runden den Beitrag ab.

## 1. EINLEITUNG

Die Verformungs- und Beanspruchungsanalyse von Laminaten erfolgt in der Regel im Rahmen der sogenannten „klassischen Laminattheorie“ (siehe z. B. [1]-[3]), bei der für die Einzelschichten des Laminats ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt wird. Auch die Festigkeitsbewertung eines Laminats erfolgt meistens auf der Basis der Einzelschichtspannungen der klassischen Laminattheorie. So bewährt dieses Vorgehen für das „Innere“ eines Laminats sein mag, so unzulänglich kann es im Bereich der Ränder von Laminaten sein, insbesondere wenn es sich um freie, d.h. von außen unbelastete Ränder handelt. Obwohl einem ein freier Laminatrand rein intuitiv recht harmlos vorkommen mag, so können gerade hier stark lokalisierte interlaminare Spannungen auftreten, die den sogenannten „Laminat-Randeffekt“ ausmachen. Diese interlaminaren Spannungen können leicht zu vorzeitigem Laminatversagen führen, insbesondere in der Art von Randdelaminationen, und bedürfen deshalb einer besonderen Betrachtung.

Der vorliegende Beitrag möchte einen Zugang zum Laminat-Randeffekt und dessen Bewertung ermöglichen, und zwar insbesondere im Hinblick darauf, dass konstruktive Freiheiten bei der Wahl von Laminat-Layups dahingehend genutzt werden, den Laminat-Randeffekt so harmlos als möglich zu gestalten. Zunächst wird in das Wesen des Laminat-Randeffekts und die Mechanismen seiner im allgemeinen unerwünschten Entstehung eingeführt. Sodann werden drei unterschiedliche praxistaugliche Verfahren zur Analyse des Laminat-Randeffekts ausgewiesen. Dies ist zum einen die Bewertung mit Hilfe von Delaminationskräften und –momenten, die sich auf recht einfachem Wege aus den ebenen Spannungsfeldern nach der klassischen Laminattheorie geschlossen-analytisch berechnen lassen. Desweiteren besteht immer die Möglichkeit der

detaillierten numerischen Analyse mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode, wobei man aber aufgrund des singulären Charakters des Randspannungsfeldes oftmals sehr aufwendige Vernetzungen benötigt und man daher recht schnell an die Grenzen der praktischen Umsetzbarkeit stößt. Alternativ dazu wird zuletzt die Implementierung eines speziell entwickelten semi-analytischen Verfahrens vorgestellt, das sich als äußerst effizient und in seiner Genauigkeit dennoch als vergleichbar mit Finite-Elemente-Berechnungen erwiesen hat. Im Rahmen dieses Verfahrens werden die Lamineinzelschichten in virtuelle Subschichten eingeteilt. In jeder Subschicht wird ein Verschiebungsansatz formuliert, dessen Unbekannten aus dem Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials sowie aus den gegebenen Randbedingungen ermittelt werden. Die dargestellten Verfahren machen es möglich herauszufinden, wie sich die im konkreten Fall gegebene Randeffekt-Problematik jeweils möglichst weitgehend verharmlosen lässt. Einige allgemeine Empfehlungen für die Praxis und ein Ausblick auf weiterführende Probleme runden den Beitrag ab.

## 2. DAS WESEN DES LAMINAT-RANDEFFEKTS

Wie schon angesprochen besteht der Laminat-Randeffekt im lokalisierten Auftreten hoher interlaminarer Spannungen im Bereich der freien Ränder eines Laminats. Die Ursache hierfür liegt letztlich in den lagenweise wechselnden Einzelschichtsteifigkeiten, insbesondere wenn die Einzelschichten unterschiedliche Querkontraktionseigenschaften oder unterschiedliche Schubkopplungseigenschaften besitzen. Beispielhaft sei die in Bild 1 gezeigte  $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Laminatprobe unter einachsiger Dehnbeanspruchung  $\varepsilon_{11}$  betrachtet. Wenn die vorhandenen Einzelschichten nicht wie in der Realität fest miteinander gefügt wären, würden sie sich bei der vorgegebenen Dehnung  $\varepsilon_{11}$  aufgrund der unterschiedlichen Querkontraktionseigenschaften in  $x_2$ -

Richtung unterschiedlich kontrahieren und dabei insbesondere im Randbereich stark gegeneinander verrutschen (Bild 1, oben).

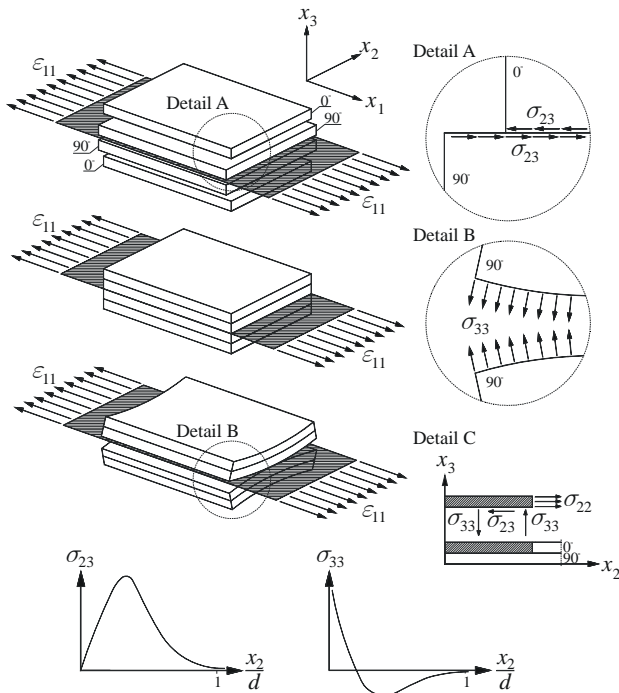


BILD 1: Zum Randeffekt im  $[0^\circ/90^\circ]_s$ -Kreuzverbund unter einachsiger Dehnung

Bei einer intakten Fügung oder Verklebung kommt es hierzu natürlich nicht, aber die Folge ist dann eine gegenseitige „Verspannung“ der benachbarten  $0^\circ$ - und  $90^\circ$ -Einzelschichten mit einer im Randbereich lokalisiert auftretenden interlaminaren Scherspannung  $\sigma_{23}$  (Bild 1, Mitte und Detail A). Aus Gleichgewichtsgründen muss dann zusätzlich auch eine interlaminare Schälspannung  $\sigma_{33}$  auftreten (Bild 1, Detail B und Detail C). Der Verlauf der interlaminaren Spannungen  $\sigma_{23}$  und  $\sigma_{33}$  ist in Bild 1, unten, qualitativ dargestellt. Bemerkenswert ist, dass die interlaminare Schälspannung  $\sigma_{33}$  direkt am Rand eine Singularität aufweist (d.h. unendlich groß wird) und dass  $\sigma_{33}$  einen Nulldurchgang aufweist (und zwar so, dass  $\sigma_{33}$  im Integral verschwindet). Jenseits eines Bereichs von der Größenordnung der Laminatdicke  $d$  gehen die interlaminaren Spannungen alle asymptotisch gegen Null, und es gelten rein die Gegebenheiten der klassischen Laminattheorie.

Als weiteres Beispiel sei die in Bild 2 skizzierte  $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund-Zugprobe unter einachsiger Dehnung  $\varepsilon_{11}$  betrachtet. Wenn die vorhandenen Einzelschichten nicht wie in der Realität fest miteinander gefügt wären, würden sie sich bei der vorgegebenen Dehnung  $\varepsilon_{11}$  aufgrund der unterschiedlichen Schubkopplungseigenschaften in  $x_1$ -Richtung unterschiedlich stark Schubdeformieren und dabei insbesondere im Randbereich stark gegeneinander verrutschen (Bild 2, oben). Bei einer intakten Fügung oder Verklebung kommt es hierzu natürlich nicht, aber die Folge ist dann eine gegenseitige „Schub-Verspannung“ der benachbarten  $+45^\circ$ - und  $-45^\circ$ -Einzelschichten mit einer im Randbereich lokalisiert auftretenden

interlaminaren Scherspannung  $\sigma_{13}$  (Bild 2, Mitte, Details A und B), die mit der ebenen Schubspannung  $\sigma_{12}$  weiter im Laminatinneren im Gleichgewicht stehen muss. Direkt am freien Laminatrand ist diese singulär, ins Laminatinnere klingt sie auf einer charakteristischen Länge von der Größenordnung der Laminatdicke asymptotisch gegen Null ab. Randeffekte in Winkelverbund-Zugproben gehen aufgrund der unterschiedlichen Schubkopplungseigenschaften in  $x_1$ -Richtung zudem mit ausgeprägten Schubdeformationen im Randbereich einher, wie es in Bild 2, unten, qualitativ dargestellt ist.

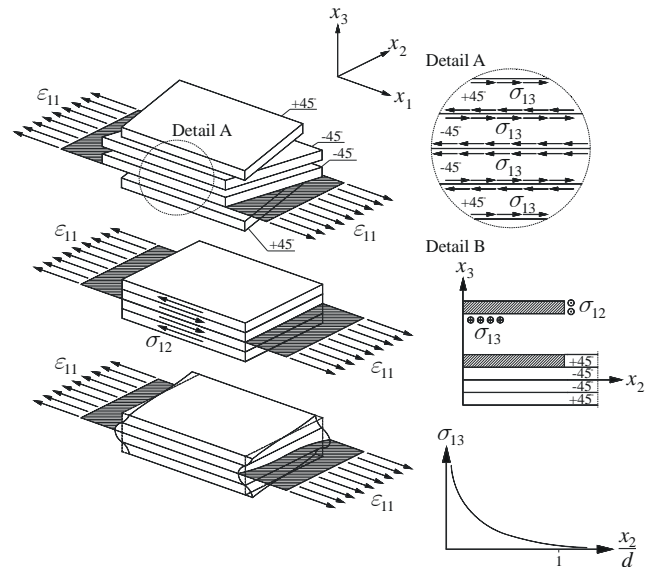


BILD 2: Zum Randeffekt im  $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund unter einachsiger Dehnung

Bei beliebigen Laminatlagenaufbauten werden im allgemeinen alle drei interlaminaren Spannungskomponenten  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  und  $\sigma_{33}$  gemeinsam auftreten. Wenn das Auftreten auch auf einen Streifen von der Größe der Laminatdicke beschränkt ist, so ist die resultierende Randdelaminationsneigung doch von entscheidender praktischer Relevanz.

### 3. VERFAHREN ZUR ANALYSE DES LAMINAT-RANDEFFEKTES

Während der Laminat-Randeffekt seit der grundlegenden Arbeit von Pipes und Pagano [4] auch ständig Gegenstand intensiver Forschung gewesen ist, so ist bis heute keine allgemeine elastizitätstheoretische geschlossen-analytische Lösung bekannt. Gleichwohl gibt es eine ganze Reihe geschlossen-analytischer Näherungslösungen und unzählige rein numerische Untersuchungen. Für eine Übersicht sei zum Beispiel auf [5], [6] verwiesen. Es wird hier auf drei unterschiedliche Verfahren zur Analyse des Laminat-Randeffekts eingegangen, auf die Methode der Delaminationskräfte und -momente, auf die Analyse mittels der Finite-Elemente-Methode und auf ein semianalytisches Verfahren [7], [8], das auf einer bloßen Randdiskretisierung basiert.

#### 3.1. Delaminationskräfte und -momente

Für das gegebene Laminat werden zunächst im

Randbereich die ebenen Spannungen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{12}$  gemäß klassischer Laminattheorie berechnet. Unmittelbar am Rand entsprechen diese natürlich nicht den wirklichen Randbedingungen, weshalb ja interlaminare Schub- und Schälspannungen entstehen müssen. Es sei vorausgesetzt, dass der freie Rand durch  $x_2 = 0$  gegeben ist und bei einem Laminat mit  $n$  Einzelschichten die Schichtübergänge (Interfaces) bei den  $x_3$ -Koordinaten  $x_3^1, \dots, x_3^k, \dots, x_3^{n-1}$  liegen, während die untere Deckfläche des Laminats durch  $x_3^0 = -d/2$  und die obere Deckfläche des Laminats durch  $x_3^n = d/2$  gegeben ist, wie es in Bild 3 dargestellt ist.

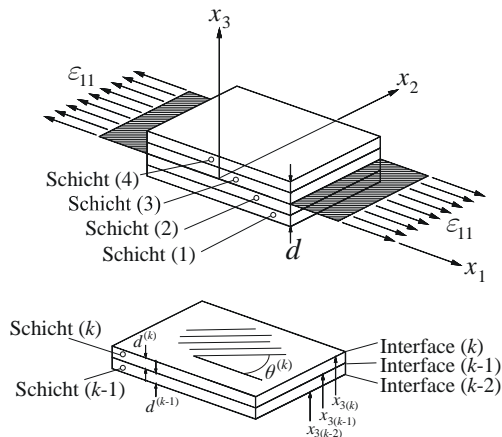


BILD 3: Einzelschichten und Interfaces im Laminat

Als Maß für die im Interface  $k$  in Randnähe auftretenden interlaminaren Schubspannungen  $\sigma_{23}$  werden dann die folgenden Delaminationskräfte  $N_{22}^k$  eingeführt:

$$(1) \quad N_{22}^k = \int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}} \sigma_{22} dx_3.$$

Analog werden als Maß für die im Interface  $k$  in Randnähe auftretenden interlaminaren Schubspannungen  $\sigma_{13}$  die folgenden Delaminationskräfte  $N_{12}^k$  eingeführt:

$$(2) \quad N_{12}^k = \int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}} \sigma_{12} dx_3.$$

Weiter werden als Maß für die entlang des Interfaces  $k$  in Randnähe auftretenden interlaminaren Schälspannungen  $\sigma_{33}$  bezüglich des selben Interfaces die folgenden Delaminationsmomente  $M_{22}^k$  eingeführt:

$$(3) \quad M_{22}^k = \int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}} \sigma_{22} (x_3 - x_3^k) dx_3.$$

Bei einem positiven Delaminationsmoment  $M_{22}^k > 0$  ist auf eine positive Schälspannung  $\sigma_{33} > 0$  direkt am Rand im Interface  $k$  zu schließen, und damit auch auf eine entsprechend zu erwartende Delaminationsneigung. Bei einem negativen Delaminationsmoment  $M_{22}^k < 0$  ist auf eine negative Schälspannung  $\sigma_{33} < 0$  direkt am Rand zu schließen, d.h. eine Druckspannung, die keine Delaminationsneigung erwarten lässt.

Die Bewertung der Delaminationsneigung mit Hilfe der Delaminationskräfte und Delaminationsmomente läuft auf

die Frage hinaus, ob die kritischsten Interfaces die dort wirkenden Delaminationskräfte bzw. -momente „ertragen“ können. Erforderlichenfalls sind dem experimentell zu ermittelnde Delaminationsfestigkeiten gegenüber zu stellen. Eine Verharmlosung der Randeffect-Problematik kann durch den Übergang zu Laminatlagenaufbauten erreicht werden, die geringere Delaminationskräfte und -momente mit sich bringen.

### 3.2. Finite-Elemente-Analysen

Als recht universelles rein numerisches Verfahren steht natürlich auch die Finite-Elemente-Methode zur Analyse des Laminat-Randeffects mit zur Verfügung. Allerdings bedarf es dabei einer sehr problembewussten und gezielten Modellbildung und Diskretisierung, einerseits um den Laminat-Randeffect adäquat zu erfassen, andererseits um den numerischen Aufwand in vernünftigen Grenzen zu halten. Entlang eines geraden freien Laminatrandes ist es zweckmäßig, die Randeffect-Analyse innerhalb eines repräsentativen Laminatstreifens der willkürlich gewählten Breite  $b$  durchzuführen, wobei dieser Streifen durch zwei ebene Schnittflächen senkrecht zum freien Laminatrand begrenzt ist, wie es in Bild 4 skizziert ist.

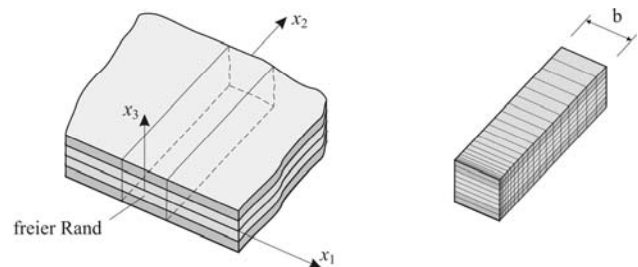


BILD 4: Finite-Elemente-Modellierung

Innerhalb dieses Streifens kann die Finite-Elemente-Diskretisierung durch Volumenelemente erfolgen, wobei in Richtung der Streifenbreite  $b$  sich die Diskretisierung auf ein einzelnes Element beschränken kann. In den Laminat-einzelschichten hinreichend weit vom Rand entfernt kann die Diskretisierung auch relativ grob sein, da sich hier die Gegebenheiten der klassischen Laminattheorie einstellen werden. In der Umgebung des freien Randes jedoch ist eine erhebliche Netzverfeinerung erforderlich, und das gilt in besonderem Maße im Bereich der Einzelschichtübergänge am Rand, wo sich im Rahmen einer dreidimensionalen elastizitätstheoretischen Betrachtung sogar Spannungssingularitäten ausbilden. Eine genauere Beschreibung aller auftretenden lokalen Feldgrößen erfordert leicht eine extreme Netzverfeinerung und einen entsprechend großen numerischen Aufwand. Immerhin sind bei den immer leistungsfähiger werdenden Rechnern hier die Möglichkeiten mittlerweile schon recht weitgehend vorhanden. Um die realen Verhältnisse im Laminat zu erfassen, ist es weiterhin notwendig, über Multi-Point-Constraints sicherzustellen, dass die beiden Schnittflächen des Laminatstreifens sich in der gleichen Weise verformen, wobei Verwölbungen der im undeformierten Zustand ebenen Schnittflächen zugelassen werden müssen. Die eigentliche Lastaufbringung auf das Laminat wird in der Regel über diese Multi-Point-Constraints erfolgen, z. B. in dem die

Dabei sind sämtliche unbekannten Verschiebungsfunktionen in einem Spaltenvektor  $\underline{U}$  zusammengefasst. Der Vektor der rechten Seite  $\underline{R}$  und die Koeffizientenmatrizen  $\underline{K}_1$ ,  $\underline{K}_2$  und  $\underline{K}_3$  finden sich zum Beispiel in [8] detaillierter angegeben. Bei der Beziehung (10) handelt es sich um ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, dessen allgemeine Lösung aus homogenen Lösungsanteilen der Art  $\underline{A}e^{\lambda x_2}$  aufgebaut ist, d.h. es ergibt sich

$$(11) \underline{U}_{\text{hom}} = \sum_{r=1}^{r=3(n_L+1)} b_r \underline{A}_r e^{\lambda_r x_2}.$$

mit zunächst noch freien Konstanten  $b_r$  ( $r=1,2,\dots,3(n_L+1)$ ). Diese Konstanten ergeben sich schließlich aus den gegebenen Randbedingungen eines belastungsfreien Laminatrandes, die in geeignet integrierter Form erfüllt werden können. Für weitergehende Details sei auf [7] und [8] verwiesen.

Das damit nun dargestellte semi-analytische Verfahren erfordert die eigenständige Programmierung der entsprechenden Gleichungen und Beziehungen, was mit einem gewissen Aufwand verbunden ist. Andererseits ist das Verfahren aber von der numerischen Effizienz einer entsprechenden Finite-Elemente-Analyse weit überlegen, was sich bei Parameterstudien und Optimierungen schnell auszahlt.

#### 4. NUTZEN DER RANDEFFEKT-ANALYSEN

Beim Laminat-Randeffekt bringt es die Besonderheit singulärer Spannungen mit sich, dass diskretisierende Verfahren (wie die Methode der finiten Elemente oder das dargestellte semi-analytische Verfahren) umso höhere Spannungen ausweisen, je feiner die vorgenommene Diskretisierung gewählt wird. Insofern lässt sich bei einer rein Spannungs-basierten Auslegung im Zusammenhang mit dem Randeffekt ein Laminat mit einer entsprechend feinen Diskretisierung leicht „kaputt-rechnen“, wenn es auch in der Realität nicht versagt. Hier liegt eine ähnliche Situation vor wie bei den Spannungssingularitäten an Rissspitzen innerhalb der linear-elastischen Bruchmechanik, wobei die Spannungssingularitäten des Laminat-Randeffekts meistens von erheblich geringerer Ordnung sind als die  $1/\sqrt{r}$ -Spannungssingularitäten der Riss-Bruchmechanik. Letztlich sind die Spannungssingularitäten ein Ergebnis der zugrundeliegenden linear-elastischen Idealisierungen.

Wenn eine zuverlässige Versagens- oder Nichtversagensaussage auch einer bruchmechanischen Bewertung bedarf, so liegt der Wert der dargestellten Randeffekt-Analysen vor allem in der Möglichkeit einer vergleichenden Bewertung von Laminat-Design-Alternativen. Auch lassen sich über entsprechende Sensitivitätsanalysen Trendaussagen gewinnen, und es lässt sich herausfinden, in welcher Weise sich die Randeffekt-Problematik verharmlosen lässt.

#### 5. ERGEBNISSE UND DISKUSSION

Die vorgestellten Analyse-Verfahren zum Laminat-Randeffekt sollen nun einer vergleichenden Betrachtung unterzogen werden. Zunächst zeigt Bild 6 eine Gegenüberstellung einiger Ergebnisse nach dem semi-analytischen Verfahren mit Finite-Elemente-Berechnungen nach Reddy [1] für einen longitudinal durch eine Zugdehnung  $\varepsilon_{11} = 0,01$  beanspruchten  $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund aus typischem kohlefaserverstärktem Kunststoff, und zwar für die dort klassischerweise auftretenden interlaminaren Spannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{33}$ , im direkten Randbereich aufgetragen über die Dickenkoordinate  $x_3$ . Für tiefergehende Details zu diesen Berechnungen sei auf die Publikation [8] verwiesen.

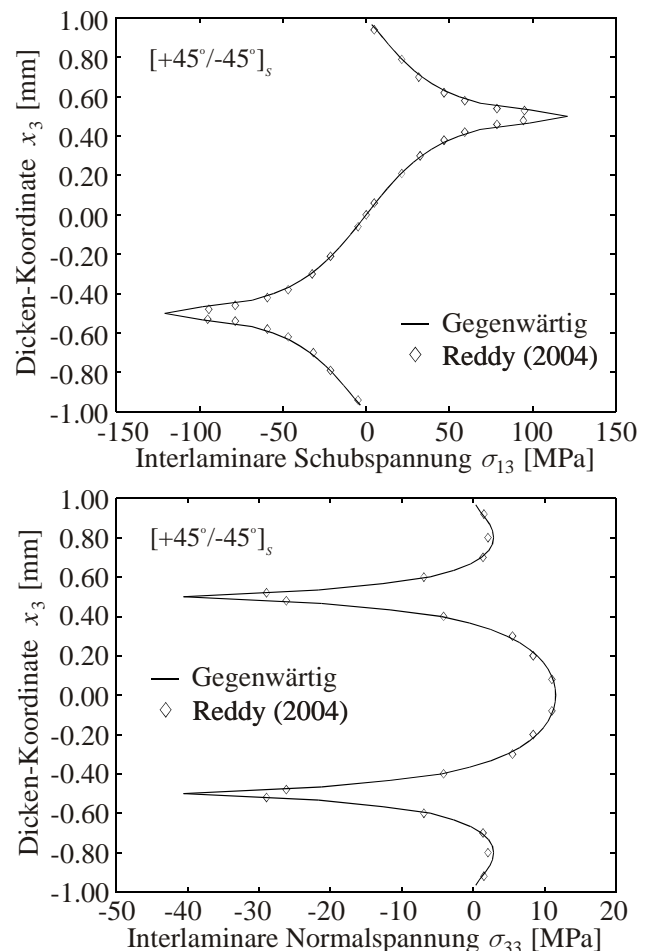


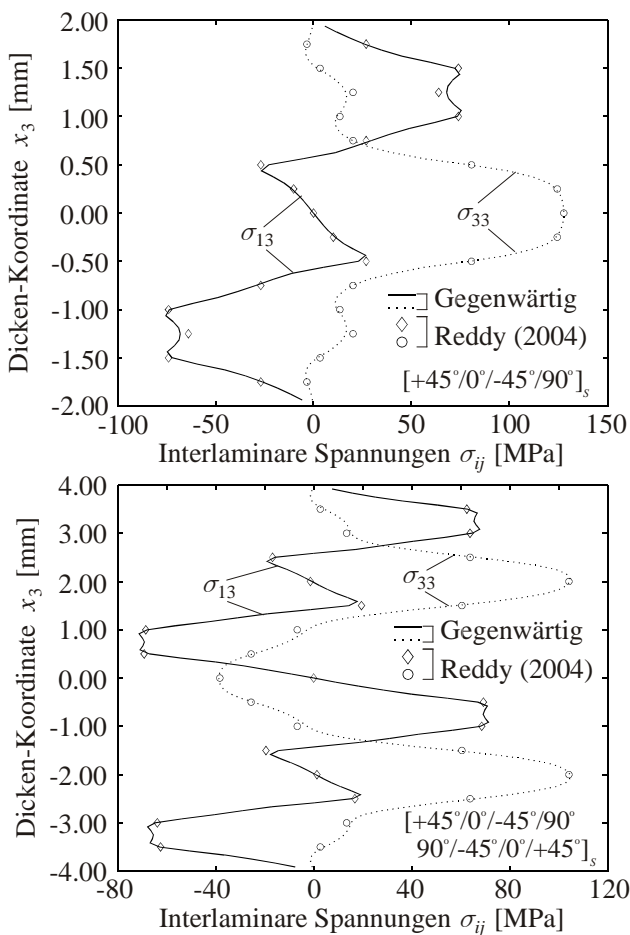
BILD 6: Gegenüberstellung der Ergebnisse nach dem semi-analytischen Verfahren mit Finite-Elemente-Berechnungen von Reddy [1] für einen  $[\pm 45^\circ]_s$ -Winkelverbund unter uniaxialer Zugbelastung.

Insgesamt zeigt sich, dass das semi-analytische Verfahren nahezu identische Ergebnisse wie die rein numerische Finite-Elemente-Analyse ergibt. Besonders ist hierbei hervorzuheben, dass das semi-analytische Verfahren Ergebnisse innerhalb weniger Sekunden liefert, wohingegen die Rechenzeit von gut auskonvergierten Finite-Elemente-Ergebnissen im Falle von Randeffekt-Analysen mindestens im Minutenbereich anzusiedeln ist, was den Nutzen alternativer semi-analytischer Ansätze unterstreicht. Ansonsten zeigt Bild 6 die für diese Klasse von Laminaten typischen Verläufe der interlaminaren Spannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{33}$ , d.h. Maximalwerte auf Höhe der Interfaces der  $[\pm 45^\circ]$ -Lagen, die durch die Spannungssingularitäten hervorgerufen werden, sowie verschwindende interlaminare Spannungen an den freien Laminatoberflächen. Offensichtlich treten in diesem Beispiel unter dem gegebenen Lastfall in den Interfaces am freien Rand ausschließlich negative Schälspannungen  $\sigma_{33}$  auf, so dass gefolgert werden kann, dass man es hier vermutlich nicht mit einem Delaminationsversagen in Form einer klassischen Mode-I-Rissöffnung zu tun haben wird. Hingegen zeigen sich aber im Bereich der Laminatmittelebene positive und damit potentiell kritische Schälspannungen  $\sigma_{33}$ , deren Kritikalität geeignet zu beurteilen ist. Darüber hinaus zeigen sich im Bereich der Interfaces der  $[\pm 45^\circ]$ -Lagen erhebliche interlaminare



Schubspannungen  $\sigma_{13}$ , deren Anwesenheit ebenfalls ein vorzeitiges Laminatversagen begünstigen kann und daher in eine Bewertung des interlaminaren Spannungszustandes auch mit einfließen muss.

Bild 7 zeigt einen analogen Vergleich für ein 8-lagiges  $[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  – Laminat (Bild 7, oben) und für ein 16-lagiges Laminat mit dem Aufbau  $[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  (Bild 7, unten). Auch hier ist der Lastfall eine einachsige Zugdehnung  $\varepsilon_{11}=0,01$  (Details s. [8]). Wiederum zeigt sich, dass der Vergleich der Ergebnisse nach dem semi-analytischen Verfahren und den Finite-Elemente-Berechnungen nach Reddy äußerst positiv ausfällt, was den Wert solch alternativer Berechnungsverfahren hervorhebt. Das gilt natürlich speziell im Hinblick auf die notwendige Rechenzeit, die insbesondere bei Finite-Elemente-Analysen in Gegenwart singularer Spannungen einzuplanen ist und leicht zu einem nicht akzeptablem Aufwand führen kann.



**BILD 7:** Gegenüberstellung der Ergebnisse nach dem semi-analytischen Verfahren mit Finite-Elemente-Berechnungen von Reddy [1] für ein 8-lagiges  $[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  – Laminat (oben) und für ein 16-lagiges Laminat mit dem Aufbau  $[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  (unten) unter uniaxialer Zugbelastung

Abschließend soll noch das Verfahren der Delaminationskräfte und –momente kurz beleuchtet werden, wobei wir uns gegenwärtig nur auf die Betrachtung der Delaminationsmomente für das 8-lagige

$[+45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$  – Laminat beschränken wollen. Hier ergab eine Berechnung nach der klassischen Laminattheorie die folgenden Werte für die Delaminationsmomente in den Interfaces 1 bis 7 (hier aus Symmetriegründen nur angegeben für die Interfaces 4 - 7):

$$M_{22}^4 = \int_{x_3^4}^{x_3^5} \sigma_{22} (x_3 - x_3^4) dx_3 = 191,32 \text{ N},$$

$$(12) \quad M_{22}^5 = \int_{x_3^5}^{x_3^6} \sigma_{22} (x_3 - x_3^5) dx_3 = 143,49 \text{ N},$$

$$M_{22}^6 = \int_{x_3^6}^{x_3^7} \sigma_{22} (x_3 - x_3^6) dx_3 = 71,78 \text{ N},$$

$$M_{22}^7 = \int_{x_3^7}^{x_3^8} \sigma_{22} (x_3 - x_3^7) dx_3 = 23,95 \text{ N}.$$

Ein Vergleich mit dem entsprechenden Verlauf der Schälspannung  $\sigma_{33}$  in Bild 7, oben, zeigt, dass sich mit Hilfe von Delaminationsmomenten zumindest in qualitativer Hinsicht gut abschätzen lässt, inwieweit man es einerseits im betrachteten Interface mit positiven oder negativen Schälspannungen zu tun hat, und in welcher Größenordnung andererseits die Schälspannung im Vergleich mit anderen Interfaces ausfallen wird. Offensichtlich ergibt sich das größte Delaminationsmoment im Interface 4 (das hier mit der Laminatmittelebene zusammenfällt), während das kleinste Delaminationsmoment im Interface 7 auftritt. Dies ist in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen in Bild 7, oben, wo die maximalen und minimalen Schälspannungen  $\sigma_{33}$  ebenfalls in den Interfaces 4 bzw. 7 auftreten.

## 6. EMPFEHLUNGEN FÜR DIE PRAXIS

Ob und in welcher Weise die Randeffekt-Problematik zu einem vorzeitigen und unerwünschten Versagen führen kann, ist stark abhängig vom verwendeten Einzelschichtmaterial, von der Einzelschichtfügung, vom Laminatlagenaufbau, von den vorliegenden geometrischen Gegebenheiten und von den zu betrachtenden Lastfällen (mechanisch, thermisch, Feuchte). Trotzdem können die folgenden allgemeinen Empfehlungen für die Praxis gegeben werden:

- Bei der Festlegung des Laminat-Layups sollte man immer versuchen, allzu große Steifigkeitsunterschiede zwischen unmittelbar benachbarten Einzelschichten zu vermeiden, insbesondere auch Steifigkeitsunterschiede, die durch unterschiedliche Einzelschichtausrichtungen bedingt sind.
- Bei unidirektional faserverstärkten Einzelschichten sollten möglichst keine zu großen Winkelunterschiede in den Faserrichtungen unmittelbar benachbarter Einzelschichten vorkommen.
- Es sollten möglichst dünne Einzelschichten Verwendung finden.
- Man sollte das Zusammenfügen (oder Clustern) mehrerer unmittelbar benachbarter dünner Einzelschichten gleicher Verstärkungsrichtung zu

einer effektiven, entsprechend dickeren Einzelschicht vermeiden. Die vorhandenen dünnen Einzelschichten sollten „gut durchmischt“ sein (bei nicht zu großen Faserwinkelsprüngen).

- e) Erforderlichenfalls sollte man versuchen, durch eine Permutation der vorhandenen Laminat-Einzelschichten zu erreichen, dass interlaminae Schälspannungen direkt am Laminatrand möglichst als Druckspannungen auftreten.
- f) Erforderlichenfalls ist einer vorhandenen Randdelaminationsneigung durch geeignete Zusatzmaßnahmen (wie z.B. gegenseitiges Vernähen der Einzelschichten oder die Verwendung einer Randeinfassung) zu begegnen.

## 7. VERWANDTE PROBLEME

Aus unterschiedlichen Gründen (z. B. für Kabeldurchführungen) kann es notwendig sein, ein Laminat mit einem Loch zu versehen, wobei der einfachste Fall der eines kreisförmigen Loches ist (Bild 8).

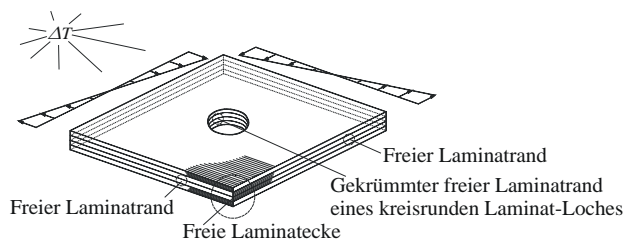


BILD 8: Laminat-Loch-Problematik; Rechtwinklige freie Laminecke, Lamineckeneffekt

Dient ein solches Loch nicht zur Lasteinleitung oder Lastübertragung (z. B. durch eine Bolzenverbindung), sondern ist frei von äußeren Lasten, so liegt wiederum entlang des Lochrandes der Fall eines freien Laminatrandes vor, entlang dessen sich ein entsprechender Randeckeneffekt ausbilden kann. Da ein Laminatloch zudem den Fall eines Spannungskonzentrators darstellt (entlang des Lochrandes stellen sich um einen Layup- und Lastfall-abhängigen Lochspannungskonzentrationsfaktor überhöhte Spannungskomponenten tangential zum Rand ein), tritt der Laminat-Randeckeneffekt entsprechend ausgeprägter auf und führt leicht zu Randdelaminationen, die vom Lochrand aus in das Laminat hineinwandern. Die Untersuchung der entsprechenden Spannungsfelder ist zur Zeit noch nicht erschöpfend erfolgt (siehe dazu z. B. [6] oder [9]). Im Bedarfsfall kann hierzu natürlich die Methode der finiten Elemente herangezogen werden, wobei die erforderliche Netzverfeinerung im Bereich des Lochrandes schnell zu vergleichsweise großen Finite-Elemente-Modellen führt [9].

Eine andere in der Praxis häufig auftretende Situation ist die freie Laminecke, z. B. rechtwinkliger Laminecken, wie sie ebenfalls in Bild 6 skizziert ist. Hier tritt quasi als Überlagerung der entlang der angrenzenden geraden Laminatränder sich ausbildenden Randeckeneffekte ein sogenannter „Laminat-Eckeneffekt“ auf, der sich nur mit einer vollständig dreidimensionalen elastizitätstheoretischen Strukturanalyse erschließen lässt. Je nach

Laminat-Layup und Lastfall kann der Laminat-Eckeneffekt sowohl mit harmloseren als auch mit kritischeren, ausgeprägteren interlaminae Spannungen einhergehen. Für weitergehende Untersuchungen und entsprechende unterschiedliche Analysezugänge sei hierzu auf [6], [10] oder [11] verwiesen.

## 8. AUSBLICK: BEWERTUNG DES LAMINAT-RANDEFFEKTES MIT HYBRIDEN KRITERIEN

Wegen der im allgemeinen vorhandenen elastizitätstheoretischen Spannungssingularität bringen es diskretisierende numerische Untersuchungen des Randeckeneffekts in der Regel mit sich, dass sich mit ihnen mit feiner werdender Diskretisierung immer höhere lokale Spannungen ausweisen lassen. Im Prinzip lassen sich damit im Rahmen einer spannungsbasierten Festigkeitsbewertung schon bei geringer Belastung Laminat „kaputtrechnen“, obwohl es in der Realität zu keinem Versagen kommt. Diese Situation ist der der Bruchmechanik von Rissen und Kerben ähnlich, wo ja auch (und zwar aus geometrischen Gründen) Spannungssingularitäten vorkommen, mit denen man in vielen Fällen „leben kann“. Ähnlich wie im Fall von Rissen ist auch beim Laminat-Randeckeneffekt das vorhandene Material in der Regel in der Lage, eine lokale Überbeanspruchung „auszuhalten“, solange die Überbeanspruchung nicht von zu großer Intensität ist. Zu einer genauen quantitativen Bewertung der Situation ist in diesem Fall eine bruchmechanische Herangehensweise erforderlich. Allerdings kann dies nicht in der gleichen Art wie in der Rissbruchmechanik erfolgen, die jeweils das Vorhandensein eines Risses voraussetzt. Eine Bewertungsmöglichkeit ergibt sich allerdings im Rahmen der sogenannten „finiten Bruchmechanik“ (siehe dazu etwa [12]), die ausgehend vom rissfreien Anfangszustand die instantane Initiierung eines Risses endlicher Länge zulässt, wobei es zweckmäßig ist, zur Überwindung der Kluft zwischen einer rein spannungsbasierten Bewertung und einer rein bruchmechanischen Bewertung ein „hybrides“ Rissinitiierungskriterium zu verwenden, wie es von Leguillon in [13] vorgeschlagen wurde. Diese Art der Randeckeneffekt-Bewertung ist Gegenstand aktueller Forschung, siehe dazu etwa [14].

## 9. LITERATUR

- [1] **J.N. Reddy:** *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. Zweite Auflage, CRC Press, Boca Raton et al. 2004.
- [2] **H. Altenbach, J. Altenbach, R. Rikards:** *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke*. Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie, Stuttgart 1996.
- [3] **W. Becker, D. Gross:** *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002.
- [4] **R. B. Pipes, N. J. Pagano:** *Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension*. Journal of Composite Materials 4 (1970), 538-548.
- [5] **C. Mittelstedt, W. Becker:** *Free-edge effects in composite laminates*. Applied Mechanics Reviews

60 (2007), 217-245.

- [6] **C. Mittelstedt:** *Free-edge and free-corner effects in composite laminates – Closed-form analytical and semi-analytical approaches.* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 307. VDI-Verlag, Düsseldorf 2006.
- [7] **C. Mittelstedt, W. Becker:** *Fast and reliable analysis of free-edge stress fields in a thermally loaded composite strip by a layerwise laminate theory.* International Journal for Numerical Methods in Engineering 67 (2006), 747-770.
- [8] **C. Mittelstedt, W. Becker:** *The Pipes-Pagano problem revisited: Elastic fields in boundary layers of plane laminated specimens under combined thermomechanical load.* Composite Structures 80 (2007), 373-395.
- [9] **F.Z. Hu, C. Soutis, E.C. Edge:** *Interlaminar stresses in composite laminates with a circular hole.* Composite Structures 37 (1997), 223-232.
- [10] **C. Mittelstedt, W. Becker:** *Interlaminar stress concentrations in layered structures - part II: closed-form analysis of stresses at laminated rectangular wedges with arbitrary non-orthotropic layup.* Journal of Composite Materials 38 (2004), 1063-1090.
- [11] **C. Mittelstedt, W. Becker:** *Thermoelastic fields in boundary layers of isotropic laminates.* Journal of Applied Mechanics 72 (2005), 86-101.
- [12] **Z. Hashin:** *Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids 44 (1996), 1129-1145.
- [13] **D. Leguillon:** *Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch.* European Journal of Mechanics A/Solids 21 (2002) 61-72.
- [14] **J. Hebel, W. Becker:** *Numerical analysis of brittle crack initiation at stress concentrations in composites.* Eingereicht zur Publikation in Mechanics of Advanced Materials and Structures.