

# HERLEITUNG UND VALIDIERUNG DER DIFFERENTIALMATRIZ FÜR SCHUBWEICHE ROTATIONSSYMMETRISCHE SCHALEN BELIEBIGEN MERIDIANS

M. Klaus

Lehrstuhl und Institut für Leichtbau, RWTH Aachen  
Wüllnerstr. 7, 52062 Aachen

## 1 ÜBERSICHT

Im Maschinenbau und auf dem Gebiet des Bauingenieurwesens ist die rotationssymmetrische Schale ein häufig verwendetes Strukturelement. Besonders im Bereich der Luft- und Raumfahrttechnik sind rotationssymmetrische Schalen weit verbreitet (z.B. Flugzeugrumpfe, Trägerraketen, Treibstofftanks, Wohnmodule von Raumstationen). Gerade im diesem Anwendungsbereich sind die Anforderungen extrem. Man versucht die Strukturen möglichst leicht zu bauen, dabei aber gleichzeitig hohe Festigkeiten zu erreichen. Das führt zum Einsatz von dünnwandigen Strukturen aus verschiedenen Materialien (z.B. Laminaten).

Dünnwandige rotationssymmetrische Schalen lassen sich nicht als Linientragwerke betrachten, da sie unter Belastungen ihre Querschnittsform nicht beibehalten. Aus diesem Grund müssen sie als Flächentragwerke berechnet werden. Bei Flächentragwerken ist es möglich die physikalischen Größen, wie Schnittkräfte oder Verschiebungen, über zwei Koordinaten zu beschreiben. Da man bei axialsymmetrischen Schalen alle Größen über die Umfangsrichtung als periodisch betrachten kann, lassen sie sich als Fourierreihen darstellen, so dass man das System über den Umfang analytisch partiell integrieren kann. Das verbleibende gewöhnliche Differentialgleichungssystem lässt sich anschließend in Längsrichtung mit Hilfe numerischer Standardverfahren integrieren. Als Ergebnis dieser Integration erhält man eine Übertragungsmatrix. Danach wird die Übertragungsmatrix algebraisch zu einer Steifigkeitsmatrix umsortiert, mit deren Hilfe man die Verformungen und Schnittgrößen einzelner Elemente

bzw. Strukturen berechnen kann.

Unter bestimmten Umständen, wie bei kurzen Schalen oder bei Strukturen deren Wanddicken über den Gültigkeitsbereich der auf der Normalenhypothese basierenden Theorien hinaus gehen, müssen auch Verformungen in der Schale in Dickenrichtung berücksichtigt werden. Bei solchen als schubweich bezeichneten Schalen betrachtet man zusätzlich zu den Schnittgrößen in der Fläche die Querschübe in Längs- und Meridianrichtung.

Aufbauend auf bisherigen Arbeiten (Başar [1], [2], Rittweger [3]) wurde in dieser Arbeit ein partielles Differentialgleichungssystem für Rotationsschalen beliebigen Meridiants hergeleitet, das die Schubweichheit berücksichtigt.

Die hergeleiteten Gleichungen wurden anschließend in ein am Institut für Leichtbau der RWTH Aachen bestehendes Programm (ASTRA) implementiert. ASTRA ist ein Rechenprogramm, das speziell für die Berechnung von rotationssymmetrischen Schalen eingesetzt wird. Um mit dem neuen Element arbeiten zu können und seine Möglichkeiten ausschöpfen zu können, wurde ASTRA angepasst und erweitert.

Die Verwendbarkeit des hergeleiteten Elements wurde am Beispielrechnungen überprüft. Die Beispiele wurden dabei parallel mit ASTRA und einem kommerziellen Finite-Elemente Programm durchgeführt und die Ergebnisse verglichen.

## 2 GRUNDLAGEN

Besonders auf den Gebieten der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, sowie bei der Betrachtung von

Stab- und Flächenträgerwerken hat sich die Tensoralgebra und Tensoranalyse als ein an diese Problemstellungen als besonders angepasstes mathematisches Hilfsmittel erwiesen [1], [4]. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit die differentialgeometrische Untersuchung der Schalen, sowie die Betrachtung ihrer Metrik und Krümmungseigenschaften mit Hilfe von Tensoralgebra durchgeführt.

Um eine Fläche im Raum zu beschreiben, reichen grundsätzlich zwei krummlinige Koordinaten. Einem Punkt auf der Fläche können also zwei kovariante Basisvektoren  $\mathbf{a}_\alpha$  zugeordnet werden, die tangential auf einer der Koordinatenlinien liegen. Um beliebig gerichtete Vektoren auf der Fläche beschreiben zu können wird ein dritter Basisvektor  $\mathbf{a}_3$  eingeführt, der normal auf der Fläche steht. Zusätzlich können kontravariante Basisvektoren  $\mathbf{a}^\alpha$  definiert werden. Der Zusammenhang zwischen der kovarianten und kontravarianten Basis ist in der Abbildung 1 veranschaulicht.

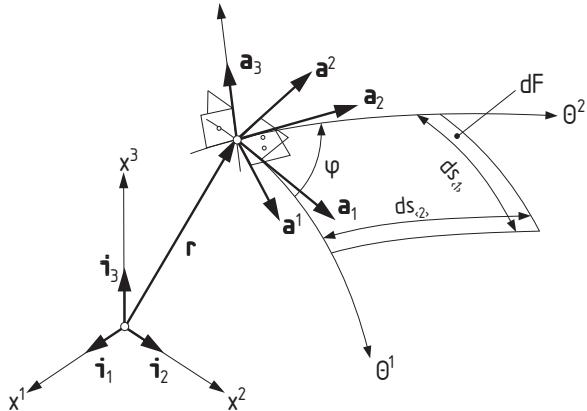


BILD 1: Kovariante und kontravariante Basis

Eine der einfachsten Möglichkeiten eine Rotationsfläche zu beschreiben ist die Benutzung von Zylinderkoordinaten. Die Koordinate  $\Theta^1$  entspricht dem Winkel zwischen einer bestimmten Ebene, die die Rotationsachse der Fläche enthält und einer beliebigen Meridianebebene. Als  $\Theta^2$  kann man die Meridiankurve annehmen. Meridianlinien auf der Fläche entsprechen somit den Kurven  $\Theta^1 = \text{konst}$  und die Breitenlinien  $\Theta^2 = \text{konst}$ . In der Abbildung 2 findet man eine allgemeine Rotationsschale mit der Breiten- und der Meridianlinien, sowie mit den kovarianten Basisvektoren für einen Oberflächenpunkt.

Zu den wichtigsten Größen bei der Beschreibung

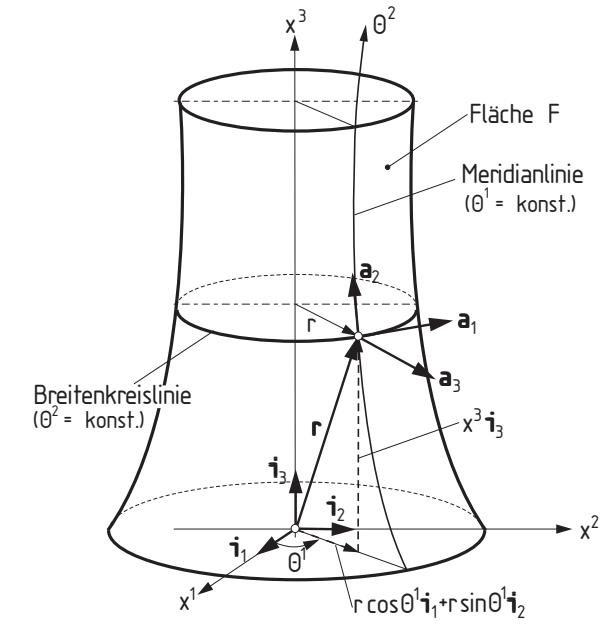


BILD 2: Allgemeine Rotationsschale mit den kovarianten Basisvektoren

der Geometrie einer rotationssymmetrischen Schale gehören der Maßtensor

$$(1) \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (r_{,2})^2 + (x_{,2}^3)^2 \end{pmatrix},$$

der Krümmungstensor

$$(2) \quad b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{rx_{,2}^3}{\sqrt{(r_{,2})^2 + (x_{,2}^3)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r_{,22}x_{,2}^3 - r_{,2}x_{,22}^3}{\sqrt{(r_{,2})^2 + (x_{,2}^3)^2}} \end{pmatrix}$$

und die Christofelsymbole

$$(3) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^1 = \mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_{,2}}{r} \\ \frac{r_{,2}}{r} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{rr_{,2}}{(r_{,2})^2 + (x_{,2}^3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{r_{,2}r_{,22} + x_{,2}^3 x_{,22}^3}{(r_{,2})^2 + (x_{,2}^3)^2} \end{pmatrix}.$$

Diese Größen tauchen immer wieder während der Herleitung auf. Da sie nur von dem Radius  $r$  bzw. der Position auf der Achse  $x_3$  abhängen, sind sie für ein Breitenlinienschnitt konstant.

### 3 HERLEITUNG DER DIFFERENTIALMATRIZ

Das Hauptziel dieser Arbeit war das Herleiten eines partiellen Differentialgleichungssystems, mit dessen Hilfe man die Zustandsgrößen auf einer Breitenlinie  $\Theta^2 = \text{konst}$  einer rotationssymmetrischen Schale partiell in die Meridianrichtung der Schale  $\Theta^2$  ableiten kann.

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta^2} \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$$

Dabei sind  $r$  der Verschiebungsvektor und  $t$  der Spannungsvektor an einem Breitenlinienschliff:

$$(5) \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} v_t \\ v_u \\ v_3 \\ \omega_t \\ \omega_u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} n_t \\ n_u \\ n_3 \\ m_t \\ m_u \end{pmatrix}.$$

Der aus den Verschiebungs- und dem Spannungsvektoren bestehenden Vektor nennt man den Zustandsvektor.

$$(6) \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}$$

Zusätzlich wird die partielle Differentialmatrix mit Hilfe der Fourierzerlegung in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem umgewandelt.

Die Differentialmatrix  $\mathbf{A}$  soll später der Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{U}$  dienen. Die Übertragungsmatrix „überträgt“ in einem rotationssymmetrischen Schalenelement den Zustand (Verschiebungen und Spannungen) von einem Rand zum anderen.

#### 3.1 Verwendete Gleichungssysteme

Die Herleitung der Differentialmatrix basiert grundsätzlich auf fünf Gleichungssystemen. Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Gleichungen und ihre Bausteine sind im Bild 3 dargestellt.

Die gesamte Gleichungsstruktur enthält neben den beiden Teilen des Zustandsvektors  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{t}$  vier weitere Vektoren. Zwei von ihnen gehören zu den äußeren mechanischen Variablen eines beliebigen Punktes  $P$  der Tragwerksbezugsfläche. Es sind die Last- und Verschiebungsvektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{u}$ . Beide sind 5-zeilig:

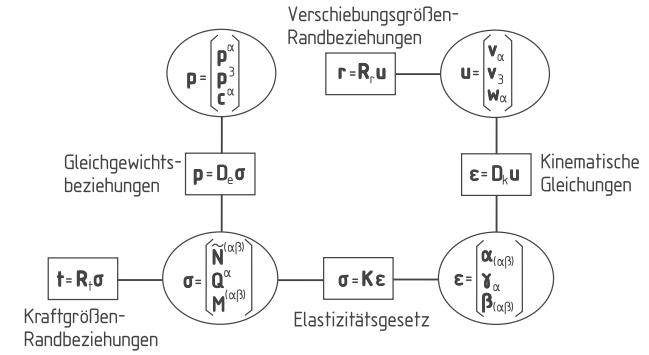


BILD 3: Strukturschema einer konsistenten Flächentragwerkstheorie unter Berücksichtigung von Schubverformungen

$$(7) \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p^\alpha \\ p^3 \\ c^\alpha \end{pmatrix} = , \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_3 \\ w_\alpha \end{pmatrix} .$$

Die Größen  $p^i$  und  $c^\alpha$  sind äußere Lasten bzw. Momente und  $v^i$  und  $w^\alpha$  sind entsprechend die Verschiebungen bzw. Verdrehungen.

Bei den anderen beiden Vektoren handelt es sich um die inneren mechanischen Variablen: Schnittgrößenvektor  $\sigma$  und Verzerrungsvektor  $\epsilon$ . Diese sind 8-zeilig:

$$(8) \quad \sigma = \begin{pmatrix} \tilde{N}^{(\alpha|\beta)} \\ Q^\alpha \\ M^{(\alpha|\beta)} \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \alpha_{(\alpha|\beta)} \\ \gamma_\alpha \\ \beta_{(\alpha|\beta)} \end{pmatrix} .$$

Bei den Komponenten des Schnittgrößenvektors handelt es sich um flächenhaften Piola-Kirchhoffschen Tensorgrößen 2. Art (zusammengesetzt aus dem symmetrischen Dehnungskrafttensor  $\tilde{N}^{(\alpha|\beta)}$ , dem Querkraftvektor  $Q^\alpha$  und dem Momententensor  $M^{(\alpha|\beta)}$ ). Zweite Art bedeutet hier, dass die Schnittgrößen sich im Rahmen einer nichtlinearen Theorie auf den verformten Zustand beziehen. Da der reine Dehnungskrafttensor  $N^{(\alpha|\beta)}$  nicht symmetrisch ist wurde er durch die Kopplung mit Momentanteilen symmetrisch gemacht. Aus diesem Grund wird  $\tilde{N}^{(\alpha|\beta)}$  auch als symmetrischer Pseudo-Dehnungskrafttensor bezeichnet.

Bei den Komponenten  $\alpha_{(\alpha|\beta)}$  und  $\beta_{(\alpha|\beta)}$  handelt es sich um den ersten (speichert die Informationen über die Längen- und Winkeländerungen der

Mittelfläche) bzw. den zweiten (repräsentiert die Differenz der Krümmungstensoren der verformten und unverformten Bezugsflächen) Verzerrungstensor der Bezugsfläche. Die beiden Teile von  $\gamma_\alpha$  bilden den Schubverzerrungstensor. In diesem Tensor sind die Verdrehungen der Querschnittsfläche in Dickenrichtung gegenüber der unverformten Mittelfläche gespeichert. Dieser Größen sind bei der Normalenhypothese (im Gegensatz zu den schubweichen Theorien) gleich Null.

Die im Bild 3 zusammengefassten Gleichungssysteme sollen nun beschrieben werden.

### 3.1.1 Kinematische Beziehungen

Die kinematischen Beziehungen, wie sie hier verwendet wurden, basieren auf dem Verzerrungstensor von Cauchy-Green  $\gamma_{ij}$ . Dieser Tensor stellt die Differenz der dreidimensionalen (ergänzt um die Dickenrichtung) Maßtensoren des verformten und unverformten Schalenraums dar. In dieser Differenz sind alle durch eine Verformung verursachte Abstands- und Winkelveränderungen in der Schale enthalten.

$$(9) \quad \gamma_{(ij)} = \begin{pmatrix} \gamma_{(\alpha\beta)} & \gamma_{(\alpha 3)} \\ \hline \gamma_{(3\alpha)} & \gamma_{(33)} \end{pmatrix}$$

Postuliert man die Dehnungsfreiheit in Dickenrichtung der Schalen muss  $\gamma_{33} = 0$  sein. Die Komponente  $\gamma_{(\alpha 3)}$  entspricht im wesentlichen dem zuvor erwähnten Schubverzerrungstensor  $\gamma_\alpha$ . Aus der Komponente  $\gamma_{(\alpha\beta)}$  lassen sich schließlich der erste und der zweite Verzerrungstensor der Bezugsfläche ( $\alpha_{(\alpha\beta)}$  und  $\beta_{(\alpha\beta)}$ ) herleiten. Linearisiert man nun die erhaltenen Beziehungen, bekommt man die  $5 \times 8$  Matrix  $\mathbf{D}_k$ , die die tensoriellen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  mit dem Verzerrungsvektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  verbindet.

### 3.1.2 Gleichgewichtsbeziehungen

Die  $8 \times 5$  Matrix  $\mathbf{D}_e$ , die den Lastvektor  $\mathbf{p}$  mit dem Schnittgrößenvektor  $\boldsymbol{\sigma}$  verbindet, und die konstitutiven (Gleichgewichts-) Beziehungen darstellt, wurde mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen hergeleitet. Das Prinzip besagt, dass die Summe der virtuellen Arbeiten aller korrespondierenden virtuellen Weggrößen eines geometrisch zulässigen Verschiebungsfeldes Null ist.

Um eine bessere Handhabung der Formel zu ermöglichen, ist es praktikabel die Schnittgrößen-Verschiebungs-Multiplikationen zu entkoppeln. Das geschieht durch die Trennung der linearen und nichtlinearen Terme. Die mit den nichtlinearen Anteilen verbunden Schnittgrößen werden als Vorspannungen betrachtet und mit einem  $V$  gekennzeichnet.

$$(10) \quad \mathbf{p} = \mathbf{D}_{e,lin} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}_{e,nlin} \cdot \overset{V}{\boldsymbol{\sigma}}$$

### 3.1.3 Elastizitätsgesetz

Das Elastizitätsgesetz, welches die beiden inneren mechanischen Variablen  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mit Hilfe der Wandsteifigkeitsmatrix verbindet, wurde aus der Theorie der elastischen Werkstoffe entwickelt. Laut Definition elastischer Werkstoffe, ist die erste Variation der Formänderungsenergiedichte identisch mit dem negativen Integranten der inneren virtuellen Arbeit. Aufgrund von experimentellen Untersuchungen weiß man, dass die Verknüpfung von Schnittgrößen und Verzerrungen bei kleinen Verformungen für die meisten Materialien als linear angenommen werden kann [1]. Auch bei geometrisch nichtlinearen Tragwerken nimmt man diesen Ansatz als 1. Approximation. In diesem Fall einer linearen oder Hookeschen Elastizität kann man die folgende Beziehung aufstellen:

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ Q^\alpha \\ M^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{(1)}E^{\alpha\beta\lambda\mu} & 0 & {}^{(2)}E^{\alpha\beta\lambda\mu} \\ 0 & E^{\alpha\lambda} & 0 \\ {}^{(2)}E^{\alpha\beta\lambda\mu} & 0 & {}^{(3)}E^{\alpha\beta\lambda\mu} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\lambda\mu} \\ \gamma_\lambda \\ \beta_{\lambda\mu} \end{pmatrix}$$

Die Anteile, die die Kopplungen zwischen den Verzerrungen in der Fläche bzw. den Verdrehungen und den Querschubverzerrungen repräsentieren, wurden hier nicht berücksichtigt, da man sie für praktisch alle Materialien vernachlässigen kann [6], [7]. Für den Spezialfall der isotropen Werkstoffe verschwindet auch die Komponente  ${}^{(2)}E^{\alpha\beta\lambda\mu}$ .

### 3.1.4 Randbeziehungen

Um konkrete Problemstellungen zu behandeln müssen neben den Gleichgewichtsbedingungen auch die Randbedingungen betrachtet werden.

Schneidet man aus der Bezugsfläche  $F$  ein Stück heraus, können die Verschiebungs- und Kraftgrößen in jedem Randpunkt durch ein orthonormiertes Koordinatensystem beschrieben werden. Dieses Koordinatendreibein besteht aus den Vektoren  $\mathbf{n}$  (Vektor in der Schalenebene und normal zu der Randkurve),  $\mathbf{k}$  (Tangentialvektor der Randkurve) und  $\mathbf{a}_3$  (der dritte Basisvektor der Bezugsfläche  $F$ ). In der Abbildung 4 ist ein Ausschnitt der Bezugsfläche dargestellt dessen Ränder längst der Hauptkoordinaten verlaufen.

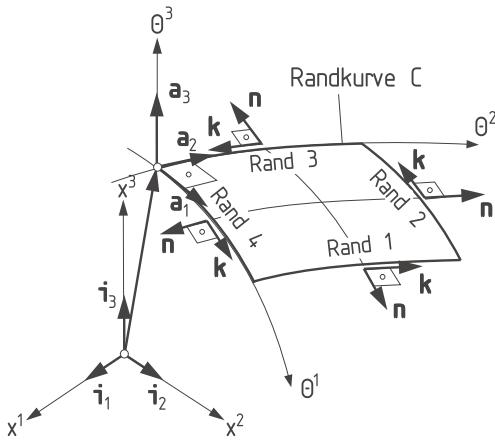


BILD 4: Flächenträgerwerkselement mit Rändern längs der Hauptkrümmungskoordinaten

Um die benötigten Gleichungen zu erhalten, reicht es hier nur den Rand 2 zu betrachten. Mit Hilfe der damit festgelegten Randvektoren  $n_\alpha$  und  $k_\beta$  lassen sich die Matrizen, die die Randkraftgrößen  $\mathbf{t}$  mit den tensoriellen Schnittgrößen  $\boldsymbol{\sigma}$  bzw. die Randverschiebungsgrößen  $\mathbf{r}$  mit den tensoriellen Verformungen  $\mathbf{u}$  verbinden, herleiten. Da die Gleichungen, wie bei den Gleichgewichtsbeziehungen, ebenfalls nichtlineare Terme enthalten werden auch hier die linearen und nichtlinearen Anteile durch das einführen von Vorspannungen trennt.

$$(12) \quad \mathbf{t} = \mathbf{R}_{t,lin} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{R}_{t,nlin} \cdot \overset{V}{\boldsymbol{\sigma}}$$

### 3.2 Kombination der Gleichungssysteme

Die bis jetzt vorgestellten fünf Gleichungssysteme ergeben insgesamt 31 Gleichungen. Diese Gleichungssysteme werden so zusammengefasst, dass nur zehn Differentialgleichungen übrig bleiben,

mit deren Hilfe man die Differentialmatrix aufstellen kann. Die zehn gesuchten Gleichungen werden in zwei Schritten ermittelt. Für den ersten Schritt nimmt man die beiden Randbedingungsgleichungssysteme, sowie die kinematischen Gleichungen und das Elastizitätsgesetz als Grundlage. Die Kombination dieser Beziehungen führt zu dem folgenden aus fünf Gleichungen bestehenden Differentialgleichungssystem:

(13)

$$\mathbf{t} = \mathbf{E}_m^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^2} + \mathbf{E}_{m0} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{E}_{m1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} + \mathbf{E}_{m2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \Theta^2 \partial \Theta^1}$$

Für die Herleitung der anderen fünf Gleichungen nimmt man die Gleichgewichtsbeziehungen hinzu. Getrennt nach den Randtermen und deren partiellen Ableitungen erhält man die folgende Gleichungsschar.

$$(14) \quad \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Theta^2} = \mathbf{F}_{m0} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{F}_{m1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^1} + \mathbf{F}_{m2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{(\partial \Theta^1)^2} + \mathbf{G}_{m0} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{G}_{m1} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \Theta^1} + \mathbf{H}_{m0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Theta^2} + \mathbf{H}_{m1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \Theta^1 \partial \Theta^2} + \mathbf{L}$$

Die elf  $5 \times 5$  Matrizen und der Lastvektor  $\mathbf{L}$  bilden die Grundlage für ein partielles Differentialgleichungssystem.

(15)

$$\frac{\partial}{\partial \Theta^2} \mathbf{Z} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{A}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \Theta^1} \mathbf{Z} + \mathbf{A}_2 \cdot \frac{\partial^2}{(\partial \Theta^1)^2} \mathbf{Z} + (\mathbf{0}, \mathbf{L})^T$$

mit:

(16)

$$\mathbf{A}_0 = \left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m0} & \mathbf{E}_m \\ \hline \mathbf{F}_{m0} - \mathbf{H}_{m0} \mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m0} - & \mathbf{G}_{m0} + \mathbf{H}_{m0} \mathbf{E}_m + \\ \mathbf{H}_{m1} \frac{\partial}{\partial \Theta^1} (\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m0}) & \mathbf{H}_{m1} \frac{\partial}{\partial \Theta^1} \mathbf{E}_m \end{array} \right),$$

(17)

$$\mathbf{A}_1 = \left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m1} & 0 \\ \hline \mathbf{F}_{m1} - \mathbf{H}_{m0} \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_{m1} - & \mathbf{G}_{m1} + \\ \mathbf{H}_{m1} (\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m0} + \frac{\partial}{\partial \Theta^1} (\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m1})) & \mathbf{H}_{m1} \mathbf{E}_m \end{array} \right)$$

und

$$(18) \quad \mathbf{A}_2 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \mathbf{F}_{m2} - \mathbf{H}_{m1} \mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m1} & 0 \end{array} \right).$$

Um die partielle Differentialgleichung in eine vollständige Differentialgleichung überzuführen, muss man die Variable  $\Theta^1$  in den Gleichungen eliminieren. Da die  $\Theta^1$ -Richtung bei geschlossenen Rotationsschalen der Breitenkreisrichtung

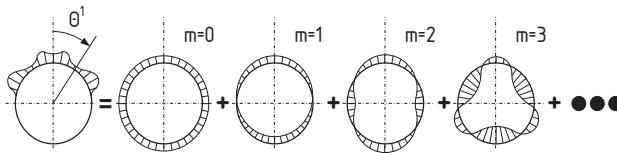


BILD 5: Verschiedene Wellenzahlen bei einer symmetrischen Belastung

entspricht, kann man für die Zustandsgrößen auf einem bestimmten Breitenkreis ( $\Theta^2 = \text{konst}$ ) von Periodizität ausgehen. Periodisch veränderliche Größen lassen sich besonders gut durch Fourierreihen darstellen.

$$(19) \quad \mathbf{Z}(\Theta^1, \Theta^2) = \sum_{m=0}^{\infty} (\mathbf{Z}_{cm}(\Theta^2) \cos(m\Theta^1) + \mathbf{Z}_{sm}(\Theta^2) \sin(m\Theta^1))$$

Die Fourierkoeffizienten  $\mathbf{Z}_{cm}$  und  $\mathbf{Z}_{sm}$  sind die Amplituden einer wellenförmigen Größenverteilung und  $m$  ist die Wellenzahl, die die Anzahl von Wellen über den Umfang repräsentiert. Die Kosinus-Glieder  $\mathbf{Z}_{cm} \cdot \cos(m \cdot \Theta^1)$  erzeugen zu der Achse  $\Theta^1 = 0$  symmetrische Wellen. Die Sinus-Glieder beschreiben die antimetrischen Anteile der Zustandsgrößen. Im Bild 5 wird die Zerlegung einer rein symmetrischen Belastung in einzelne Wellenzahlen graphisch verdeutlicht.

Analog zu dem Zustandsvektor lassen sich auch der Lastvektor  $\mathbf{L}$  und die Matrizen  $\mathbf{A}_i$  in Fourierreihen entwickeln. Nimmt man nun eine rotationssymmetrische Vorspannungsverteilung, werden sämtliche Wellenzahlen entkoppelt. Folgerichtig bekommt man damit ein vereinfachtes Differentialgleichungssystem mit 20 Gleichungen bzw. einer  $20 \times 20$ -Differentialmatrix.

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta^2} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{cm} \\ \mathbf{Z}_{sm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 - m^2 \mathbf{A}_2 & m \mathbf{A}_1 \\ -m \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 - m^2 \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{cm} \\ \mathbf{Z}_{sm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{cm} \\ \mathbf{L}_{sm} \end{pmatrix}$$

## 4 ÜBERTRAGUNGS- UND ELEMENTSTEIFIGKEITS-MATRIZEN

### 4.1 Übertragungsmatrix

Mit Hilfe der Übertragungsmatrix kann man die Verformungs- und Schnittgrößen an einer beliebigen Stelle bestimmen, wenn diese Größen an einer anderen Stelle der Schale bekannt sind.

$$(21) \quad \mathbf{Z}_1 = \mathbf{U} \mathbf{Z}_0 + \mathbf{P}$$

$\mathbf{P}$  ist der zu der Übertragungsmatrix gehörende Lastvektor. Um die Übertragungsmatrix zu bestimmen wird zuerst der Lastvektor  $\mathbf{L}_m$  in die Differentialmatrix eingeordnet. Der Zustandsvektor wird um die Komponente 1 erweitert.

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta^2} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{L}_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit bekommt man für rotationssymmetrische Vorspannungen formal ein homogenes Gleichungssystem mit 21 Gleichungen.

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta^2} \mathbf{Z} = \mathbf{A} \mathbf{Z}$$

Man erhält die Übertragungsmatrix durch die Integration der Differentialmatrix. Für bestimmte Spezialfälle existieren semi-analytische Integrationsverfahren (z.B. Lie-Magnus-Reihe oder Spektralzerlegung für Zylinderschalen). Will man aber Schalen beliebigen Meridians berechnen, kommt man nicht umhin die Integration numerisch durchzuführen. Dabei haben sich das Runge-Kutta und das Extrapolationsverfahren als besonders effektiv erwiesen.

### 4.2 Elementsteifigkeitsmatrix

Um komplexe Schalenstrukturen mit sich verändernder Geometrie und/oder Material berechnen zu können, teilt man sie in Elemente auf. Die einzelnen Elemente sind durch Übertragungsmatrizen beschreibbar. Die Analyse des Gesamtsystems kann man mit verschiedenen Methoden durchführen. Bei der Übertragungsmethode sind die Zustandsgrößen unbekannt. Obwohl Übertragungsmatrizen sich gut für diese Methode eignen

würden, wird hier die Weggrößenmethode, bei der die Verschiebungen/Verdrehungen unbekannt sind, bevorzugt. Bei diesem Verfahren werden die Übertragungsmatrizen in Elementsteifigkeitsmatrizen umgewandelt, aus denen man die Gesamtsteifigkeitsmatrix der Struktur bilden kann. Die Vorteile dieser Methode sind unter anderen ihre Schnelligkeit und einfache Handhabung. Der Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix aus den einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen ist sehr übersichtlich. Die Anzahl der Gleichungen ist gegenüber der Übertragungsmethode nur halb so groß und der Speicherplatzverbrauch ist wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen ebenfalls geringer. Außerdem verwenden die meisten FE-Programme die Weggrößenmethode, so dass eine Kopplung mit FE-erzeugten Steifigkeitsmatrizen erleichtert wird.

Ein notwendiger Schritt vor der Umwandlung einer Übertragungsmatrix in eine Elementsteifigkeitsmatrix ist die Transformation in das globale Koordinatensystem. Dadurch wird der Zustandsvektor unabhängig von der Meridianrichtung gemacht. Zusätzlich werden die Schnittkraftgrößen mit dem jeweiligen Radius normiert.

Für jede Wellenzahl lässt sich jetzt nach der „Direct-Stiffness-Methode“ die Gesamtsteifigkeitsmatrix einer Struktur angeben. Diese Matrix hat die Ordnung  $10 \cdot \text{Anzahl der Ringe}$  (Ein Element liegt zwischen zwei Ringen). Der dazu gehörige Lastvektor enthält sowohl die Flächenlasten als auch die Ringlasten.

## 5 PROGRAMM ASTRA

Das in dieser Arbeit hergeleitete Differentialgleichungssystem für schubweiche Rotationsschalen wurde in das am Institut für Leichtbau benutztes Programm ASTRA integriert.

Dieses Programm wurde am Institut für Leichtbau entwickelt und basiert auf der Dissertation von A. Rittweger [3]. ASTRA beruht auf der Differentialmatrizenmethode und ist speziell für die Berechnung rotationssymmetrischer Schalen gedacht. Die Möglichkeit unterschiedliche Geometrie- und Materialtypen zu kombinieren erlaubt die Berechnung realer Strukturen. Nähere Beschreibung der möglichen Geometrien und Wandaufbauten findet man in dem ASTRA-Handbuch [8].

Mit ASTRA stehen zu Strukturanalyse fünf Rechenverfahren zu Verfügung:

- lineare Statik (Theorie 1. Ordnung)
- nichtlineare Statik (Theorie 2. Ordnung)
- lineare Stabilitätsanalyse
- nichtlineare Stabilitätsanalyse
- lineare Stabilität kombinierter Lasten

Als Lasten kann das Programm mit Flächenlasten, Ringlasten und Temperaturlasten umgehen.

## 6 VALIDIERUNG

Um die in ASTRA implementierten Routinen zu testen, wurden einige Validierungsrechnungen (Benchmarks) an einfachen Schalen durchgeführt. Dabei wurden verschiedene Geometrien, Materialeigenschaften, Wandaufbauten und Belastungen untersucht.

Alle Ergebnisse der Benchmarks wurden mit dem FEM-Programm NASTRAN/PATRAN (ebenfalls mit schubweichen Schalenelementen), sowie mit dem, auf der Theorie von Rittweger [3] basierenden, schubstarren ASTRA-Elementtyp verglichen. Außerdem wurden einige Beispiele aus der Literatur nachgerechnet [9], [10]. Hier sollen nur zwei Beispiele kurz vorgestellt werden.

In ersten Beispiel wird eine Schale mit konstanter Meridiankrümmung untersucht. Der Meridian wird dabei durch einen Kreissegment mit 1 m Radius beschrieben. Die Schale ist 100 mm lang und der Schalenradius sinkt auf Grund der Krümmung von 70 auf 60 mm. Die Tangente des Meridians ist am Rand mit dem größten Schalenradius parallel zu der Symmetriechse. Dieser Rand ist fest eingespannt. Das andere Ende ist für alle Verschiebungen bzw. Verdrehungen frei. Die Schalenwand ist 6 mm dick. Bei dem Wandaufbau handelt es sich um ein vierstichtiges Laminat mit der Phasenausrichtung bezüglich der Meridianrichtung entsprechend  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $-45^\circ$ . In der Abbildung 6 ist die Radialverschiebung über den Meridian bei einer Axialbelastung für eine schubweiche und eine schubstarre Belastung dargestellt.

Bei dem zweiten Beispiel handelt es sich um einen auf acht Stützen stehenden zylindrischen Kühl-

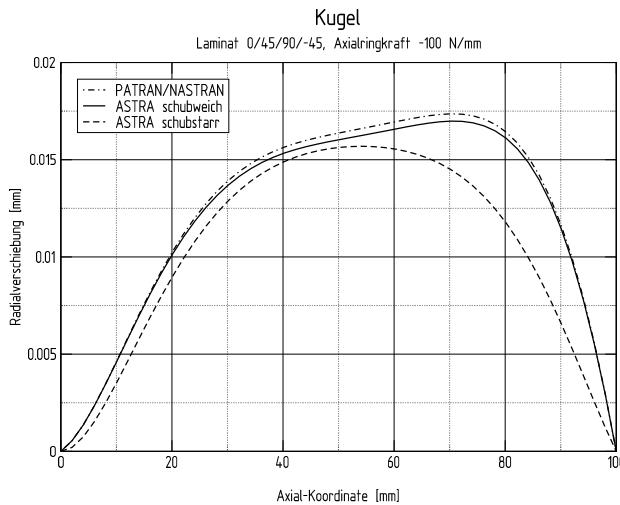


BILD 6: Radialverschiebungen einer Kugelschale unter Axialkraftfluss, 4-Schichten-Laminat  $0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ$

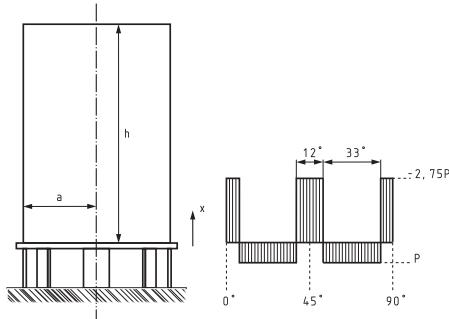


BILD 7: Kühlturm

turm. Der Turm wird durch sein Eigengewicht belastet. Die Geometrie und das Belastungsprofil findet man in der Abbildung 7. Dieses Beispiel wurde aus [10] entnommen.

Da die durch die Stützen verursachte Belastung auf das untere Ende nicht axialsymmetrisch, aber im Umfang periodisch ist, kann sie mit Hilfe von Fourierreihen beschrieben werden. Der in der Abbildung 7 dargestellte Belastungsverlauf ist unstetig und benötigt für die exakte Wiedergabe eine unendliche Zahl von Reihengliedern. In der Praxis reichen aber nur wenige Glieder aus um einen ausreichend genauen Lastverlauf zu simulieren. Im Fall des Kühlturms wurden fünf Reihenglieder benutzt, deren Wellenzahlen alle Vielfache von 8 sind.

In der Abbildung 8 sind die Verformungen der Turmschale, wie sie mit PATRAN/NASTRAN be-

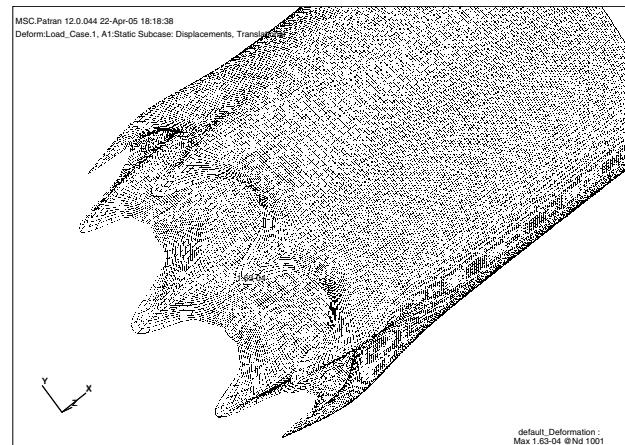


BILD 8: PATRAN-Modell der verformten Geometrie des dickwandigen Kühlturms

rechnet wurden, dargestellt. Die Abbildung 9 zeigt die Radialverschiebung an einem Meridian über einer Stütze.

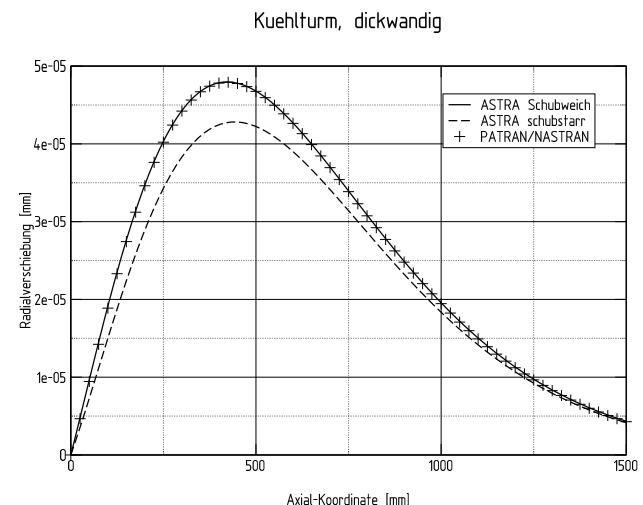


BILD 9: Radialverschiebungen auf einem Meridian ( $\Theta^1 = 0^\circ$ ) des dickwandigen Kühlturms

Im allgemeinen lässt sich sagen, dass bei Schalen bei denen man schubweiches Verhalten erwartet (kurze und/oder Schalen deren Radius-Wandicken-Verhältnis nicht mehr von der Membrantheorien abgedeckt ist), in Vergleich zu FE-Berechnungen sehr gute Übereinstimmungen sowohl bei Statik wie auch bei Stabilitätsuntersuchungen erhält. Für lange und dünne Schalen ist das Element weniger geeignet, da einige Terme in den verwendeten Gleichungen mit der sinkenden Bedeutung von Schubweichheit gegen Unendlich

gehen (shear locking) und damit numerische Probleme erzeugen. Das kann im Extremfall zu nicht vernachlässigbaren Fehlern führen.

## 7 ZUSAMMENFASSUNG

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein differentielles Gleichungssystem hergeleitet, das es nach der Integration ermöglicht die Verformungen und Kräfteverhältnisse in einer rotationssymmetrischen schubweichen Schale beliebigen Meridians zu ermitteln. Zu den getroffenen Voraussetzungen gehören die Dehnungsfreiheit in Dickenrichtung, linear-elastisches Materialverhalten, sowie konservatives Verhalten der äußeren Belastungen.

Die differentiellen Gleichungen wurden aus den Gleichgewichtsbeziehungen am verformten Element, den kinematischen Gleichungen, den elastomechanischen Beziehungen und den Verschiebungsrößen- und Kraftgrößen-Randbedingungen gewonnen. Als Ergebnis dieser Herleitung erhielt man ein partielles Differentialgleichungssystem, welches in Umfangsrichtung von zweiter Ordnung und in Meridianrichtung von erster Ordnung ist. Die Integration in Umfangsrichtung wurde, auf Grund der Periodizität aller Größen auf einer Breitenlinie, mit Hilfe eines Fourierreihenansatzes analytisch durchgeführt.

Das nach der Umfangsintegration verbleibende Differentialgleichungssystem erster Ordnung konnte nun in Meridianrichtung numerisch integriert werden. Die daraus folgende Übertragungsmatrix erlaubt es, den Verformungs- und Kräftezustand an einer beliebigen Stelle einer Schale zu berechnen, wenn diese Größen an einer anderen Stelle der Schale bekannt sind.

Die ermittelten Gleichungen zur Berücksichtigung der Schubweichheit wurden in ein am Institut für Leichtbau bestehendes Programmsystem (ASTRA), das auf der Übertragungsmatrixmethode basiert, implementiert. Das Programm wurde soweit erweitert, dass man nun neben den Statik- und Stabilitätsberechnungen von schubstarren Schalen, die korrespondierende Berechnungen für schubweiche Schalen durchführen kann.

Nach der erfolgreichen Implementierung wurden mehrere Validierungsrechnungen durchgeführt. Es hat sich gezeigt, dass die neuen Ansätze erhebliche

Defizite der schubstarren Theorie bei bestimmten Schalentypen (kurze und/oder dickwandige Schalen) beseitigen. Bei Schalen mit kleinen Verhältnissen von Wanddicke zum Schalenradius bringen die neuen Gleichungen dagegen kaum nennenswerte Vorteile. Aufgrund der höheren numerischen Instabilität (besonders bei dünnen Schalen) und der höheren Rechenzeit, lohnt sich der Einsatz dieser Gleichungen meist nur in Fällen, in denen ein schubweiches Verhalten zu erwarten ist.

## Literatur

- [1] Başar, Y., Krätzig, W.: „Mechanik der Flächentragwerke“, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1985
- [2] Başar, Y., Krätzig, W.: „Theory of Shell Structures“, Institut für Konstruktiven Ingenierbau, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 2000
- [3] Rittweger, A.: „Statik, Stabilität und Eigenschwingungen anisotroper Rotationsschalen beliebigen Meridians mit der Übertragungsmatrizen-Methode“, Institut für Leichtbau, RWTH Aachen, Aachen, 1992
- [4] de Boer, R.: „Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure“, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982
- [5] Dong, S.B., Tso, F.K.W.: „On a Laminated Orthotropic Shell Theory Including Transverse Shear Deformation“, Journal of Applied Mechanics, December 1972
- [6] Barut, A., Madenci, E., Tessler, A.: „Nonlinear analysis of laminates through a midline-type shear deformable shallow shell element“, Computer methods in applied mechanics and engineering 143, 1995
- [7] Schmid, T.: „Das ASTRA Handbuch“, Institut für Leichtbau, RWTH Aachen, Aachen, 2003
- [8] Mazurkiewicz, Z., Nagórski R.: „Shells of Revolution“, PWN, Warsaw, 1991
- [9] Flügge, W.: „Stresses in Shells“, Springer-Verlag, Berlin, 1960