

# Ermüdungsbedingtes Stabilitätsversagen dünnwandiger Zylinder

M. Kleschinski\* H. Schürmann \*\*

TU-Darmstadt, Fachgebiet Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen  
Petersenstraße 30, 64287 Darmstadt  
Deutschland

## ZUSAMMENFASSUNG

Eine Versagenshypothese für das ermüdungsbedingte Stabilitätsversagen von orthotropen, torsionsbelasteten Zylindern mit stark axialem Faserorientierung wird vorgestellt. Es wird gezeigt, dass es bei Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) infolge von Ermüdungsbeanspruchung zu einer Schädigung durch Zwischenfaserbruch (Zfb) und somit zu einem Abfall der matrixdominierten Steifigkeiten kommt. Dies führt zu einem Absinken der Umfangsbiegesteifigkeit und infolgedessen zu einem Absinken der Beulgrenze durch die Ermüdungsbeanspruchung. Das minimale, schädigungsbedingte Beulmoment ergibt sich aus der Grenzrissdichte und kann mit Hilfe des vorgestellten rissdichteabhangigen Elastizitätsgesetzes bestimmt werden.

Das rissdichteabhängige Elastizitätsgesetz basiert auf der Kontinuumstheorie. Die matrixdominierten Moduln der UD-Schicht werden dabei analog der Rissdichte abgemindert. Es ergibt sich ein hyperbolischer Abfall der Elastizitätsmoduln mit zunehmender Rissdichte. Die rissdichteabhängigen Steifigkeiten eines MSV folgen mit Hilfe der CLT aus den rissdichteabhängigen Steifigkeiten der UD-Schicht. Berücksichtigt wird auch die Rissenschließung welche in querdruckbelasteten UD-Schichten auftritt. Mit Hilfe des rissdichteabhängige Elastizitätsgesetzes kann das Beulmoment als Funktion der Rissdichte beschrieben werden.

## 1 Einleitung

Im Leicht- und Flugzeugbau werden häufig dünnwandige Bauteile eingesetzt. Bei diesen Leichtbaustrukturen spielt im Allgemeinen der Stabilitätsnachweis neben dem Festigkeitsnachweis eine zentrale Rolle. Betrachtet man dünnwandige Bauteile wie: Druckstreben, schnelldrehende Antriebswellen, Leitwerksträger oder Tiefbohr- und Tiefdrehwerkzeug zeigt sich ein weiteres Problem. Durch die zentrale Anforderung an diese Bauteile liegt eine starke axiale Faserorientierung vor. Diese Faserorientierung steht aber diametral zu der für die Stabilität gegen Beulen erforderlichen Faserorientierung in Umfangsrichtung. Zum einen ist

dadurch das Stabilitätsproblem dimensionierend und zum anderen wird die für die Stabilität erforderliche Umfangsbiegesteifigkeit primär von den Eigenschaften der polymeren Matrix bestimmt. Im Gegensatz zu metallischen Werkstoffen kommt es im Betrieb von FKV-Strukturen infolge von Schädigungen nicht nur zu einem Festigkeitsabfall, sondern auch zu einem signifikanten Steifigkeitsabfall. Daher hat die Betriebsbeanspruchung nicht nur einen Einfluss auf die Festigkeit, sondern auch auf die Stabilität. So hängt die betriebsfeste Dimensionierung des FKV-Bauteils nicht nur vom Festigkeits-, sondern auch vom Stabilitätsproblem ab.

## 2 Stabilitätsversagen von FKV-Bauteilen auf Grund von Ermüdungsbelastung

Stabilitätsprobleme sind Steifigkeitsprobleme. Jegliche Verringerung der Steifigkeit reduziert die kritische Beullast. Im Falle von FKV muss bei Ermüdungsbelastung mit der Ausbreitung von Zfb und dadurch bedingt auch mit Steifigkeitsreduktionen gerechnet werden.

### 2.1 Schädigungsverhalten von FKV

Bei der Untersuchung des Versagensgeschehens von FKV muss generell zwischen den Versagensformen unterschieden werden, welche ein Totalversagen des Bauteils nach sich ziehen, und denen, die lediglich eine Schädigung hervorrufen.

Die im Betrieb auftretende faserparallele Ermüdungsbeanspruchung wird vergleichsweise gut ertragen [3]. Da es bei nicht extrem hoher Spannung zu keinen nennenswerten Steifigkeitsverlusten in faserparalleler Richtung kommt, kann die faserparallele Steifigkeit als invariant gegenüber der Ermüdungsbeanspruchung betrachtet werden.

Ganz anders die vom Zfb geprägten, matrixdominierten Steifigkeiten. Der Zfb tritt auf Grund des großen Verhältnisses von faser- zu matrixdominierten Festigkeiten bei sehr viel geringeren Lasten als der Faserbruch (Fb) auf. Bei Ermüdungsbelastung unterhalb der Fb-Anstrengung kommt es in einem Laminat mit

\*Kontakt über: m.kleschinski@xperion.de, xperion Alpha Composites GmbH, Otto-Hahn-Straße 5, 34123 Kassel

\*\*Prof. Dr.-Ing Helmut Schürmann, Leiter des Fachgebiet Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen

zunehmender Schwingpielzahl zu einer wachsenden Anzahl von Zfb. Die durch Quer- und Quer/Längsschubbeanspruchung hervorgerufenen Bruchmodi A und B können bei den meisten Beanspruchungen durch Spannungsumlagerungen in benachbarte Schichten ohne ein Totalversagen des Laminats ertragen werden. Die Steifigkeit einer geschädigten Schicht nimmt mit der Anzahl der Zfb sukzessiv ab. Es kommt zu einem last- und schwingspielabhängigen Schädigungsfortschritt.

## 2.2 Rissdichteabhängiges Elastizitätsgesetz

Zur Beschreibung der rissdichteabhängigen Steifigkeit - und somit der rissdichteabhängigen Beullast - wird eine Methode benötigt, die in der Lage ist, die Steifigkeit des Laminats in Abhängigkeit der Schädigung zu beschreiben. Während sich mit Hilfe der Rissdichte die Schichtsteifigkeiten bestimmen lassen, ist die Rissdichte selbst eine Funktion der Schwingpielzahl und der Beanspruchungshöhe. Dieser Zusammenhang kann nur experimentell ermittelt werden. Als Grenzwert des funktionalen Zusammenhangs zwischen Schädigung und Schichtsteifigkeit ergibt sich der maximale Steifigkeitsabfall und somit die Möglichkeit, die maximale Beulgrenzenabsenkung bzw. die minimale Beullast zu berechnen. Wie [5] und [6] gezeigt haben, ist es zulässig, an der Kontinuumstheorie festzuhalten und den geschädigten Mehrschichtverbund (MSV) wie ein MSV mit abgeminderten Elastizitätsgrößen zu behandeln. Der Schädigungszustand wird durch die bezogene Rissdichte  $\delta_b$  charakterisiert. Dies ist der auf die Schichtdicke  $t_k$  bezogene inverse Rissabstand  $s$

$$\delta_b = \frac{t_k}{s} \quad (1)$$

Die Berechnungen in [2] haben gezeigt, dass die Schichtdicke  $t_k$  eine zulässige Bezugsgröße ist.

### 2.2.1 Elastizitätsgesetz der geschädigten UD-Schicht

Um das Elastizitätsgesetz der UD-Schicht zu beschreiben, wird die geschädigte UD-Schicht wie eine ungeschädigte mit abgeminderten Elastizitätsgrößen behandelt. Das rissdichteabhängige Elastizitätsgesetz der UD-Schicht, bei vorgegebenen Verzerrungen, für den ebenen Fall lautet:

$$\{\sigma\} = [Q(\delta_b)] \cdot \{\epsilon\} \quad (2)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $Q$  kann mit Hilfe der vier Grundelastizitäten der UD-Schicht für den ebenen Fall ( $E_{||}, E_{\perp}, \nu_{\perp||}, G_{\perp||}$ ) beschrieben werden. Dabei berücksichtigt man, dass der Elastizitätsmodul  $E_{||}$  und die Querkontraktionszahl  $\nu_{\perp||}$  vom Schädigungszustand unbeeinflusst bleiben [1],[5]. Das Problem ist auf

die Beschreibung der rissdichteabhängigen Grundelastizitäten reduziert:

$$E_{||}, E_{\perp}(\delta_b), \nu_{\perp||}, G_{\perp||}(\delta_b) \quad (3)$$

### 2.2.2 Elastizitätsgrößen der geschädigten Schicht

Die Berechnung der rissdichteabhängigen Elastizitätsmoduln erfolgt mit Hilfe der FEM am Beispiel des Kreuzverbundes [2]. Wie sich in Experimenten mit statischer Belastung gezeigt hat, kommt es fast nie zu einer äquidistanten Zfb-Bildung. Vergleicht man die statistische Verteilung der Zfb mit einer äquidistanten Verteilung, so stellt die äquidistante Verteilung den ungünstigeren Fall dar und wird zur Abschätzung der Untergrenze der Steifigkeit herangezogen [2]. Verglichen werden zwei relative Schichtdickenverhältnisse ( $\frac{t_k}{t} = 0,25$  und  $\frac{t_k}{t} = 0,0625$ ) und zwei Werkstoffe (CFK und GFK). Einen erheblichen Einfluss auf die rissdichteabhängigen Elastizitätsmoduln hat das Schichtdickenverhältnis, während sich für die verglichenen Werkstoffe nur marginale Unterschiede zeigen. Ebenfalls einen untergeordneten Einfluss hat die Schichtreihenfolge [2].

#### Elastizitätsmodul $E_{\perp}$ :

Für kleine bezogene Rissdichten bzw. große Rissabstände ist der Steifigkeitsabfall erwartungsgemäß gering. Ein Vergleich der Querzugspannung genau zwischen zwei Zfb zeigt, dass erst bei einer bezogenen Rissdichte  $\delta_b = \frac{1}{16}$  annähernd wieder eine homogener Spannungsverlauf über der Schichtdicke vorliegt [2].

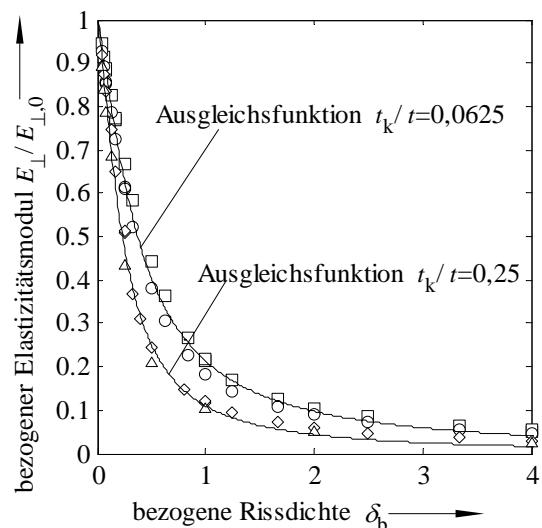


FIG. 1: Schädigungsbedingter Abfall des Elastizitätsmoduls einer querzugbelasteten Schicht. Vergleich verschiedener Schichtdickenverhältnisse und Werkstoffe. (○) GFK  $\frac{t_k}{t} = 0,0625$ , (□) CFK  $\frac{t_k}{t} = 0,0625$ , (△) GFK  $\frac{t_k}{t} = 0,25$ , (◇) CFK  $\frac{t_k}{t} = 0,25$ .

Mit größer werdender Rissdichte sinkt die Steifigkeit

stark ab, da der Traganteil zwischen den Zfb immer geringer wird. Für alle verglichenen Varianten zeigt sich ein hyperbolischer Abfall des Elastizitätsmoduls mit zunehmender Rissdichte. Dieser Abfall der Steifigkeit über der Rissdichte wird ähnlich der PUCK'schen Degradationsfunktion [6] durch eine hyperbolische Funktion beschrieben.

$$E_{\perp}(\delta_b) = \frac{E_{\perp,0}}{1 + b_{1,E} \cdot \delta_b^{b_{2,E}}} \quad (4)$$

Die Größen  $b_{1,E}$  und  $b_{2,E}$  sind Freiwerte zur Anpassung an die Ergebnisse der FEM-Berechnung bzw. experimenteller Untersuchungen. Bei einem Wanddickenverhältnis  $\frac{t_k}{t} = 0,25$  ist die Differenz des Elastizitätsmoduls  $E_{\perp}$  von CFK und GFK für kleine Rissdichten  $\delta_b < 1$  gering und für  $\delta_b > 1$  auf unter ein Prozent abgesunken. Dies deckt sich mit den Ergebnissen von experimentellen Untersuchungen [4], bei denen auch ein identisches Verhalten für GFK und CFK festgestellt werden konnte.

Für Rissabstände im Bereich der Schichtdicke  $\delta_b = 1$  ist der Elastizitätsmodul des feinschichtigen Laminataufbaus mit  $\frac{t_k}{t} = 0,0625$  nahezu doppelt so groß wie beim Laminataufbau mit  $\frac{t_k}{t} = 0,25$ . Der Unterschied resultiert aus dem höheren Traganteil im Bereich zwischen den Zfb, der mit zunehmender Feinschichtigkeit steigt. Die geringeren relativen Schichtdicken führen dazu, dass sich bei gleicher Rissdichte die Spannungen in der Umgebung des Zfb bei feinschichtigen MSV schneller wieder aufbauen und so der Traganteil höher ist. Steigt die Rissdichte über  $\delta_b > 4$ , sind nur noch geringe Unterschiede für die beiden Schichtungsvarianten zu erkennen. In diesem Zustand ist der Traganteil zwischen den Zfb so gering, dass der Vorteil des feinschichtigen Laminataufbaus immer stärker abnimmt. Auch wenn der feinschichtige MSV bei großen Rissdichten  $\delta_b > 2$  noch Vorteile bezüglich der Steifigkeit bietet, bleibt festzustellen, dass die Steifigkeit in diesem Bereich unterhalb zehn Prozent sinkt. Steigt die bezogene Rissdichte  $\delta_b > 4$ , entspricht der Elastizitätsmodul  $E_{\perp}(\delta_b > 4)$  der Reststeifigkeit der PUCK'schen Degradationsfunktion [6].

Für die untersuchten Schichtdickenverhältnisse kann mit Hilfe von (4) und den Parametern in Tabelle 1 der schädigungsbedingte Elastizitätsmodul  $E_{\perp}(\delta_b)$  bestimmt werden.

TAB. 1: Freiwerte der Ausgleichsfunktion (4) für verschiedene Schichtdickenverhältnisse

$\frac{t_k}{t}$	Werkstoff	$b_{1,E}$	$b_{2,E}$
0,25	CFK/GFK	8,5295	1,4028
0,0625	CFK/GFK	3,6899	1,3268

### Schubmodul $G_{\perp\parallel}$ :

Qualitativ verhält sich der schädigungsbedingte Schubmodul  $G_{\perp\parallel}(\delta_b)$  wie der schädigungsbedingte

Elastizitätsmodul  $E_{\perp}(\delta_b)$ . Für kleine bezogene Rissdichten bzw. große Rissabstände ist der Steifigkeitsabfall gering. Mit größer werdender Rissdichte kommt es zu einem hyperbolischen Abfall des Schubmoduls (Bild 2).

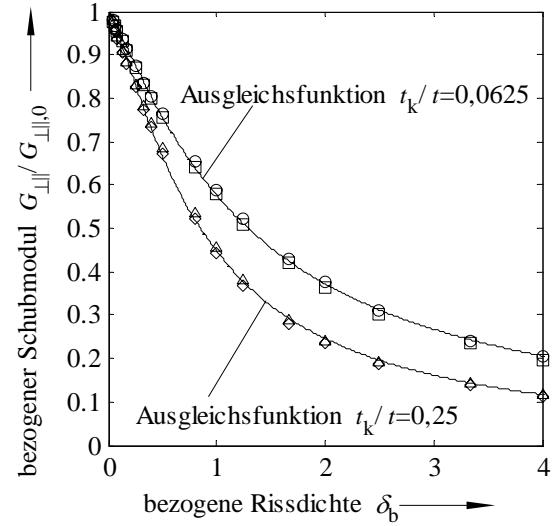


FIG. 2: Schädigungsbedingter Abfall des Schubmoduls einer schubbelasteten Schicht. Vergleich verschiedener Schichtdickenverhältnisse und Werkstoffe. (○) GFK  $\frac{t_k}{t} = 0,0625$ , (□) CFK  $\frac{t_k}{t} = 0,0625$ , (△) GFK  $\frac{t_k}{t} = 0,25$ , (◇) CFK  $\frac{t_k}{t} = 0,25$ .

Dieses Verhalten wird mittels einer mit Gleichung (4) identischen Funktion für den Schubmodul beschrieben:

$$G_{\perp}(\delta_b) = \frac{G_{\perp,0}}{1 + b_{1,G} \cdot \delta_b^{b_{2,G}}} \quad (5)$$

Auch beim schädigungsbedingten Schubmodul kann, genau wie beim schädigungsbedingten Elastizitätsmodul  $E_{\perp}$ , eine starke Abhängigkeit vom Schichtdickenverhältnis festgestellt werden. Auch hier gilt, dass der schädigungsbedingte Steifigkeitsabfall mit einer feinen Schichtung langsamer verläuft.

TAB. 2: Freiwerte der Ausgleichsfunktion (5) für verschiedene Schichtdickenverhältnisse

$\frac{t_k}{t}$	Werkstoff	$b_{1,G}$	$b_{2,G}$
0,25	CFK/GFK	1,2372	1,3047
0,0625	CFK/GFK	0,7367	1,1934

Der absolute Abfall des Schubmoduls ist geringer als beim Elastizitätsmodul  $E_{\perp}$ . Dies deckt sich für GFK mit den experimentellen Ergebnissen von KNOPS [4]. Größere Diskrepanzen zeigen sich für CFK, wo der experimentell ermittelte, schädigungsbedingte Schubmodul tendenziell höher ist, als der nach Gleichung (5) berechnete [2].

### 2.3 Anwendung der CLT beim geschädigten MSV

Die Steifigkeit des geschädigten MSV folgt mittels CLT aus den rissdichteabhangigen Steifigkeiten der UD-Schicht. Bei der Anwendung der CLT gilt es, bei jeder Schicht nach der Spannung senkrecht zur Faserrichtung zu unterscheiden:

**Querspannung  $\sigma_{\perp} > 0$ :**

Für eine querzugbeanspruchte Schicht kommt es zur Öffnung der Rissufer, über welche keine Lasten mehr übertragen werden können. Dies entspricht den Annahmen der Berechnung in Kapitel 2.2.2.

**Querspannung  $\sigma_{\perp} \leq 0$ :**

Für eine querdruckbeanspruchte Schicht kommt es zur Schließung der Rissufer. Daher entspricht der Elastizitätsmodul  $E_{\perp}$  dem ungeschädigten. Durch Reibung kann eine Last über die geschlossenen Rissufer übertragen werden. Die Höhe der übertragbaren Schublast und somit der Schubmodul der geschädigten Schicht sind abhängig von der vorliegenden Querdruckbeanspruchung. Das gleiche Problem besteht bei der Degradationsanalyse nach PUCK. Auch dort wird mit zunehmendem Querdruck die Abminderung des Schubmoduls reduziert. In Anlehnung an die PUCK'sche Degradationsanalyse [6] wird der rissdichteabhängige Schubmodul einer querdruckbeanspruchten Schicht wie folgt bestimmt:

$$G_{\perp\parallel}(\delta_b) = \frac{G_{\perp\parallel,0}}{1 + b_{1,G} \cdot \delta_b^{b_{2,G}}} \cdot \cos \rho + G_{\perp\parallel,0} \cdot \sin^2 \rho \quad (6)$$

$$\rho = \arctan \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right|$$

### 2.4 Schädigungsbedingtes Absinken des Beulmoments am Beispiel des torsionsbelasteten Zylinders

Beim torsionsbelasteten Zylinder kommt es auf Grund der Torsionsbelastung  $M_t$  zur Schubspannung  $\tau_{\theta z}$ . Diese ruft in jeder Schicht - so lange sie gleiche Steifigkeiten aufweisen - identische Schubspannungen ( $\tau_{21}^- = \tau_{21}^+$ ) sowie faserparallele und fasernsenkrechte Spannungen mit gleichem Betrag und unterschiedlichem Vorzeichen hervor.

Stabilitätsversagen in Form von Torsionsbeulen tritt nur unter dem Einfluss eines Torsionsmoments  $M_t \neq 0$  auf. Daher kann für die folgenden Steifigkeitsberechnungen angenommen werden, dass es in der Schicht mit negativer Querspannung zu einem Schließen der vorhandenen Rissufer kommt. Bei der Betrachtung der rissdichteabhängigen Schichtsteifigkeit ist es daher notwendig nach dem Vorzeichen der Querspannung zu differenzieren.

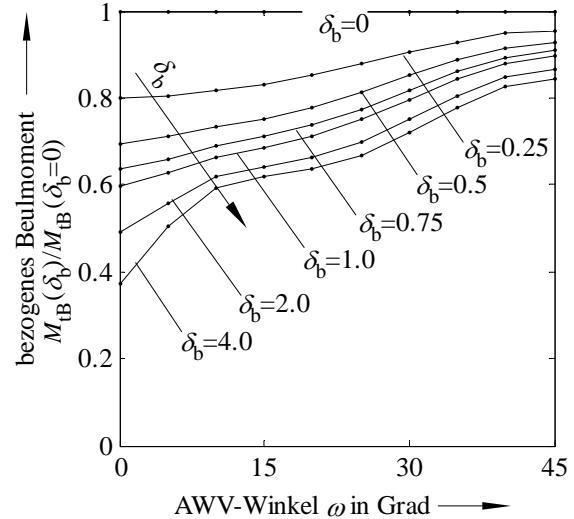


FIG. 3: Einfluss der Rissdichte auf das Beulmoment einer Antriebswelle. Scharparameter ist die bezogene Rissdichte  $\delta_b$ .  $L = 1500\text{mm}$ ,  $D_i = 75\text{ mm}$ ,  $t = 3\text{ mm}$ , CFK.

Bei für Antriebswellen typischen Faserorientierungen - AWV mit starker axialer Ausrichtung - resultiert der Abfall des Elastizitätsmoduls  $E_{\perp}$  in einer deutlichen Absenkung der Umfangsbiegesteifigkeit  $D_{\theta}$  und somit des Beulmoments  $M_{tB}$ . Beim rissdichteabhängigen Beulmoment zeigt sich der hyperbolische Abfall - hier durch den Abstand der Kurven für verschiedene Rissdichten - der matrixdominierten Moduln  $E_{\perp}$  und  $G_{\perp\parallel}$  (Bild 3). Für kleine Rissdichten ( $\delta_b = 0,25$ ) kommt es im Bereich kleiner Faserwinkel ( $\omega < 15^\circ$ ) zu einem Abfall des Beulmoments um bis zu 20 %. Für einen weiteren 20 %igen Beulmomentenabfall muss die Rissdichte bis auf  $\delta_b = 2$  ansteigen. Zu großen Rissdichten ( $\delta_b > 2$ ) zeigt sich mit zunehmender Rissdichte nur noch eine minimale (< 5 %) weitere Absenkung des Beulmoments. D.h. für Rissdichten  $\delta_b > 2$  erreicht das Beulmoment den Sättigungsbereich, bei dem eine weitere Zunahme der Rissdichte die Beulgrenze nur noch minimal absenkt. Ausnahmen zeigen sich, wenn es schädigungsbedingt zu einem Wechsel des Beulmusters kommt. Dies ist im vorliegenden Beispiel bei großen Rissdichten ( $\delta_b = 4$ ) und bei kleinen Faserwinkel ( $\omega < 10^\circ$ ) der Fall. Hier weist die Kurve des bezogenen Beulmoments einen Knick auf. Der Grund dafür ist der Wechsel des Beulmusters von zwei auf drei Wellen in Umfangsrichtung. Bei großen Faserwinkel ( $\omega > 30^\circ$ ) kommt der Einfluss der Faserverstärkung auf die Umfangsbiegesteifigkeit zum Tragen. In diesem Bereich ist die Absenkung des Beulmoments entsprechend gering, da die Fasersteifigkeit invariant gegenüber der Schädigung durch Zfb ist. Als großer Vorteil bezüglich der schädigungsbedingten Beulgrenzenabsenkung bei kleinen Faserwinkel erweist sich der Spannungszustand des schubbeanspruchten AWV. Unabhängig von der Richtung des Torsionsmoments  $M_t$

liegt immer eine querdruckbeanspruchte Schicht im AWV vor.

### 3 Versagenshypothese zum ermüdungsbedingten Stabilitätsversagen von torsionsbelasteten Zylindern

Der ermüdungsbedingte Abfall der Beulgrenze ist gleichbedeutend mit dem ermüdungsbedingten Absinken der Steifigkeiten. Untersuchungen an AWV mit starker axialer Faserorientierung haben bei wechselnder Torsionsermüdungsbelastung einen deutlichen Abfall der Torsionssteifigkeit gezeigt [1]. Untersucht wurden AWV aus GFK mit einer Faserorientierung  $\omega = 15^\circ$ . Bild 4 zeigt den während den Versuchen gemessenen Schubmodul  $G_{\theta z}$  der Proben über der Schwingspielzahl für verschiedene Schubspannungsamplituden. Für hohe Schubspannungsamplituden zeigt sich ein starker Abfall des Schubmoduls über der Schwingpielzahl. Mit abnehmender Schubspannungsamplitude wird der Abfall immer geringer. Für geringe Schubspannungsamplituden bleibt der Schubmodul über der Schwingpielzahl konstant.

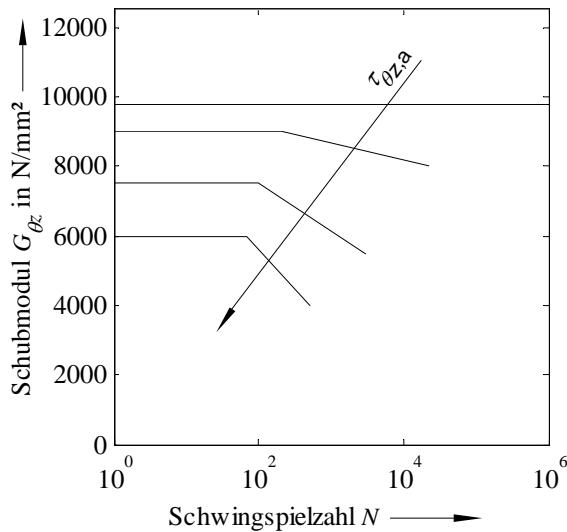


FIG. 4: Abfall des Schubmoduls im Ermüdungsversuch ( $R = -1$ ). Kurven für verschiedene Lastniveaus. Scharparameter ist die Schubspannungsamplitude  $\tau_{\theta z,a}$  [1].  $L = 225\text{mm}$ ,  $D_i = 33\text{mm}$ ,  $t = 2,25\text{ mm}$ ,  $\omega = 15^\circ$ , GFK,  $\varphi = 0,65$ .

Ermüdungsversuche an unidirektionalen Probekörpern haben bei einaxialer Querzug- und Schubermüdungsbeanspruchung keine bzw. nur minimale Steifigkeitsänderung der Einzelschicht gezeigt [1]. Bei Querzugbeanspruchung tritt bis zum ersten Zfb - also bis zum Erreichen der Grundfestigkeit - keine nennenswerte Steifigkeitsänderung auf. Bei Schubbeanspruchung kommt es zu einem minimalen Steifigkeitsabfall bei hohen Be-

anspruchungsamplituden.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass der beobachtete Steifigkeitsabfall der torsionsbelasteten AWV primär auf die im Versuch aufgetretenen Schädigungen durch Zfb zurückzuführen ist.

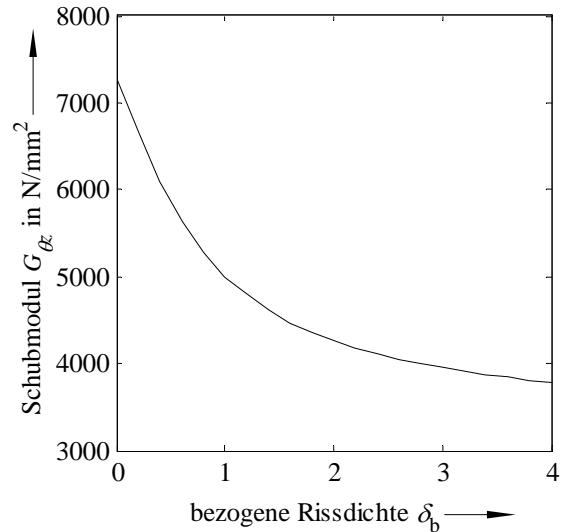


FIG. 5: Schubmodul des AWV mit  $\omega = 15^\circ$  als Funktion der bezogenen Rissdichte. Berechnung mit dem rissdichtabhangigen Elastizitätsgesetz für GFK.

Bild 5 zeigt den schädigungsbedingten Schubmodul des MSV am Beispiel eines AWV mit  $\omega = 15^\circ$  als Funktion der bezogenen Rissdichte. Zu erkennen ist ein hyperbolischer Abfall des Schubmoduls über der Rissdichte. Der Schubmodul eines AWV mit  $\omega = 15^\circ$  kann auf Grund einer Schädigung durch Zfb also derart absinken, wie in den Versuchen in [1] beobachtet. Die Anwendung des rissdichtabhangigen Elastizitätsgesetzes hat gezeigt, dass es mit zunehmender Rissdichte zu einem Absinken der matrixdominierten Steifigkeiten und somit zu einem Absinken der Beulgrenze bei stark axial orientierten AWV kommt (Bild 3). Geht man von der PUCK'schen Degradationsanalyse [6] aus, stellt sich für die Zfb-bedingte Schädigung eine Rissssättigung ein. Das bedeutet, es existiert eine Grenzrissdichte  $\delta_G$  bei Rissssättigung.<sup>1</sup>

Mit Hilfe des rissdichtabhangigen Elastizitätsgesetzes kann für diese Grenzrissdichte das Beulmoment  $M_{tB}(\delta_b = \delta_G)$  berechnet werden. Dies ist das Beulmoment im Fall vollständiger Rissssättigung, also das minimale Beulmoment.

Das Ermüdungsverhalten eines torsionsbelasteten Zylinders hängt davon ab, wie groß das Verhältnis von statischer Beullast  $M_{tB}$  zu statischer Festigkeit  $M_{tR}$  ist. Für den Quotienten der Versagenslasten  $Q$  gilt:

<sup>1</sup>Selbst, wenn diese Grenzrissdichte nicht existieren sollte, zeigen Bild 1 und Bild 2, dass im Bereich großer Rissdichten ( $\delta_b > 2$ ) eine weitere Steigerung der Rissdichte nur noch eine geringere weitere Absenkung der rissdichtabhangigen Elastizitätsmodulen zur Folge hat.

$$Q = \frac{M_{tB}}{M_{tR}} = \frac{\tau_B}{\tau_R} \quad (7)$$

Bei den hier betrachteten schlanken torsionsbelasteten Zylindern ist das Stabilitätsversagen dimensionierend. Daher liegt ein Verhältnis  $Q < 1$  vor. Unabhängig von der Geometrie liegt meist für einen speziellen MSV nur eine Bauteilwöhlerlinie des Festigkeitsversagens<sup>2</sup> vor. Folglich können für diesen speziellen MSV in Abhängigkeit von der Geometrie verschiedene Verhältnisse  $Q$  - z.B. durch Variation der Länge - eingestellt werden. In Abhängigkeit vom Quotienten der Versagenslasten werden für die ermüdungsbedingte Beulgrenzenabsenkung exemplarisch drei Fälle unterschieden. Diese Fälle werden anhand von Bild 6 verdeutlicht.

#### Fall I: $Q \rightarrow 1$ , hohe Schubspannungsamplitude $\tau_{\theta z,a}$

Für  $Q \rightarrow 1$ , Bild 6a, liegen die Schubspannungen  $\tau_{\theta z}$  für Festigkeits- und Stabilitätsversagen nah zusammen. D.h. bei Ermüdungsbelastung können vergleichsweise hohe Schubspannungsamplituden aufgebracht werden - dies ist in der Regel mit  $f_E > 1$  für den Modus A verbunden -, ohne dass es zum Stabilitätsversagen kommt.

Wie in Bild 6a zu sehen, kommt es bei hohen Schubspannungsamplituden zu einem schnellen Absinken des Schubmoduls. Dies ist gleichbedeutend mit einer genauso schnellen, schädigungsbedingten Steifigkeitsreduktion und hat zur Folge, dass das Beulmoment absinkt. Das Beulmoment kann aber nur bis zum Beulmoment bei Grenzrissdichte  $\tau_{\theta z,a}(\delta_b = \delta_G)$  absinken. Ist dieser Zustand erreicht, kann das Beulmoment nicht weiter abfallen. Eine Dauerfestigkeit des torsionsbelasteten Zylinders ist für diese Schubspannungsamplitude noch nicht erreicht. Für Schubspannungsamplituden  $\tau_{\theta z,a} < \tau_{\theta z,a}(\delta_b = \delta_G)$  tritt zwar kein ermüdungsbedingtes Stabilitätsversagen auf, für Schwingspielzahlen  $N > N_W$  kommt es aber zum Wechsel der Versagensform und somit zum ermüdungsbedingten Festigkeitsversagen. Das ermüdungsbedingte Festigkeitsversagen stellt einen eigenständigen Problemkreis dar und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt. Die Gesamtbauteilwöhlerlinie ergibt sich also aus der jeweils versagenskritischen Schubspannungsamplitude der beiden Versagensformen. Mit Hilfe dieser Gesamtbauteilwöhlerlinie ist es möglich, die Schwingfestigkeit und die zugehörige Versagensform zu bestimmen.

#### Fall II: $Q \approx 0,5$ , mittlere Schubspannungsamplitude $\tau_{\theta z,a}$

Für  $Q \approx 0,5$ , Bild 6b, beträgt die Beulschubspannung ca. die Hälfte der Schubspannung bei Festigkeitsversagen. D.h. die Schubspannungsamplituden, welche bei Ermüdungsbeanspruchung aufgebracht wer-

den können, rufen eine vergleichsweise niedrige Zfb-Anstrengung hervor.

Bei mittlerer Schubspannungsamplitude zeigt sich qualitativ das gleiche Verhalten wie bei hoher Schubspannungsamplitude. Es kommt schädigungsbedingt zu einem Absinken des Beulmoments. Das Absinken des Beulmoments verläuft analog zum Absinken des Schubmoduls langsamer als bei höheren Schubspannungsamplituden. Auch hier kann das Beulmoment nur so weit absinken bis die Grenzrissdichte und das zugeordnete Beulmoment erreicht sind. Bei Schubspannungsamplituden  $\tau_{\theta z,a} < \tau_{\theta z,a}(\delta_b = \delta_G)$  kommt es auch entsprechend Fall I zum ermüdungsbedingten Festigkeitsversagen.

#### Fall III: $Q \rightarrow 0$ , kleine Schubspannungsamplitude $\tau_{\theta z,a}$

Während die Schubspannung für Fall I und II im Bereich der Zeitfestigkeit liegt, wird bei Fall III davon ausgegangen, dass die Schubspannungsamplitude bereits kleiner als die dauerfest ertragbare Schubspannungsamplitude ist (Bild 6c). Der Schubmodul bleibt daher über der gesamten Schwingspielzahl konstant. Dementsprechend kommt es zu keinen Schädigungen und auch zu keinem Abfall der Beulgrenze. Eine Schubspannungsamplitude in dieser Höhe kann also bezüglich des Festigkeits- und des Stabilitätsproblems dauerfest ertragen werden.

### 3.1 Fazit

Ermüdungsbedingtes Stabilitäts- und Festigkeitsversagen sind also direkt gekoppelt. Kann eine hohe Schubbeanspruchung aufgebracht werden, ohne dass Beulen auftritt, kommt es zu einem schnellen Abfall der Beulgrenze. Ist die maximale Schubbeanspruchung auf Grund der maximalen Beulschubspannung deutlich niedriger als die Schubspannung bei Festigkeitsversagen, ist der Abfall der Beulgrenze entsprechend langsamer. Generell ist das minimale Beulmoment bei der Grenzrissdichte erreicht. Liegt die Schubbeanspruchung unterhalb des Beulmoments bei Grenzrissdichte, kann kein ermüdungsbedingtes Stabilitätsversagen auftreten. In Verbindung mit der Bauteilwöhlerlinie des Festigkeitsversagens ist eine abschließende Aussage über das Stabilitätsversagen möglich. Erst aus beiden Wöhlerlinien kann eine gesamte Wöhlerlinie abgeleitet werden. Diese Wöhlerlinie erlaubt es dann, nach ermüdungsbedingtem Stabilitäts- und Festigkeitsversagen zu differenzieren und zu dimensionieren.

### Literatur

- [1] BITTERLI, Kurt: *Ermüdungsverhalten eines glasfaserverstärkten Epoxidharzes mit besonderer Berücksichtigung von Schubeinflüssen*, ETH Zürich, Diss., 1987

<sup>2</sup>Die Bezeichnung Bauteil bzieht sich auf den AWV als Bauweise aus mehreren UD-Schichten

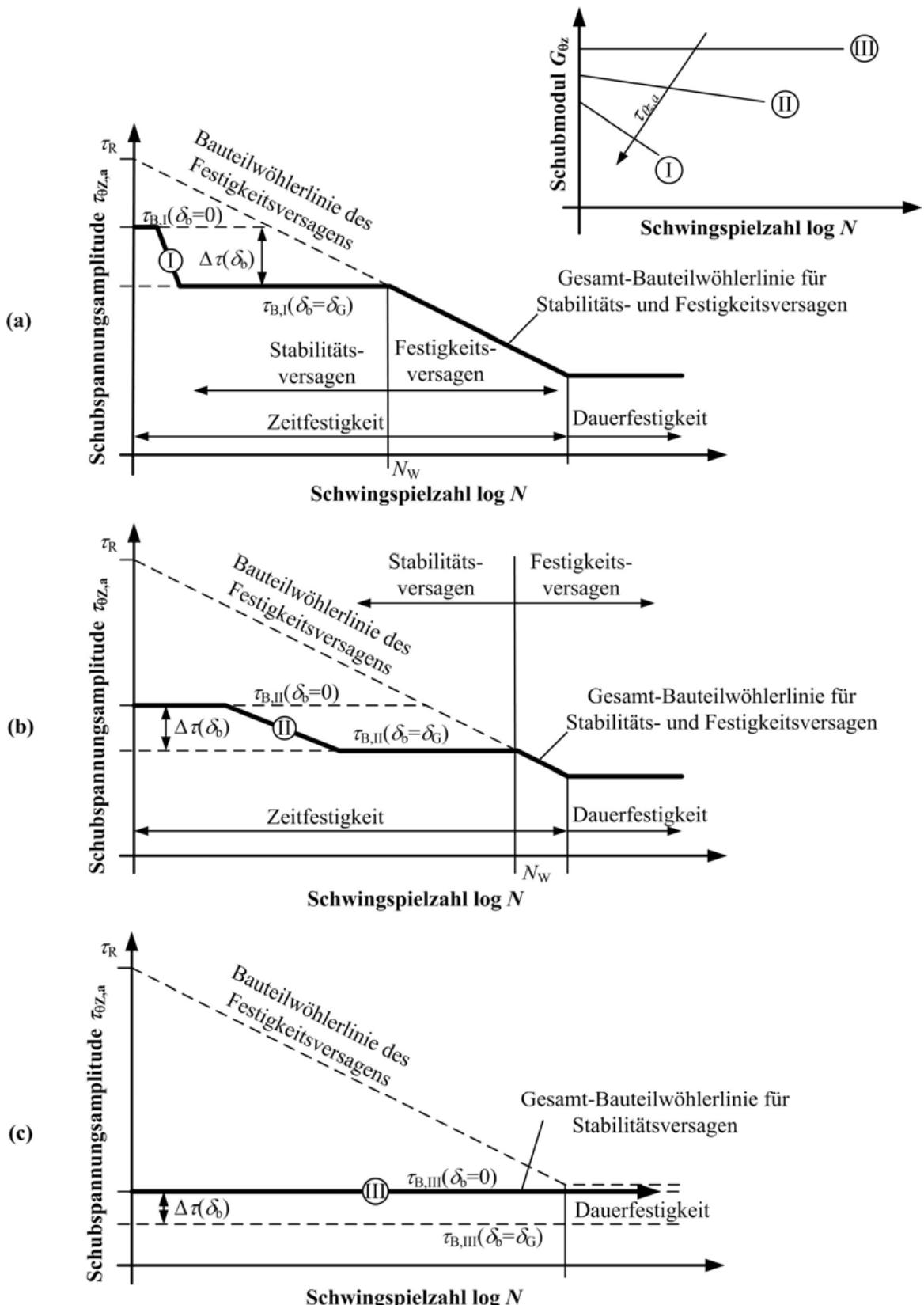


FIG. 6: Prinzipielle Darstellung des ermüdungsbedingten Beulgrenzenabfalls. Bauteilwöhlerdiagramm mit Wöhlerlinien für das Stabilitäts- und Festigkeitsversagen und Gesamt-Bauteilwöhlerlinie. **a:** hohe Schubspannungsspannungsamplitude **b:** mittlere Schubspannungsspannungsamplitude **c:** niedrige Schubspannungsspannungsamplitude

- [2] KLESCHINSKI, Michael: *Antriebswellen aus Faser-Kunststoff-Verbunden - Auslegung und Optimierung unter Berücksichtigung des ermüdungsbedingten Torsionsbeulens*, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen, Diss.. – erscheint in 2006
- [3] KNICKREHM, Andre: Zum Versagen unidirektonaler Glasfaser-Kunststoff-Verbunde bei Biegeschwellbeanspruchung. In: SCHÜRMANN, Helmut (Hrsg.): *Schriftenreihe Konstruktiver Leichtbau mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Aachen : Shaker-Verlag, 1999. – Zugel. Diss. der TU-Darmstadt
- [4] KNOPS, Martin: *Sukzessives Bruchgeschehen in Faserverbundlaminaten*, RWTH Aachen, Diss., 2003
- [5] LI, R. ; Soden P.: A continuum damage model for transverse matrix cracking in laminated fibre-reinforced composites. In: *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 356 (1998), S. 2379–2412
- [6] PUCK, Alfred: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten – Modelle für die Praxis*. München Wien : Carl Hanser Verlag, 1996. – Buch elektronisch verfügbar unter <http://www.klub.tu-darmstadt.de/forschung/download.php>