

# BESTIMMUNG DES RESERVE-FAKTORS BEI ALLGEMEINER NICHTLINEARER ÜBERLAGERUNG VON STABILITÄTSFÄLLEN (INTERAKTION OHNE MISCHGLIEDER)

Prof. Franz Joseph Arendts  
Hertlingstr. 8, 81545 München  
Institut für Flugzeugbau, Universität Stuttgart

## Zusammenfassung

Sowohl beim Festigkeitsnachweis gegen Bruch, als auch beim Nachweis der Stabilitätsgrenze, werden meist nichtlineare Überlagerungen verwendet. Mit diesen Beziehungen, die dem Statiker entweder als Formeln oder als Diagramme zur Verfügung stehen, muß der Reserve-Faktor für vorgegebene Lastfälle bzw. für die entsprechenden Schnittkräfte ermittelt werden. Bei Durchsicht der verfügbaren Unterlagen stellt man fest, daß nicht alle häufig vorkommenden Überlagerungen behandelt sind, und daß für eine Reihe von Fällen die Unterlagen zur rechnergestützten Anwendung ungeeignet sind.

Im vorliegenden Beitrag wird eine Vorgehensweise beschrieben bzw. abgeleitet, die eine analytische Ermittlung des Reserve Faktors ermöglicht und es wird ein Vorschlag für eine Erweiterung der Arbeitsunterlagen gemacht. Hierfür werden für Lastkombinationen, für die nur Diagramme verfügbar sind, geeignete analytische Näherungsansätze vorgeschlagen. Mit diesen Formeln lassen sich Interaktionsformeln für beliebige Lastkombinationen zusammenfügen.

## Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Vergleichsspannungen und Interaktionsformeln
3. Bestimmung des Reserve-Faktors aus einer allgemeinen Interaktionsformel
- 3.2 Allgemeine Interaktionsformel (ohne Mischglieder)
- 3.2 Bestimmung der Interaktionsformel aus einzelnen Interaktionen zweier R-Werte
4. Interaktionsformeln für verschiedene Belastungsfälle
- 4.1 Allgemeines
- 4.2 Druck – Druck für  $a/b > 1,0$
- 4.3 Druck – Schub
- 4.4 Druck – Druck – Schub
- 4.5 Druck – Druck – Biegung längs
- 4.6 Druck längs – Biegung längs – Schub
- 4.7 Druck quer – Biegung längs – Schub
- 4.8 Druck – Druck – Biegung längs – Schub
- 4.9 Druck – Druck – Biegung – Biegung – Schub (Allgemeinste Interaktion)
5. Bewertung der Ergebnisse

## 1. EINLEITUNG

Sowohl beim Festigkeitsnachweis gegen Bruch als auch beim Nachweis der Stabilitätsgrenze werden meist nichtlineare Überlagerungen verwendet. Mit diesen Beziehungen, die dem Statiker entweder als Formeln oder als Diagramme zur Verfügung stehen, muß der Reserve-Faktor für vorgegebene Lastfälle bzw. für die entsprechenden Schnittkräfte ermittelt werden. Viele dieser Formeln für eine Überlagerung und zur Berechnung des Reserve-Faktors sind in einschlägigen Unterlagen, z.B. HSB, Bruhn, Analysis & Design of Flight Vehicles Structures, angegeben, oft mit Quellenangabe, aber immer ohne Ableitung und Erklärung. Neben den Formeln stehen auch Diagramme zur Verfügung, für die das gleiche gilt.

Bei Durchsicht der verfügbaren Unterlagen stellt man fest, daß nicht alle häufig vorkommenden Überlagerungen behandelt sind und daß für eine Reihe von Fällen die Unterlagen zur rechnergestützten Anwendung ungeeignet sind.

Im vorliegenden Beitrag wird die Vorgehensweise beschrieben bzw. abgeleitet und ein Vorschlag für eine Erweiterung der Arbeitsunterlagen gemacht.

Bei der Berechnung werden „einachsige“ Auslastungsfaktoren  $R_{\text{Index}}$  = vorhandener Belastungswert / zulässiger Belastungswert eingeführt, wobei der Belastungswert eine Spannung, eine Kraft oder ein Moment sein kann. Der zulässige Wert ist entweder der Bruchwert (bei statischer Dimensionierung) oder die minimale Stabilitätsgrenze. Der Kehrwert von  $R_{\text{Index}}$  ist der Reserve-Faktor für die entsprechende einachsige Belastung.

Gleiches gilt auch für die überlagerten Werte, wobei dann  $R = 1/\text{RF}$  ohne Indizierung verwendet wird. Es ist darauf zu achten, daß „R“ sowohl für eine – dimensionslose – Auslastung, als auch für einen Festigkeits- bzw. Bruchwert verwendet wird.

## 2. VERGLEICHSSPANNUNGEN UND INTERAKTIONSFORMELN

Als Vergleichsspannungen werden die Hauptspannungen  $\sigma_{1,II}$  (Normalspannungshypothese) und die sogenannte von Mises-Spannung (Oktaederschubhypothese, Hypothese der Gestaltänderung) verwendet, wobei letztere im Flugzeugbau üblich ist.

$$\sigma_V = \sigma_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2} \quad (2-1)$$

Wird diese Beziehung durch  $R_m$  dividiert und zudem berücksichtigt, daß gilt  $R_m = R_m / \sqrt{3}$ , erhält man:

$$\frac{\sigma_V}{R_m} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{R_m}\right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{R_m R_m} + \left(\frac{\sigma_y}{R_m}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R_{m\tau}}\right)^2} = \frac{1}{\text{RF}} \quad (2-2)$$

Werden in Gl. (2-2) die individuellen Auslastungsfaktoren,  $R_x$ ,  $R_y$  und  $R_s$  eingeführt und wird als Grenzwert  $\text{RF} = 1,0$  festgelegt, erhält man eine Interaktionsformel für die Festigkeit ( $R = 1,0$ ) des ebenen Spannungszustands.

$$R_x^2 - R_x R_y + R_y^2 + R_s^2 = 1 \quad (2-3)$$

Man kann mit Hilfe der Gl.(2-2) auch den Reserve-Faktor ermitteln:

$$\text{RF} = \frac{1}{\sqrt{R_x^2 - R_x R_y + R_y^2 + R_s^2}} \quad (2-4)$$

Die Beziehung für den Reserve-Faktor kann mittels zweier Überlegungen abgeleitet werden, die beide zum gleichen Ergebnis führen.

- Die vorhandenen Auslastungsfaktoren in der Gl. (2-3) können genau um den Reserve-Faktor RF erhöht werden, um den Grenzwert 1 zu erreichen. Damit gilt:

$$(\text{RF})^2 R_x^2 - (\text{RF})^2 R_x R_y + (\text{RF})^2 R_y^2 + (\text{RF})^2 R_s^2 - 1 = 0 \quad (2-5a)$$

- Man kann aber auch davon ausgehen, daß die vorhandenen Auslastungsfaktoren jeweils durch die Auslastung R dividiert werden müssen, um den Wert „1“ für die Auslastung bzw. den Reserve-Faktor zu erhalten.

$$\frac{R_x^2}{R^2} - \frac{R_x R_y}{R R} + \frac{R_y^2}{R^2} + \frac{R_s^2}{R^2} - 1 = 0 \quad (2-5b)$$

Beide Vorgehensweisen, d.h. beide Bestimmungsgleichungen, führen auf die Gleichung (2-4). Die beiden Gleichungen unterscheiden sich nur um einen Faktor. Es wurde hier bewußt eine einfache, bekannte Beziehung gewählt, um zu zeigen, daß die Rechnung über Vergleichsspannungen physikalisch gleichbedeutend ist einer Rechnung mit einer Interaktionsformel.

### 3. BESTIMMUNG DES RESERVEFAKTORS AUS EINER ALLGEMEINEN INTERAKTIONSFORMEL

#### 3.1 Allgemeine Interaktionsformel (ohne Mischglieder)

In einer allgemeinen Interaktionsformel werden die verschiedenen Auslastungsfaktoren nichtlinear überlagert bzw. aufsummiert.

$$R_1^m + R_2^n + R_3^p + \dots = 1 \quad (3-1)$$

Aus dieser Interaktionsformel kann der Reserve-Faktor RF auf beide, oben angegebenen, unterschiedlichen Weisen ermittelt werden. Mit  $m > n > p$  erhält man die beiden Bestimmungsgleichungen für RF bzw.  $R = 1/RF$ .

$$(RF)^m R_1^m + (RF)^n R_2^n + (RF)^p R_3^p + \dots - 1 = 0 \quad (3-2a)$$

$$R_1^m + R^{m-n} R_2^n + R^{m-p} R_3^p + \dots - R^m = 0 \quad (3-2b)$$

Welche der beiden Bestimmungsgleichungen (3-2a) oder (3-2b) zu verwenden ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden, da die Ergebnisse bezüglich des Formelaufbaus differieren. Gewünscht ist selbstverständlich eine möglichst einfache Beziehung für den Reserve-Faktor RF.

An einem Beispiel soll dieser Sachverhalt gezeigt werden. Für die Interaktion von Druck und Schub einer Platte mit  $a/b \geq 1$  gilt:

$$R_c + R_s^2 = 1 \quad (3-3)$$

Mit der ersten Methode erhält man

$$(RF)^2 R_s^2 + (RF) R_c - 1 = 0 \quad (3-4a)$$

$$RF = \frac{-R_c + \sqrt{R_c^2 + 4R_s^2}}{2R_s^2} \quad (3-5a)$$

und mit der zweiten Methode:

$$R^2 - RR_x - R_s^2 = 0 \quad (3-4b)$$

$$\frac{1}{R} = RF = \frac{2}{R_c^2 + \sqrt{R_c^2 + 4R_s^2}} \quad (3-5b)$$

Für dieses Beispiel liefert die zweite Methode ein etwas einfacheres Ergebnis Gl. (3-5b), obwohl der mit beiden Gleichungen ermittelte Wert für RF identisch ist.

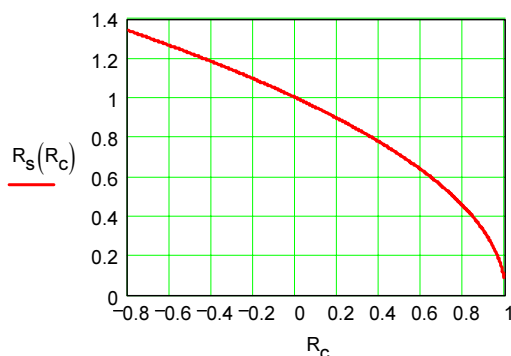


BILD. 3-1: Interaktionsdiagramm für Druck-Schub ( $a/b \geq 1$ )

Wenn eine im allgemeinen nichtlineare Interaktionsbeziehung bekannt ist, ist es einfach, den Reserve-Faktor zu berechnen. Es muß eine nichtlineare Gleichung, mit oft auch gebrochenen Exponenten, numerisch gelöst werden, wobei nur eine positive reelle Lösung von Interesse ist. Die eigentliche Aufgabe ist demnach, Interaktionsformeln zu finden, auch für Fälle, für die nur Diagramme als Arbeitsunterlage zur Verfügung stehen. Hierfür müssen geeignete Approximationsfunktionen gefunden werden.

#### 3.2. Bestimmung der Interaktionsformel aus einzelnen Interaktionen zweier R-Werte

Man kann mit bekannten Interaktionsformeln für jeweils zwei Auslastungsgrade „R“ neue Interaktionen für mehrere Variablen ableiten. Jede Auslastung „R“ kann mit „RF“ multipliziert werden, womit auf der rechten Seite immer „1“ steht.

Die Vorgehensweise wird anhand eines Beispiels erklärt. Die verschiedenen Interaktionen fünf verschiedener Auslastungen „R“ sollen lauten – ohne den Wert „RF“ explizit anzuschreiben:

$$R_1^n + R_2 = 1 \quad (3-6a)$$

$$R_2^m + R_3 = 1 \quad (3-6b)$$

$$R_1^p + R_4 = 1 \quad (3-6c)$$

$$R_2 + R_5^q = 1 \quad (3-6d)$$

Mit diesen Beziehungen lautet dann eine<sup>1</sup> gemeinsame Interaktionsbeziehung bzw. die Bestimmungsgleichung für „RF“:

$$\left[ \frac{R_1}{(1-R_4)^{1/p}} \right]^n + \frac{R_2}{(1-R_3)^{1/m} \cdot (1-R_5^q)} = 1 \quad (3-7a)$$

$$\left[ \frac{(RF) \cdot R_1}{(1-(RF)R_4)^{1/p}} \right]^n + \frac{(RF) \cdot R_2}{(1-(RF) \cdot R_3)^{1/m} \cdot (1-(RF)^q \cdot R_5^q)} - 1 = 0 \quad (3-7b)$$

Man kann erkennen, daß bei diesen Interaktionsbeziehungen auch Mischglieder, d.h. Produkte einzelner Auslastungen, vorhanden sind. Da die Auslastungen „R“ immer  $< 1$  sein müssen, können die Beziehungen durch Reihenentwicklung oder durch Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung mitunter vereinfacht werden. Man kann hierdurch wieder eine Interaktionsbeziehung entsprechend Gleichung (3-1) erhalten.

Bei einer Anpassung von Formeln an Kurvenverläufe in Diagrammen, muß eine der dargestellten Variablen explizit ausgedrückt werden, da sonst eine graphische Darstellung der Näherungsbeziehung in Mathcad nicht möglich ist. Diese explizite Darstellung der Näherungsformel bzw. das Finden einer Näherung, die explizit darstellbar ist, ist meist schwieriger als die Ermittlung einer Näherung für die Interaktionsformel oder die Bestimmungsgleichung für „RF“. Erstere ist für eine Überprüfung der Genauigkeit der Näherung mit den verfügbaren und allgemein als Berechnungsgrundlage anerkannten Diagrammen notwendig; letztere ist die Basis einer einfachen Berechnung.

<sup>1</sup> Man kann auch andere Interaktionsbeziehungen konstruieren.

#### 4. INTERAKTIONSFORMELN FÜR VERSCHIEDENE BELASTUNGSFÄLLE

##### 4.1 Allgemeines

Um die Wirkung von Exponenten, aber auch die Problematik der Darstellung zu zeigen, wird zunächst folgende allgemeine Interaktionsformel betrachtet.

$$R_x^m + R_y^n = 1 \quad (4-1)$$

$$R_y(R_x, m, n) := \left(1 - R_x^m\right)^{\frac{1}{n}} \quad (4-1a)$$

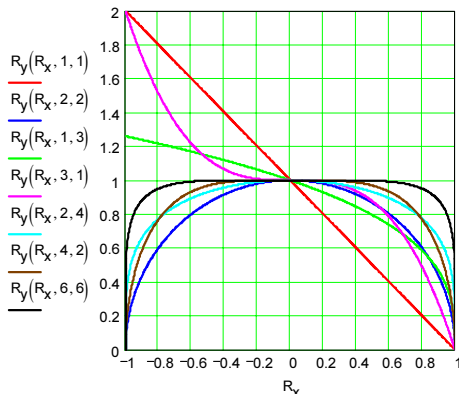


BILD. 4-1: Allgemeine Interaktionsformel

Man sieht in BILD. 4-1, daß bei ungeraden Werten  $m$  nur für positive  $R_x$  physikalisch vernünftige Werte von  $R_y$  erhalten werden. Allerdings kann man sich, wenn nur ein Exponent  $>1$  ist, durch Vertauschen von Abszisse und Ordinate helfen. Man kann sich auch durch Verwendung von Absolutbeträgen helfen.

Diese Schwierigkeit bei der graphischen Darstellung dürfte der Grund dafür sein, daß oft die lange Plattenseite „a“ mit der kurzen Seite „b“ vertauscht wird, was einem Vertauschen von „x“ und „y“ entspricht.

Im folgenden werden deshalb die Indizes „l“ für eine Belastung in Längsrichtung und „q“ für eine Belastung in Querrichtung verwendet. „R<sub>l</sub>“ ist somit die Auslastung bezüglich der Belastung in Längsrichtung, die auf die kurze Seite wirkt, und „R<sub>q</sub>“ entsprechend umgekehrt.

Es kann zweckmäßig sein, nicht den ganzen Bereich eines R-Wertes mit einer Interaktionsformel zu beschreiben, sondern abschnittsweise verschiedene Formeln zu verwenden.

Man sieht in BILD. 4-1, daß die lineare Interaktion die härteste Überlagerung ist und mit steigenden Exponenten eine immer weichere, unkritischere Überlagerung stattfindet.

##### 4.2 Druck – Druck für $a/b \geq 1,0$

Für die Ermittlung einer Interaktionsbeziehung für beidseitige Druck- bzw. Normalbelastung wird nicht von den theoretischen Ableitungen, sondern von bekannten Interaktionskurven bzw. -diagrammen ausgegangen. Es wird näherungsweise für beliebige Seitenverhältnisse der gelenkig gelagerten Platte folgende Interaktionsformel angesetzt:

$$R_q + R_l^n = 1 \quad (4-2a)$$

Diese Formel wird in Mathcad geschrieben (Gl. (4-3a)) und eine erste grobe Näherung durch einen Ansatz für den Exponenten  $n$  erhalten (Gl. (4-4a)).

Der Weg zu einer Lösung ist unabhängig vom Ansatz für  $n$ . Es lassen sich sicher noch bessere Ansätze für  $n$  finden. Für  $\alpha = 1$  wird  $n = 1$  und die Gleichung (4-2a) geht über in die exakte Interaktionsformel.

$$R_l(R_q, \alpha) := \left(1 - R_q\right)^{\frac{1}{n(\alpha)}} \quad (4-3a)$$

$$n(\alpha) := 1 + 1.5 \cdot \operatorname{atan}(\alpha - 1)^2 \quad (4-4a)$$

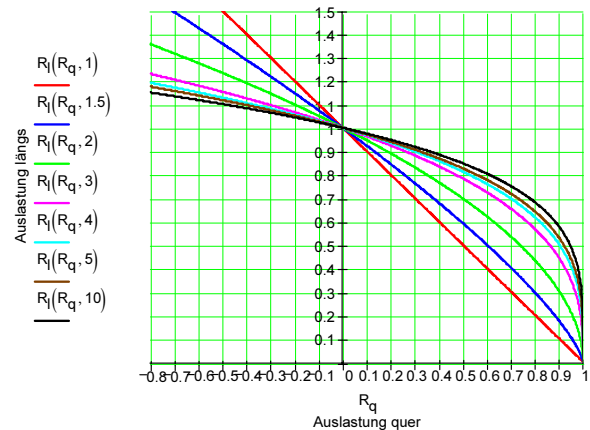


BILD. 4-2a: Interaktion Druck-Druck nach Gl. (4-3a)

Um die Genauigkeit der Näherung abschätzen zu können, wird die „exakte“ Lösung als Diagramm dargestellt.

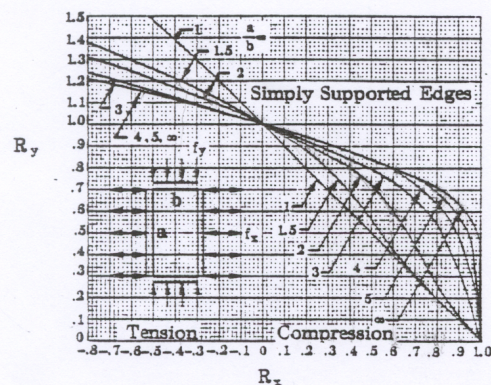


BILD. 4-2b: Interaktion Druck-Druck (exakte Lösung)

Beim Vergleich der Näherung (BILD. 4-2a) mit der exakten Lösung (BILD. 4-2b) muß berücksichtigt werden, daß die Kurven der exakten Lösung sehr schwer mit einfach zu handhabenden Formeln approximiert werden können. Sicher hilft hier eine bereichsweise, oder für nur einen Parameterwert gültige, Approximation. Dies führt aber zwangsläufig zu einem schwerer zu handhabenden Verfahren.

Ein Beispiel zeigt die einfache Handhabung der Interaktionsformel mit Mathcad, im Vergleich mit der Lösung unter Verwendung der Interaktionsdiagramme, wobei gilt:  $X \equiv RF$ .

$$\alpha := 2 \quad R_q := 0.40 \quad R_l := 0.70 \quad n(2) = 1.925$$

$$f(X) := X^{n(\alpha)} \cdot R_l^{n(\alpha)} + X \cdot R_q - 1$$

$$X := 1.3$$

$$\operatorname{wurzel}(f(X), X) = 1.069$$

Bei kleineren Streckungen  $\alpha$  der Platte und größeren Verhältnissen  $R_q / R_l$  wird die numerische Lösung der Näherung ungenauer, weshalb man entweder direkt mit einem geschätzten, d.h. kleineren, Wert für  $n$  oder mit einem kleineren Wert für  $\alpha$ , z.B. mit  $\alpha = 1,0$ , rechnen könnte.

Manchmal ist es besser, nicht  $R_q$ , sondern  $R_l$  als explizite Variable zu wählen. Es gilt dann:

$$R_{q1}(R_{l1}, \alpha) := 1 - \frac{R_{l1}}{|R_{l1}|} (|R_{l1}|)^{n(\alpha)} \quad (4-3b)$$

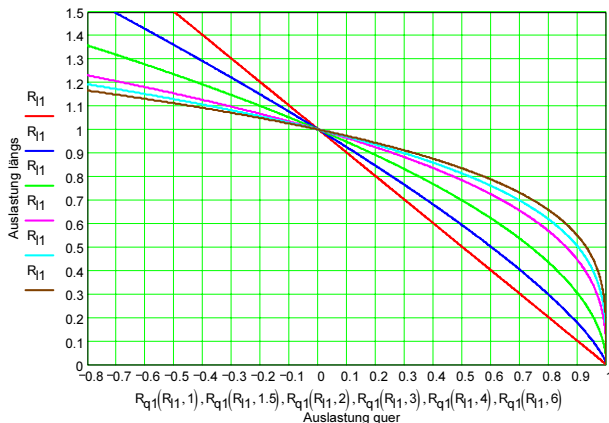


BILD. 4-2c: Interaktion Druck-Druck nach Gl. (4-3b)

Für den Zugbereich von  $R_q$  ( $R_q$  negativ) kann man auch eine genauere Interaktionsbeziehung bestimmen, die aber nur für negative  $R_q$  gültig ist. Hierbei wurde berücksichtigt, daß für  $R_q < 1,0$  gilt:

$$R_l = (1 - R_q)^{\frac{1}{n}} \approx \left(1 - \frac{1}{n} \cdot R_q\right)$$

$$R_{qn}(R_{ln}, \alpha) := 1 - k(\alpha) \cdot R_{ln} \quad (4-3c)$$

$$k(\alpha) := \frac{1}{1 + 3 \tanh\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)^{0,8}} \quad (4-5)$$

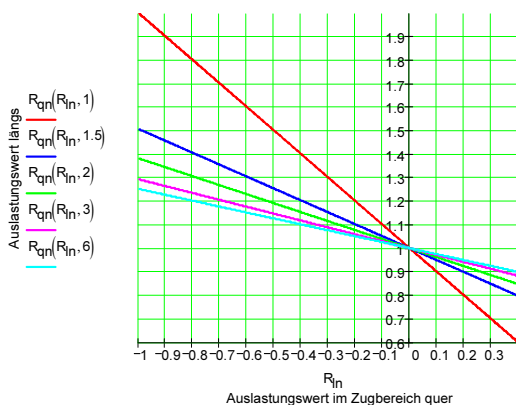


BILD. 4-2d: Interaktion im Zugbereich von  $R_q$

Durch einen Vergleich mit anerkannten Berechnungsunterlagen (BILD. 4-2b), erhält man Anhaltswerte für die Genauigkeit des vorgeschlagenen Berechnungsverfahrens in den verschiedenen Bereichen. Man muß berücksichtigen, daß die Werte, die aus Diagrammen entnommen werden, mit Ungenauigkeiten behaftet sind. Die theoretischen „ex-

akten“ Berechnungen basieren selbst auch auf Näherungsverfahren. Die größte Ungenauigkeit wird aber durch die Randbedingungen und die Toleranzen verursacht. Nur bei Seitenverhältnissen  $1,0 < \alpha < 2,0$  und  $R_q < 0,6$  werden Ergebnisse auf der unsicheren Seite erhalten.

$\alpha$	$R_q=R_x$	$R_l$	$R_y$	$R_l/R_y$
1,0	0,7	0,3	0,3	1,0
1,5	0,8	0,3	0,2	1,5
	0,6	0,5	0,42	1,19
	0,4	0,68	0,68	1,0
2,0	0,8	0,43	0,26	1,65
	0,6	0,62	0,6	1,03
	0,4	0,77	0,8	0,96
	0,2	0,89	0,91	0,98
3,0	0,8	0,57	0,56	1,02
	0,6	0,73	0,75	0,97
	0,4	0,83	0,84	0,99
	0,2	0,92	0,93	0,99
5,0	0,8	0,64	0,68	0,94
	0,6	0,77	0,8	0,96
	0,4	0,86	0,97	0,99
	0,2	0,93	0,95	0,98
10,0	0,9	0,58	0,64	0,91
	0,8	0,68	0,72	0,94

TAB. 4-1: Vergleich Druck – Druck

#### 4.3 Druck - Schub

Für eine Überlagerung von Schub mit Druck ergeben sich relativ einfache Formeln der Interaktion. Es gilt für die Überlagerung von  $R_s$  mit  $R_q$  bei einer Streckung  $\alpha \geq 1$  folgende Interaktionsformel:

$$R_s^m + R_q = 1 \quad (4-6)$$

$$R_s(R_q, \alpha) := (1 - R_q)^{\frac{1}{m(\alpha)}} \quad (4-7)$$

$$m(\alpha) := 2 + \log \left[ 1 + \frac{(\alpha - 1)^3}{2} \right]^1 \quad (4-8)$$

Eine Auswertung allgemein verfügbarer Unterlagen zeigt, daß das Seitenverhältnis nur bis  $\alpha < 5$  berücksichtigt wird und bei größeren Seitenverhältnissen mit den Werten des Plattenstreifens gerechnet wird. Es wird auch hier empfohlen, die Gleichung (4-8) nur bis zu einem Seitenverhältnis  $\alpha \leq 10$  zu verwenden.

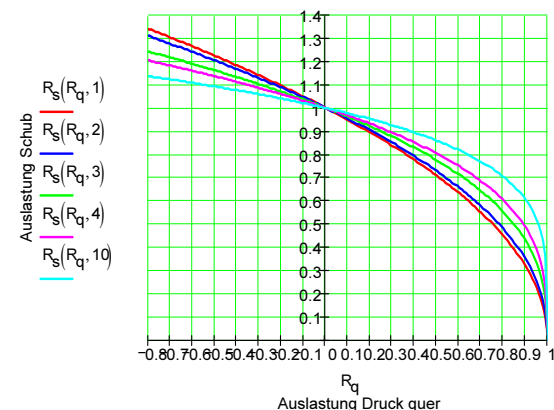


BILD. 4-3: Interaktion Schub-Druck nach Gl. (4-7)

Wenn die Druckbelastung in Längsrichtung wirkt, also an der kurzen Seite angreift, gilt für die Streckungen  $\alpha \geq 1$  die Gleichung (13) mit  $R_l$  anstelle von  $R_q$  und  $\alpha = 1$ . Diese Beziehung wird meistens in einem separaten Diagramm dargestellt (BILD. 3-1). Eine Berechnung mit Mathcad zeigt wieder die einfache Handhabung.

$$\alpha := 5 \quad R_s := 0.6 \quad R_q := 0.8$$

$$f(X) := X^{m(\alpha)} \cdot R_s^{m(\alpha)} + X \cdot R_q - 1$$

$$X := 1.1$$

$$\text{wurzel}(f(X), X) = 1.025$$

#### 4.4 Druck – Druck – Schub

Werden die beiden oben angegebenen Beziehungen für die Interaktion Druck-Druck und Druck-Schub kombiniert, erhält man unter Berücksichtigung der Zuordnung der Seiten und der Grenzbedingung für  $R_q = 0$  bzw.  $R_l = 0$ , die folgende Interaktionsformel:

$$\frac{R_q}{(1 - R_s^m)} + \frac{R_l^n}{(1 - R_s^2)^n} = 1 \quad (4-9)$$

Für die Exponenten  $n$  und  $m$  gelten die Gleichungen (4-4b) und (4-8). Der Exponent  $n$  wurde gegenüber der Gl. (4-4a) leicht modifiziert.

$$R_l(R_q, R_s, \alpha) := \left( 1 - \frac{R_q}{1 - R_s^{m(\alpha)}} \right)^{\frac{1}{n(\alpha, R_s)}} \cdot (1 - R_s^2) \quad (4-10)$$

$$n(\alpha, R_s) := 1 + 1.5 \cdot \text{atan}(\alpha - 1)^2 \cdot (1 - R_s) \quad (4-4b)$$

Diese Diagramme stimmen mit den bekannten Unterlagen gut überein bzw. die Abweichungen liegen auf der sicheren Seite.

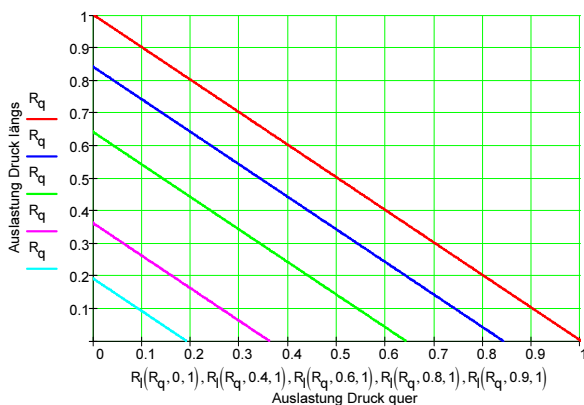


BILD. 4-4a: Interaktion Druck-Druck-Schub ( $a/b = 1$ )

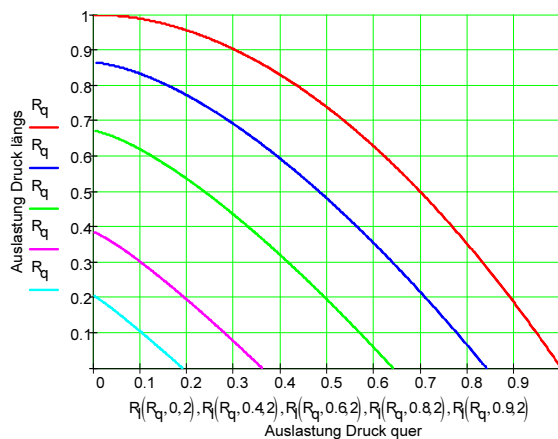


BILD. 4-4b: Interaktion Druck-Druck-Schub ( $a/b = 2$ )

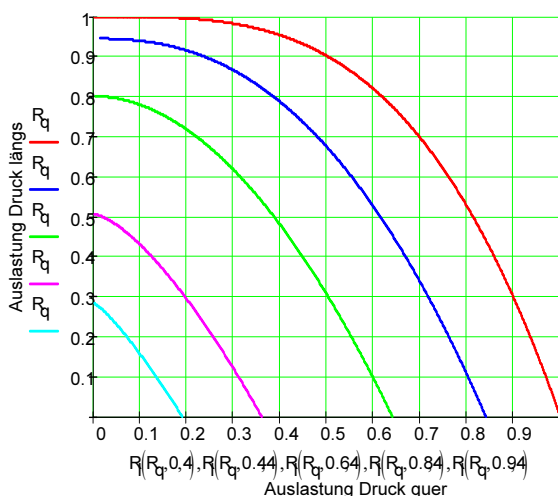


BILD. 4-4c: Interaktion Druck-Druck-Schub ( $a/b = 4$ )

Auch hier wieder die Lösung der Bestimmungsgleichung für „RF“ mit Mathcad.

$$\alpha := 3 \quad R_q := 0.4 \quad R_l := 0.3 \quad R_s := 0.6$$

$$f(X) := \frac{X \cdot R_q}{(1 - X^{m(\alpha)} R_s^{m(\alpha)})} + \frac{X^{n(\alpha, R_s)} R_l^{n(\alpha, R_s)}}{[1 - (X \cdot R_s)^2]^{n(\alpha, R_s)}} - 1$$

$$\text{wurzel}(f(X), X) = 1.084$$

An diesem Beispiel ist ebenfalls zu sehen, daß die Berechnung des Reserve-Faktors mit einer bekannten Interaktionsformel viel weniger aufwendig ist, als die Bestimmung mit Hilfe von „Längen“, die aus Diagrammen abgelesen werden müssen.

Die Rechenergebnisse werden wieder mit aus Diagrammen abgelesenen Werten verglichen.

$\alpha$	$R_s$	$R_q$	$R_l$	$R_y$	$R_x$	$R_l/R_x$
1,0	0,4	0,7	0,14	0,7	0,14	1,0
	0,8	0,2	0,16	0,2	0,14	1,14
2,0	0,4	0,7	0,29	0,7	0,28	1,04
	0,8	0,2	0,19	0,2	0,22	0,86
4,0	0,4	0,7	0,48	0,7	0,54	0,89
	0,8	0,2	0,26	0,2	0,26	1,0

TAB. 4-2: Vergleich Druck – Druck – Schub

#### 4.5 Druck – Druck – Biegung längs

Für die einzelnen Interaktionen gelten folgende Interaktionsformeln:

$$R_l^n + R_q = 1.0 \quad (4-11a)$$

$$R_l + R_{bl}^{1.75} = 1.0 \quad (4-11b)$$

$$R_q + R_{bl}^p = 1.0 \quad (4-11c)$$

Mit diesen Interaktionen kann man eine Interaktionsformel für die drei R-Werte  $R_l$ ,  $R_q$  und  $R_{bl}$  aufstellen, wobei Gleichung (4-11a) als Hauptbeziehung verwendet wird. Man könnte auch von den Gleichungen (4-11b) bzw. (4-11c) ausgehen, erhält aber ein etwas anderes Ergebnis.

$$\left( \frac{R_l}{1 - R_l^{1.75}} \right)^n + \frac{R_q}{1 - R_{bl}^p} = 1.0 \quad (4-12a)$$

Der Exponent  $p$  wurde wieder wie der Exponent  $n$  durch „trial and error“ so ermittelt, daß die Interaktionsdiagramme, soweit bekannt, möglichst gut wiedergegeben werden.

$$R_q(R_l, R_b, \alpha) := \left[ 1 - \left[ \frac{R_l}{(1 - R_b^{1.75})} \right]^{n(\alpha, R_s)} \right] \cdot (1 - R_b^{p(\alpha)}) \quad (4-13a)$$

$$p(\alpha) := 1.2 + 6 \cdot \log(\alpha^3) \quad (4-14a)$$

Man kann aus der Gleichung (4-12) wieder den Reserve-Faktor für einen speziellen Belastungsfall direkt ausrechnen. Dazu wird jede Auslastung  $R_{Index}$  mit RF multipliziert und dann aus dieser nichtlinearen Bestimmungsgleichung der zugehörige Reserve-Faktor ausgerechnet.

$$R_l := 0.4 \quad R_q := 0.55 \quad R_b := 0.35 \quad R_s := 0 \quad \alpha := 2$$

$$f(X) := \left[ \frac{X \cdot R_l}{1 - (X \cdot R_b)^{1.75}} \right]^{n(\alpha, R_s)} + \frac{X \cdot R_q}{1 - (X \cdot R_b)^{p(\alpha)}} - 1$$

$$X := 1.2$$

$$\text{wurzel}(f(X), X) = 1.163$$

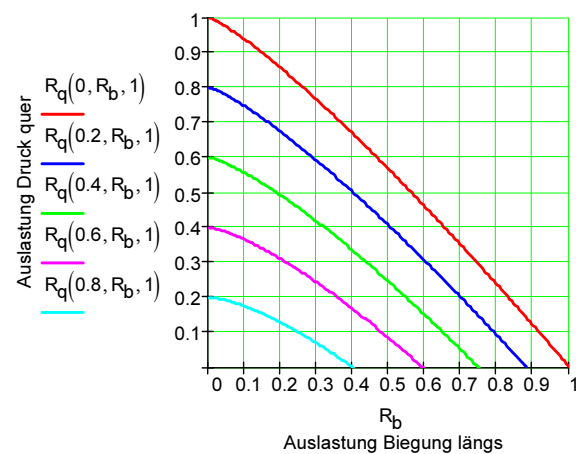


BILD. 4-5a: Druck–Druck–Biegung Gl.(4-13a), (a/b=1)

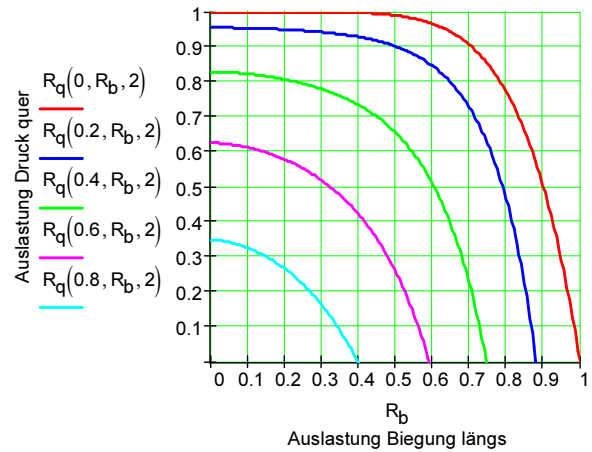


BILD. 4-5b: Druck–Druck–Biegung Gl. (4-13a), (a/b = 2)

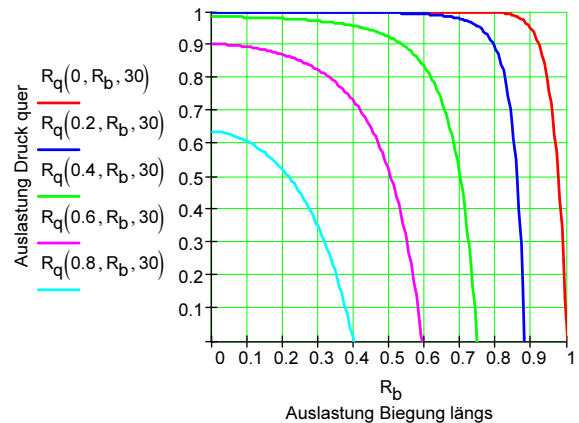


BILD. 4-5c: Druck–Druck–Biegung Gl. (4-13a), (a/b = 30)

Aus den Gleichungen (4-11a,b,c) kann man auch eine etwas andere Interaktionsbeziehung ableiten, wenn Gleichung (4-11c) als Hauptbeziehung verwendet wird, wobei dann der bei großen  $\alpha$ -Werten große Exponent  $p$  in der Hauptinteraktionsbeziehung steht.

$$\left( \frac{R_{bl}}{(1 - R_l)^{1/1.75}} \right)^p + \frac{R_q}{1 - R_l^n} = 1.0 \quad (4-12b)$$

$$R_q(R_l, R_b, \alpha) := \left[ 1 - \left[ \frac{R_b}{(1 - R_l)^{1/1.75}} \right]^{p(\alpha)} \right] \cdot (1 - R_l^{n(\alpha, R_s)}) \quad (4-13b)$$

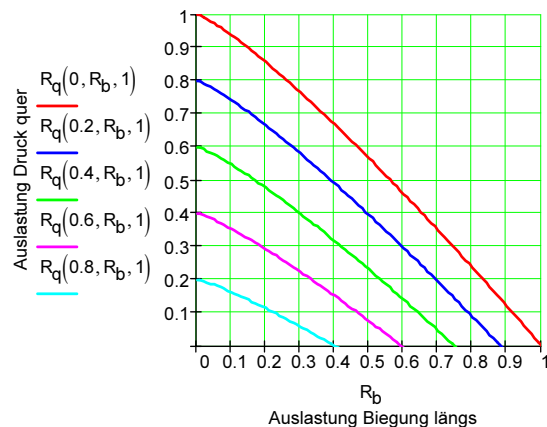


BILD. 4-6a: Druck–Druck–Biegung Gl. (4-13b), (a/b = 1)



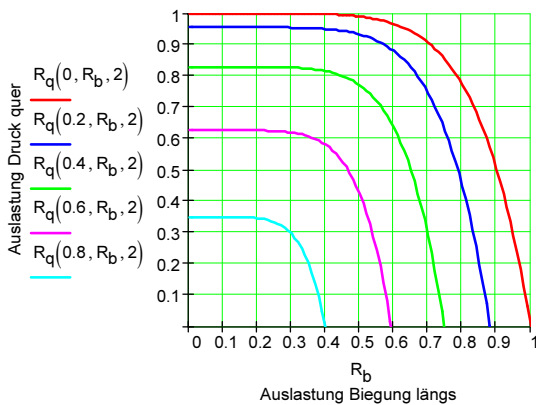


BILD. 4-6b: Druck–Druck–Biegung Gl. (4-13b), (a/b = 2)

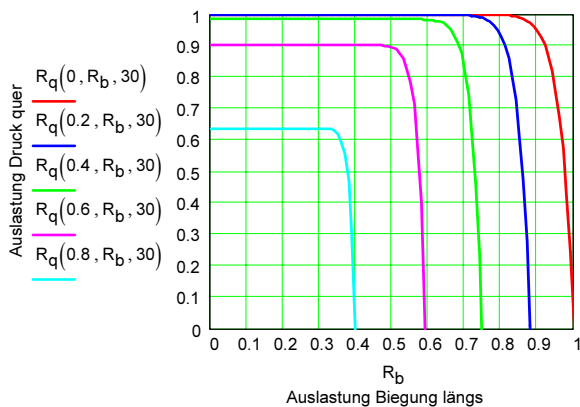


BILD. 4-6c: Druck–Druck–Biegung. Gl. (4-13b), (a/b = 30)

Man kann zum Vergleich mit Gleichung (4-12a) aus der Gleichung (4-12b) den Reservefaktor für den speziellen Fall ermitteln ( $Y \equiv RF$ ):

$$R_l := 0,4 \quad R_q := 0,55 \quad R_b := 0,35 \quad R_s := 0 \quad \alpha := 2$$

$$f(Y) := \left[ \frac{Y \cdot R_b}{(1 - Y \cdot R_l)^{0,5714}} \right]^{p(\alpha)} + \frac{Y \cdot R_q}{1 - (Y \cdot R_l)^{n(\alpha, R_s)}} - 1$$

$$Y := 1,2$$

$$\text{wurzel}(f(Y), Y) = 1,255$$

Der Unterschied zu der oben angegebenen Lösung ist relativ gering (ca. 8%). Allerdings ist die zweite Interaktionsformel (4-12b) in einem gewissen Bereich sehr empfindlich bezüglich  $R_b$ , weshalb der Formel (4-12a) der Vorzug zu geben ist.

Aus diesem Vergleich der beiden Möglichkeiten, die Interaktionsbeziehung aufzubauen, lässt sich die Empfehlung ableiten, die Interaktionsgleichung zweier Auslastungen mit **kleinen** Exponenten als primäre Hauptbeziehung zu verwenden.

#### 4.6 Druck längs - Biegung längs - Schub

Für diesen Belastungsfall gelten folgende allgemein anerkannte Interaktionsformeln:

$$R_s^2 + R_l = 1,0 \quad (4-15a)$$

$$R_s^2 + R_b^2 = 1,0 \quad (4-15b)$$

$$R_l + R_b^{1,75} = 1,0 \quad (4-15c)$$

Mit diesen Formeln werden alle drei Möglichkeiten der gemeinsamen Interaktion berechnet und verglichen. Es wird jeweils eine der Gleichungen als Hauptinteraktionsgleichung betrachtet und mit den anderen Interaktionen verknüpft.

$$R_s := 0,4 \quad R_b := 0,3 \quad R_l := 0,5$$

$$f(x) := \frac{(x \cdot R_s)^2}{1 - (x \cdot R_b)^2} + \frac{x \cdot R_l}{1 - (x \cdot R_b)^{1,75}} - 1$$

$$\text{wurzel}(f(x), x) = 1,211$$

$$f(x) := \frac{(x \cdot R_s)^2}{1 - x \cdot R_l} + \left[ \frac{x \cdot R_b}{(1 - x \cdot R_l)^{1,75}} \right]^2 - 1$$

$$\text{wurzel}(f(x), x) = 1,219$$

$$f(x) := \frac{x \cdot R_l}{1 - (x \cdot R_s)^2} + \left[ \frac{x \cdot R_b}{[1 - (x \cdot R_s)^2]^{0,5}} \right]^{1,75} - 1$$

$$\text{wurzel}(f(x), x) = 1,207$$

Zumindest für die hier angegebenen Auslastungen  $R$  ist der Unterschied der drei Berechnungen sehr gering. Um bessere Angaben über die Genauigkeit zu erhalten, wurden eine Parametervariation durchgeführt und die Ergebnisse in folgender Tabelle zusammengestellt.

$R_l$	$R_b$	$R_s$	(4-15a)	(4-15b)	(4-15c)
0,0	0,2	0,8	1,213	1,213	1,213
0,0	0,5	0,5	1,414	1,414	1,414
0,0	0,8	0,2	1,213	1,213	1,213
0,2	0,0	0,8	1,104	1,104	1,104
0,2	0,2	0,6	1,344	1,339	1,348
0,2	0,5	0,3	1,422	1,419	1,425
0,2	0,8	0,0	1,087	1,087	1,087
0,5	0,0	0,5	1,236	1,236	1,236
0,5	0,2	0,3	1,424	1,421	1,433
0,5	0,4	0,1	1,317	1,316	1,317
0,5	0,5	0,0	1,192	1,192	1,192
0,5	0,5	0,4	1,040	1,037	1,045
0,7	0,0	0,3	1,233	1,233	1,233
0,7	0,1	0,2	1,295	1,293	1,298
0,7	0,2	0,1	1,276	1,275	1,277
0,7	0,3	0,0	1,265	1,264	1,265
0,7	0,3	0,4	1,059	1,056	1,065

Tabelle 4-3: Vergleich der Gleichungen (4-15a,b,c)

#### 4.7 Druck quer – Biegung längs – Schub

Man kann auf dem gleichen Weg wie oben, für einen weiteren Fall eine Interaktionsformel ableiten. Es gibt auch hier wieder mehrere Möglichkeiten, die gegenseitige Interaktion einzelner  $R$ -Werte zu berücksichtigen.

$$\frac{R_q}{1 - R_s^m} + \left( \frac{R_{bl}}{(1 - R_s^2)^{0,5}} \right)^p = 1,0 \quad (4-16a)$$

$$R_q(R_b, R_s, \alpha) := \left[ 1 - \left[ \frac{R_b}{(1 - R_s^2)^{0,5}} \right]^{p(\alpha, R_s)} \right] \cdot (1 - R_s^{m(\alpha)}) \quad (4-17a)$$

$$p(\alpha, R_s) := 1,2 + 6 \cdot \log(\alpha^3) \cdot (1 - R_s) \quad (4-14b)$$

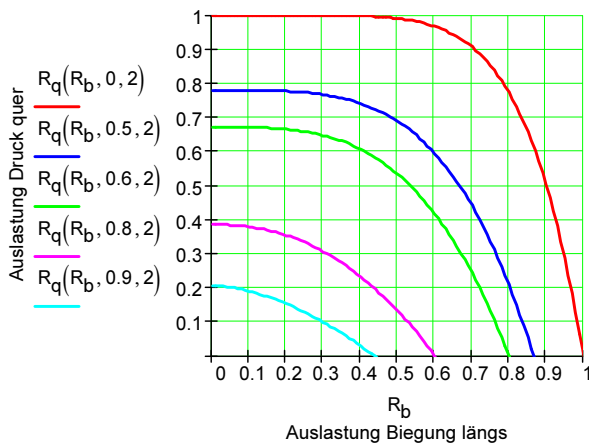


BILD. 4-7a: Druck quer–Biegung längs–Schub (a/b=2), (4-16a)

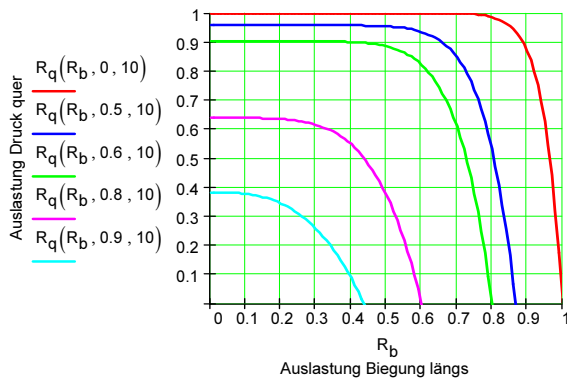


BILD. 4-7b: Druck quer–Biegung längs–Schub (a/b=30), (4-16a)

$$R_q := 0.55 \quad R_b := 0.35 \quad R_s := 0.6 \quad \alpha := 2$$

$$f(x) := \frac{x \cdot R_q}{1 - (x \cdot R_s)^{m(\alpha)}} + \left[ \frac{x \cdot R_b}{1 - (x \cdot R_s)^2} \right]^{p(\alpha, R_s)} - 1$$

$$x := 1$$

$$\text{wurzel}(f(x), x) = 1.054$$

Wenn die Auslastungen  $R_q$  und  $R_s$  in die oberste Ebene der Interaktionen gestellt werden, ergibt sich eine alternative Interaktionsbeziehung.

$$\frac{R_q}{1 - R_b^p} + \left[ \frac{R_s}{(1 - R_b^2)^{0.5}} \right]^m = 1.0 \quad (4-16b)$$

$$R_q(R_b, R_s, \alpha) := \left[ 1 - \left[ \frac{R_s}{(1 - R_b^2)^{0.5}} \right]^{m(\alpha)} \right] \cdot \left( 1 - R_b^{p(\alpha, R_s)} \right) \quad (4-17b)$$

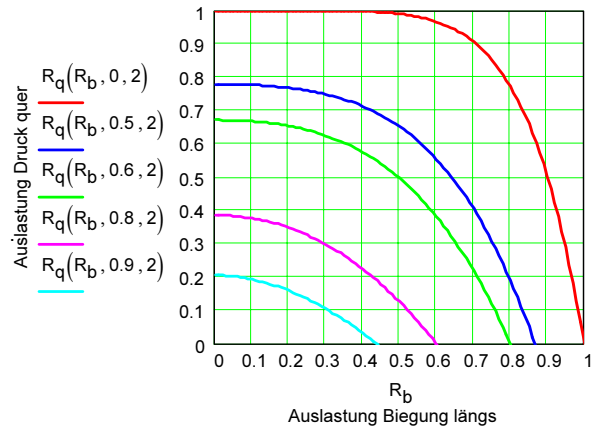


BILD. 4-7c: Druck quer–Biegung längs–Schub (a/b=2), (4-16b)

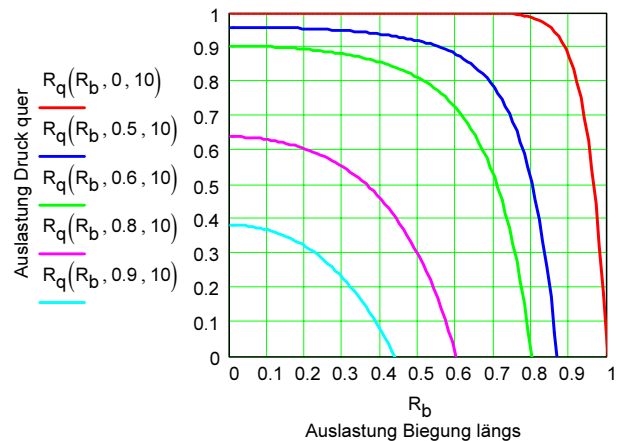


BILD. 4-7d: Druck quer–Biegung längs–Schub (a/b=30), (4-16b)

Alternativ ergibt sich für den Reserve-Faktor  $RF \equiv y$ :

$$R_q := 0.55 \quad R_b := 0.35 \quad R_s := 0.6 \quad \alpha := 2$$

$$f(y) := \frac{y \cdot R_q}{1 - (y \cdot R_b)^{p(\alpha, R_s)}} + \left[ \frac{y \cdot R_s}{1 - (y \cdot R_b)^2} \right]^{m(\alpha)} - 1$$

$$y := 1.05$$

$$\text{wurzel}(f(y), y) = 1.034$$

Auch hier ist der Unterschied zwischen den Gleichungen a und b im hier betrachteten Fall nur sehr gering (2%).

#### 4.8 Druck – Druck – Biegung längs – Schub

Nach der oben angegebenen Methode lässt sich folgende Interaktionsbeziehung konstruieren:

$$\frac{R_q}{(1 - R_s^m) \cdot (1 - R_l^n)} + \left[ \frac{R_{bl}}{(1 - R_s^2)^{0.5} \cdot (1 - R_l)} \right]^p = 1.0 \quad (4-18)$$

$$R_q(R_l, R_b, R_s, \alpha) := \left[ 1 - \left[ \frac{R_b}{(1 - R_s^2)^{0.5} \cdot (1 - R_l)} \right]^{p(\alpha, R_s)} \right] \cdot \left( 1 - R_s^{m(\alpha)} \right) \cdot \left( 1 - R_l^{n(\alpha, R_s)} \right) \quad (4-19)$$



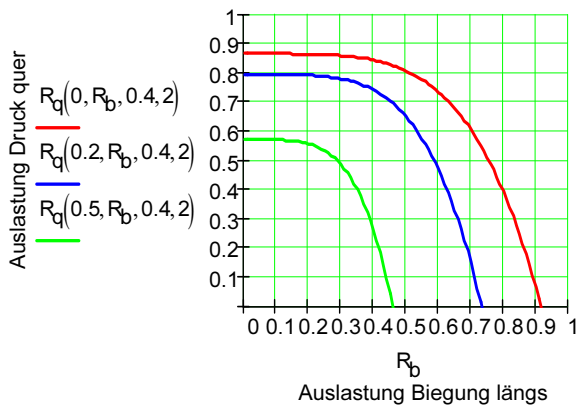


BILD. 4-8a: Druck-Druck-Biegung-Schub ( $R_s = 0.4$ ,  $a/b = 2$ )

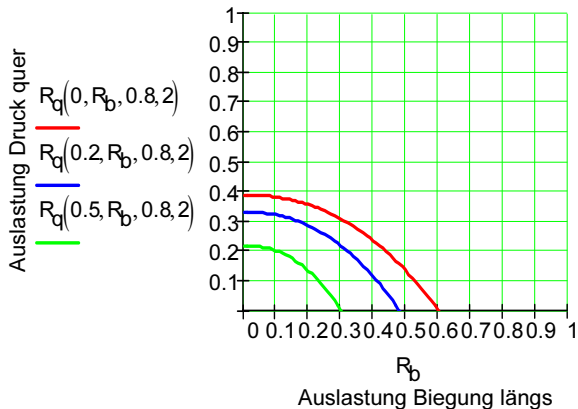


BILD. 4-8b: Druck-Druck-Biegung-Schub ( $R_s = 0.8$ ,  $a/b = 2$ )

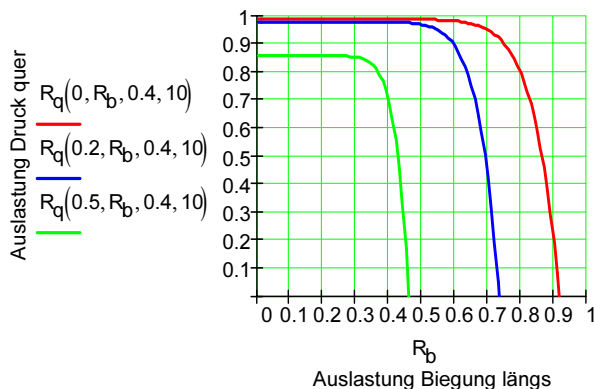


BILD. 4-8c: Druck-Druck-Biegung-Schub ( $R_s = 0.4$ ,  $a/b = 10$ )

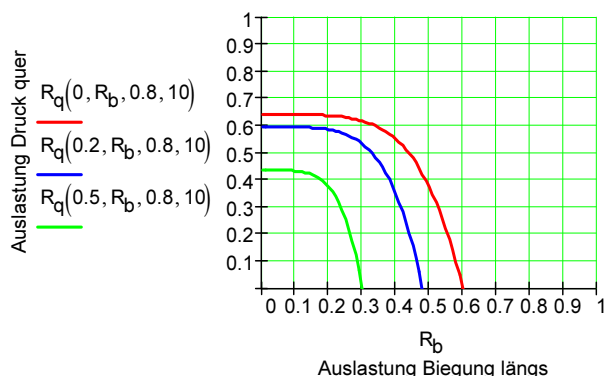


BILD. 4-8d: Druck-Druck-Biegung-Schub ( $R_s = 0.8$ ,  $a/b = 10$ )

Ebenso kann man für diese relativ komplizierte Interaktionsformel sehr leicht den Reserve-Faktor für eine spezielle Kombination von Belastungen ausrechnen.

$$R_q := 0.2 \quad R_l := 0.3 \quad R_b := 0.3 \quad R_s := 0.4 \quad \alpha := 2$$

$$f(x) := \frac{x R_q}{\left[1 - (x R_s)^{m(\alpha)}\right] \left[1 - (x R_l)^{n(\alpha, R_s)}\right]} + \left[ \frac{x R_b}{\left[1 - (x R_s)^2\right]^{0.5} (1 - x R_l)} \right]^{p(\alpha, R_s)} - 1$$

$$x := 1.4 \quad \text{wurzel}(f(x), x) = 1.383$$

#### 4.9 Druck – Druck – Biegung – Biegung – Schub (Allgemeinste Interaktion)

Im folgenden wird entsprechend der bisher angewandten Methode, der allgemeinste Fall der Interaktion behandelt. Die Platte wird von beiden Seiten mit Druck beansprucht, es wird Schub überlagert, auf beide Seiten wirkt auch Biegung.

Stabilität bei Biegespannungen ist nur bei relativ kurzen Seiten sinnvoll, bei sehr langen Seiten wird der Gradient der Biegespannungen sehr klein, so daß es sinnvoller ist, die Platte in Bereiche zu unterteilen. Hierauf muß bei der Anwendung der Formeln geachtet werden.

Betrachtet man den allgemeinsten Fall der Interaktion, hat man fünf voneinander unabhängige Belastungen, von denen jede einzelne eine Instabilität (Beulen) der Platte hervorrufen kann.

Es werden zunächst die Interaktionen jeweils zweier Belastungen angegeben, wobei ein Teil dieser Formeln allgemein anerkannt sind und in Form von Diagrammen oder als Formeln verfügbar sind, der andere Teil wurde neu formuliert. Im Zweifelsfall kann man eine lineare Interaktion zweier Größen wählen und liegt damit auf alle Fälle auf der sicheren Seite.

Die Formeln wurden zum Teil schon weiter oben angegeben.

$$\text{(Diagramm)} \quad R_l^n + R_q = 1,0 \quad \text{(I)}$$

$$\text{(Formel)} \quad R_l + R_b^{1.75} = 1,0 \quad \text{(II)}$$

$$\text{(Formel)} \quad R_l + R_s^2 = 1,0 \quad \text{(III)}$$

$$\text{(Neu)} \quad R_l + R_{bq}^q = 1,0$$

$$\text{(Diagramm)} \quad R_q + R_s^m = 1,0$$

$$\text{(Neu)} \quad R_q + R_{bl}^p = 1,0$$

$$\text{(Neu)} \quad R_q + R_{bq}^r = 1,0$$

$$\text{(Formel)} \quad R_s^2 + R_{bl}^2 = 1,0$$

$$\text{(Formel)} \quad R_s^2 + R_{bq}^2 = 1,0$$

$$\text{(Neu)} \quad R_{bl}^s + R_{bq} = 1,0$$

Die Exponenten q, r und s wurden bisher nicht definiert. Sie werden im weiteren gleich „1“ gesetzt.

Im folgenden wird von der Formel (I) als primäre Interaktion ausgegangen und die anderen direkten Interaktionen mit  $R_l$  und  $R_q$  werden als zweite Ebene eingefügt. Eine weitere zusätzliche Ebene einzuführen ist nicht sinnvoll, da hierbei Produkte von drei Auslastungen entstehen, von denen jede einzelne erheblich kleiner als 1 ist.

Die möglichen Verknüpfungen der fünf Auslastungen sind in BILD. 4-9 dargestellt.

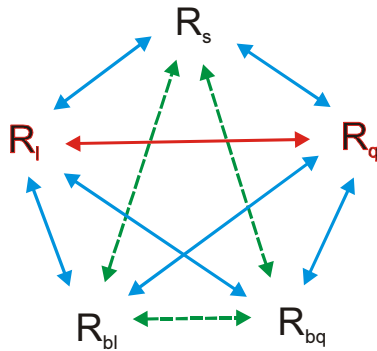


BILD. 4-9: Verknüpfungen der fünf Auslastungen (Rot primär, blau sekundär, grün möglich, aber unbedeutend)

Werden die Verknüpfungen entsprechend der Abb. 4-9 berücksichtigt, erhält man eine ganz allgemeine Interaktionsbeziehung, Gl. (4.20a), und eine Bestimmungsgleichung für den speziellen Reserve-Faktor bei vorgegebenen Auslastungen.

$$\left[ \frac{R_i}{(1-R_s^2)(1-R_{bl}^{1,75})(1-R_{bq}^q)} \right]^n + \frac{R_q}{(1-R_s^m)(1-R_{bl}^p)(1-R_{bq}^r)} = 1,0 \quad (4-20a)$$

Für die angegebenen Auslastungen kann wieder sehr einfach der entsprechende Reserve-Faktor berechnet werden.

$$R_i:=0.3 \quad R_q:=0.4 \quad R_s:=0.6 \quad R_{bl}:=0.1 \quad R_{bq}:=0.1 \quad \alpha:=3 \quad q:=1 \quad r:=1$$

Der hieraus berechnete Reserve-Faktor ist:  
R.F. = 1,028.

Man kann aber auch eine andere primäre Interaktion wählen, z.B. Schub und Druck in Längsrichtung, d.h.  $R_s$  und  $R_i$ , und erhält damit eine etwas andere Interaktionsbeziehung, Gl (4-20b), und eine etwas andere Bestimmungsgleichung für den Reserve-Faktor.

$$\frac{R_s^2}{(1-R_q)^{\frac{2}{m}}(1-R_{bl}^2)(1-R_{bq}^2)} + \frac{R_i}{(1-R_q)^{\frac{1}{n}}(1-R_{bl}^{1,75})(1-R_{bq}^q)} = 1,0 \quad (4-20b)$$

$$R.F. = 1,004$$

Die Werte der beiden Rechnungen unterscheiden sich nur sehr wenig (2%).

Mit den Gleichungen (4-20a,b) stehen die allgemeinsten, d.h. alle möglichen Beanspruchungen berücksichtigenden, Interaktionsbeziehungen zur Verfügung. Es wurde oben schon darauf hingewiesen, daß für eine Biegebelastung in Querrichtung, d.h. die lange Seite wird mit einem linear veränderlichen Druck beaufschlagt, die angegebenen Formeln nur für kleine Seitenverhältnisse  $\alpha$  physikalisch sinnvoll sind. Wenn keine Biegebeanspruchung in Querrichtung vorhanden ist, gelten die Formeln weitestgehend uneingeschränkt, es müssen aber die Empfehlungen bezüglich der Exponenten  $n$  und  $m$  berücksichtigt werden. Generell werden die einzelnen, voneinander unabhängigen Auslastungen mit den wahren Seitenverhältnissen und Randbedingungen ermittelt, und nur für die Interaktionsformeln wird ein angepaßtes, d.h. i.a. kleineres, Seitenverhältnis gewählt.

## 5. Bewertung der Ergebnisse

Es wurde gezeigt, daß mit Mathcad oder vergleichbaren Programmen bei bekannten Interaktionsformeln sehr einfach und damit auch sehr zeitsparend RF-Werte für beliebige Lastkombinationen ermittelt werden können.

Auf der Basis der Interaktionsformeln jeweils zweier Auslastungen lassen sich Interaktionsbeziehungen für beliebige Belastungskombinationen konstruieren. Die unterschiedlichen Kombinationen aus verschiedenen Interaktionen zweier Auslastungen zu einer mehrparametrischen Interaktionsgleichung liefern Ergebnisse mit sehr geringen Abweichungen. Man muß hierbei auch berücksichtigen, daß die Vorhersage der Stabilitätsgrenze schon für eine einzelne Belastung nicht sehr genau ist, da die Randbedingungen nie exakt erfüllt sind und Imperfektionen eine Rolle spielen.

Die Definitionsgleichungen der Exponenten  $n$ ,  $m$  und  $p$  in den neu formulierten Interaktionsgleichungen können die Genauigkeit der Ergebnisse stark beeinflussen. Es kann deshalb vorteilhaft sein, Interaktionsgleichungen nicht für den gesamten Bereich der einzelnen Auslastungen und der Parameter (Seitenverhältnis) zu bestimmen, sondern mehrere, auf einen engeren Bereich beschränkte und dafür genauere, Interaktionsgleichungen festzulegen. Diese Vorgehensweise hat für den Anwender keine großen Nachteile, wenn die Grenzen jeweils übersichtlich dargestellt sind.

Um das vorgeschlagene Verfahren als anerkanntes Verfahren zur Nachweisführung verwenden zu können, sollten die Ergebnisse noch einmal systematisch und kritisch mit verfügbaren Diagrammen (HSB, ESDU usw.) verglichen werden sowie für die Bereiche, für die keinerlei Angaben in der Literatur zu finden sind, einige Fälle mit Ergebnissen von FEM-Rechnungen kontrolliert werden. Sicher lassen sich auch noch bessere Näherungen für nur in Diagrammen verfügbare Interaktionen finden. Die angegebenen Ergebnisse sind ein **erster Vorschlag** zur Lösung einer von in der Praxis tätigen Ingenieuren gestellten Fragestellung.