

# DAS FESTIGKEITSPROBLEM IN DÜNNWANDIGEN FASERVERBUNDTRAGWERKEN

M.Piening

DLR-Institut für Faserverbund-Leichtbau und Adaptronik  
Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig

## Abstrakt

Das Festigkeitsproblem in dünnwandigen Flächentragwerken aus Faserverbunden wird heute in der Regel mit Schalenelementen (2D-Elementen) behandelt. Neben der klassischen Laminattheorie (CLT) findet die Schubdeformationstheorie (SDT) weitestgehende Anwendung. Auf die so ermittelten Spannungen werden anschließend Versagenskriterien angesetzt, um zu einer Festigkeitsaussage zu gelangen.

Dieser Beitrag befaßt sich nicht mit den Versagensmodellen und dem Bruchgeschehen, sondern mit der reinen Spannungsaussage. Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem die Spannungen und Dehnungen in einer Anzahl von Punkten in Dickenrichtung nach den Regeln der allgemeinen Elastizitätstheorie berechnet werden. Dazu wird nicht nur die erste Variation des elastischen Potentials benutzt (Verschiebungsmethode), sondern anschließend die zweite Variation nach den kompatiblen Spannungsverteilungen durchgeführt (Modifiziertes Kraftgrößenverfahren).

Die Ergebnisse weichen unvermutet stark von den mit den 2D-Modellen erzielten Lösungen ab. Jedoch zahlreiche Nachrechnungen von Versuchen, die im Rahmen der Schadensmechanik<sup>4</sup> im DLR-Institut für Strukturmechanik durchgeführt und dokumentiert wurden, ergeben eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit den Versuchsbeobachtungen, sowohl in qualitativer als auch in quantitativer Hinsicht. Die zahlreichen Nachrechnungen von Versuchen an CFK-Proben - statisch und dynamisch - haben inzwischen Interpretationen der Versuchsergebnisse ermöglicht, die damals nicht erreichbar waren.

Es wird auf die Versagensursachen eingegangen wie auch auf die Möglichkeiten, mehrachsig belastete Laminatstrukturen optimal auszulegen. Auch die Grenzen des fasergerechten Entwurfs mit Mehrschichtverbunden werden aufgezeigt.

## 1. THEORETISCHES UND REALES VERHALTEN

Wenn bei der Auslegung einer dünnwandigen Faserverbundstruktur die Festigkeiten abgeschätzt werden sollen, wird im Allgemeinen auf die Faserdaten des Herstellers zurückgegriffen und mit den verfügbaren Steifigkeiten eine Verformungsanalyse durchgeführt. Aus den Verschiebungen des Berechnungsmodells bzw. aus den Knotenverschiebungen einer FE-Lösung wird linear auf die Dehnungen geschlossen und mit dem ebenen Spannungsmodell der klassischen Schichtentheorie (CLT) die Spannungen berechnet. Diese werden dann mit den ertragbaren Spannungen verglichen, die sich nach der Mischungsregel aus den Faserdaten ergeben.

Spätestens zu diesem Zeitpunkt wird offensichtlich, dass die im Versuch am Faserstrang realisierten Bruchspannungen deutlich unter den mit der Mischungsregel ermit-

telten theoretischen Bruchspannungen liegen (TAB 2), selbst bei Vernachlässigung der Matrix.

In MPa	T300/ LY556	T800/ LY556	M40- My750/ Hy917
Faserfestigkeit	3100	5500	2500
Harzschubfestigkeit	56	62	52
Verbundfestigkeit ®	2005	3335	1573
Verbundf., Messung	1620	2680	900
MSV-Festigkeit	(80,8%)	(80,4%)	(57,2%)

TAB 1. Theoretische und gemessene Verbundfestigkeit<sup>1</sup>

Werden also in der Folge nicht die Faserdaten benutzt, sondern auf die bei Versuchen ermittelten Strangfestigkeiten (unidirektonaler Faserstrang mit einem üblichen Faservolumenanteil von 60%) zurückgegriffen, ist damit die Erwartung verbunden, zu einer realistischen Bauteilauslegung zu kommen.

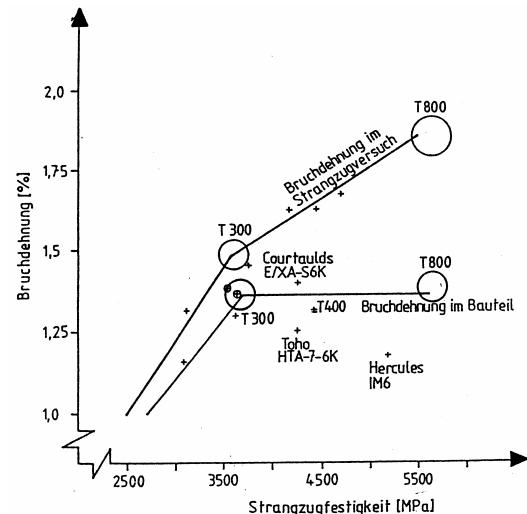


Bild1. Erreichbarer Ausnutzunggrad der Faserfestigkeit.

Hierzu sind von Schülein et.al<sup>1</sup>. Untersuchungen gemacht worden (Bild.1). Hier zeigte sich, dass die höhere Festigkeit der T800-Faser gegenüber der T300-Faser nicht im Bauteil ausnutzbar war, weil sich keine höhere Bruchdehnung erzielen ließ. Im Druckbereich zeigten sich gegenüber der T300-Faser sogar schlechtere Werte.

Bislang gibt es keine Erklärungen für die Diskrepanzen zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlich

realisierten Leistungswerten, Fasern und Faserstränge betreffend bzw. Faserstränge und Bauteile.

## 2. REDUZIERTE MODELLE

Mit der Anwendung reduzierter Modelle ist stets das Ziel verbunden, den Berechnungsaufwand zu verringern. Das Feldproblem mit unendlich vielen Freiheitsgraden überführt man durch die Reduktion in ein Modell-Problem, welches sich mit einer begrenzten Zahl von Parametern beschreiben lässt. Dazu ist eine Modellbildung notwendig, die der Realität möglichst nahe kommt. Was bei einem dreidimensionalen Körper mit beliebigen Belastungsverteilungen problematisch wäre, erscheint dann möglich, wenn die Dimensionen des Körpers unterschiedliche Größenordnungen haben. Wenn die Dicke mehr als 100mal geringer ist als die Erstreckung in der Fläche, wird davon ausgegangen, dass die Eigenschaften in Dickenrichtung beim Berechnungsproblem keinen großen Einfluss haben und die Verteilungen der Spannungen und Dehnungen durch integrale Größen ersetzt werden können. Dies hat zur Entwicklung der bekannten ebenen Formänderungsmodelle geführt, wobei das Spannungsmodell heute allgemein angewendet wird. Beim ebenen Spannungsmodell ist die unbekannte Kinematik durch die Annahme eines eben bleibenden Querschnitts festgelegt, beim ebenen Dehnungsmodell sind die Annahmen komplementär. Bei der Berechnung dünnwandiger Laminatstrukturen ist das ebene Spannungsmodell unverändert übernommen worden. Die klassische Schichtentheorie (CLT) basiert ebenso wie die Schubdeformationstheorie erster Ordnung (FSDT) auf integralen Querschnittsgrößen. Um die Deformation eines Bauteils zu beschreiben, ist dies eine ausreichende und zweckmäßige Modellbildung. Aus den integralen Dehnungen (diese sind nicht mit den in der Elastizitätstheorie definierten Tensorgrößen identisch) und den Kraftflüssen als dem Integral über die im Querschnitt vorhandenen Spannungsverteilungen lassen sich jedoch nicht die Verteilungen der Tensorfeldgrößen berechnen. Das heißt, das Festigkeitsproblem bei anisotropen Schichtverbunden, welches eine Kenntnis der Spannungsverteilungen voraussetzt, kann auf der Integrationsebene der Kräfte und Verschiebungen nicht beantwortet werden. Die integralen Dehnungen sind der Verschiebungsebene zuzuordnen.

Da in Modellen stets direkte Beziehungen zwischen den Kräften an den Rändern und den inneren Kräften bestehen, bleibt das Eigenverhalten unberücksichtigt.

## 3. DAS EIGENVERHALTEN

In der Elastizitätstheorie findet sich diese direkte Abhängigkeit zwischen inneren und äußeren Zustandsgrößen nicht. Vielmehr wird das Körperverhalten durch Bedingungen bestimmt, die in jedem Punkt des deformierten Kontinuums gelten. Im Modell hingegen werden die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten Gesamtkörper mit endlichen Abmessungen erfüllt. Die Beziehungen für Teile dieses Körpers sind dieselben wie für den Gesamtkörper. Dass die realen Verhaltenseigenschaften auf diese Weise nicht erfasst werden können, wird bei der Betrachtung eines deformierten Probenkörpers deutlich (Bild 2).

Die Resultierenden der Kräfte im Inneren des deformierten Körpers können nicht mit den Kräften in der Einspannung ins Gleichgewicht gebracht werden, weil sie eine andere Wirkrichtung haben. Die Spannungstrajektorien und die Verzerrungstrajektorien fallen nicht zusammen.

Damit liegen die auslösenden Kräfte und die Reaktionen nicht auf derselben Wirkungslinie. Das Prinzip des Gleich-

gewichts der Kräfte, das auf der Linienflüchtigkeit der Kräfte und Reaktionen beruht, ist im verformten Körper nicht mehr anwendbar. Für den verformten Körper lässt sich kein Modell definieren.

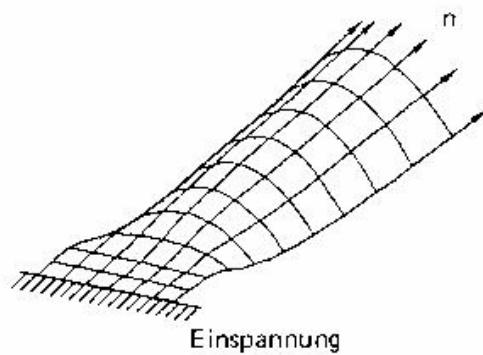


Bild 2. Deformation einer unsymmetrischen Probe

Das Gleichgewicht in den Gleichungen der Elastizitätstheorie besteht nicht im Gleichgewicht von Kraftgrößen – weder in der Spannungsebene noch in der Ebene der Spannungsresultierenden- sondern im Gleichgewicht der Änderungen der Feldgrößen in einem Punkt des Kontinuums. Die Gleichungen haben die Form der Divergenz eines Tensorfeldes.

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned}$$

Werden die Bedingungen des ebenen Spannungszustands bei Membranbelastung auf Gleichung 1.1 angewendet, ergibt sich ein triviales Nullsystem. Um die physikalische Ursache für die Eigenspannungen und Eigendehnungen zu verdeutlichen, soll die Wirkung einer Kraft während der Deformation betrachtet werden.

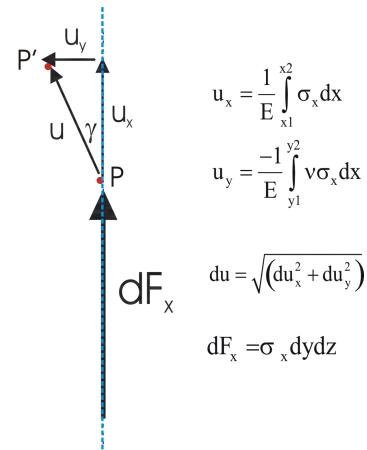


Bild 3. Die Verschiebungskinematik der Querkontraktion

Ein Körperpunkt eines isotropen Körpers wird nicht nur in

Richtung der Kraft um  $u_x$  verschoben, sondern gleichzeitig im Verhältnis der Querkontraktion um einen Betrag  $u_y = vu_x$  quer dazu. Dieses seitliche „Abgleiten“ resultiert aus mikromechanischen Vorgängen und findet auch in der x-z-Ebene gleichfalls statt. Das Verhältnis der Querverschiebung zur Verschiebung in Kraftrichtung wird als Materialkonstante behandelt (Poissonkonstante). Mit der Verschiebung des Punktes P in Richtung P' entsteht ein Schubwinkel. Im konstitutiven Modell ist kein Schubwinkel vorgesehen. Damit lassen sich im Modell Längsdehnungen von Schubdehnungen entkoppeln.

Im konstitutiven Modell des anisotropen Schichtverbundes wird die Beziehung zwischen den Quer- und Längsverschiebungen in gleicher Weise behandelt, obgleich sie physikalisch nicht gleichwertig ist. Im 2D-Modell ist eine Abhängigkeit von Quer- zu Längsdehnung definiert, die aber keinen direkten Bezug zum physikalischen Vorgang hat, welcher der Querkopplung zugrunde liegt.

Die in Bild 3 auftretenden Querkomponenten sind Schubkomponenten und betreffen die Gestaltänderung des Körpers. Sobald also eine Querkopplung (Querkontraktion) existiert, erfährt der Körper auch eine Schubverformung. Diese wird als Wölbverformung bezeichnet. Sie wird gegenüber den im Modell definierten Verschiebungsformen gesondert behandelt, sie betrifft jedoch die Gestaltänderung des deformierten Körpers.

Die Verwölbung ist eine direkte Funktion des Kopplungsverhaltens. Dies wird durch die Koeffizienten im Materialgesetz beschrieben, die außerhalb der Diagonale stehen. Im Materialgesetz für eine anisotrope Einzelschicht sind neben der Querkopplung weitere Schubkopplungen enthalten (Bild 4), die weitaus stärker sind als die Querkopplung. Sie beziehen sich auf die Kopplung zwischen Normal- und Schubdehnungen und können bei bestimmten Faserwinkeln mehr als eine Größenordnung größer sein als die isotrope Querkopplung. Da es sich bei den Formänderungsmodellen um konstitutive Modell-Beziehungen handelt, also nicht um physikalische Beziehungen, müssen Plausibilitätskriterien angewendet werden, um die physikalische Zulässigkeit des Modells zu überprüfen.

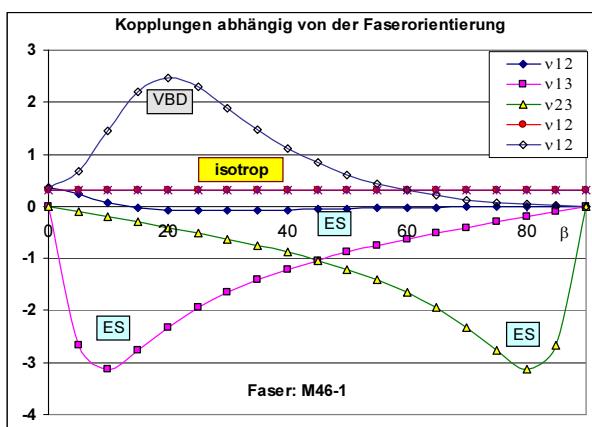


Bild 4. Anisotrope Kopplungen als Funktion der Faserorientierung.

Für die Volumenänderung eines elastischen Körpers gilt zum Beispiel, dass die Volumendilatation einen positiven Wert zwischen 0 und 1 haben muß, damit eine Kraft keine negative Formänderungsarbeit leistet. Für die Volumendilatation eines Winkellaminats lassen sich jedoch mit der CLT Werte berechnen<sup>2</sup>, die wegen der extremen Querkontraktion kleiner als -1,5 sind, was eine negative Formände-

rungsarbeit bedeutet. Das Modell beschreibt also einen Zustand, der physikalisch nicht möglich ist<sup>2</sup>.

#### 4. FELDGRÖSSEN UND MODELLKINEMATIK

Hier wird das grundsätzliche Problem angesprochen, ob ein Modell mit Ansätzen bzw. Annahmen für die Verteilungen der Zustandsgrößen (Spannungen oder Dehnungen), die in der allgemeinen Elastizitätstheorie (Euler; Cauchy, de St.Venant) als Tensorfeldgrößen definiert sind, die Ermittlung der Spannungsverteilungen im belasteten und deformierten Kontinuum ermöglichen kann. Nach dem Eindeutigkeitssatz von Kirchhoff, nach dem das elastomechanische Problem nur eine Lösung hat, kann es nicht sein, dass die Verteilungen der Feldgrößen von der gewählten Ansatzform abhängen. Ein Beispiel für Plattenlösungen zeigt, dass ansatzbasierte Lösungen nicht dem Eindeutigkeitsprinzip entsprechen (Bild 5).

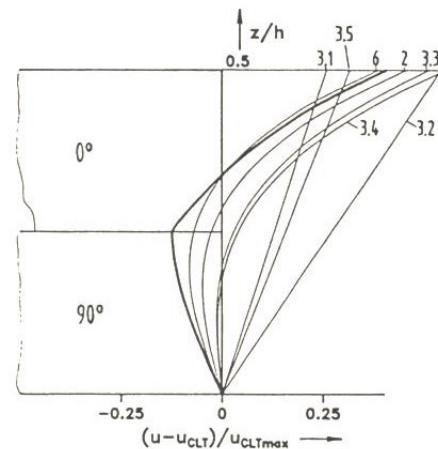


Bild. 5: Plattenlösungen nach verschiedenen Theorien<sup>3</sup>

##### 4.1. Formänderungen auf dem Kraft-Weg-Pfad

Das Gleichgewicht in den Punkten 1 und 2 auf der Kraft-Weg-Kurve (Bild 6) wird durch das jeweilige Kräftegleichgewicht und durch die Gleichgewichtslage des deformierten Körpers beschrieben, wobei die Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen durch das Materialgesetz festgelegt sind. Der an sich komplexe Übergang von einem Gleichgewichtszustand 1 in einen anderen Gleichgewichtszustand 2 wird in einer 2D-Darstellung des Kraft-Weg-Verlaufs stark vereinfacht dargestellt, wobei ein Punkt auf der Kraft-Weg-Kurve einen statisch und

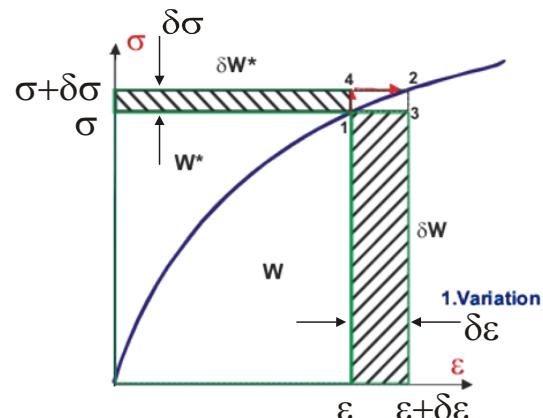


Bild. 6. Gleichgewichtslagen auf dem Kraft-Weg-Pfad

kinematisch verträglichen Zustand des deformierten elastischen Systems anzeigen. Wenn hier die erste Variation in Form eines Rechtecks angedeutet wird, handelt es sich tatsächlich um die Variation aller Feldgrößen, welche die statischen und kinematischen Bedingungen in jedem Punkt des Kontinuums erfüllen müssen.

Das Arbeitsgleichgewicht (Energiegleichgewicht) für die äußeren Kräfte und die inneren Reaktionen gilt nur für einen statisch und kinematisch verträglichen Zustand.

$$\delta(A_a - A_i) = 0$$

Dieser Zustand ist in den Punkten 1 und 2 auf der Kraft-Weg-Kurve gegeben und auf dem Kurvenzug zwischen diesen Punkten. Der Übergang von einer Gleichgewichtslage 1 zu einer benachbarten Gleichgewichtslage 2 ist mit der ersten Variation des Potentials nach einer Feldgröße nicht möglich, weil die andere Feldgröße nicht mit variiert wird. Es wird zwar eine Gleichgewichtslösung erreicht, aber kein kinematisch verträglicher Zustand bzw. eine kinematisch verträgliche Lösung, die nicht statisch verträglich ist.

## 4.2. Die zweifache Variation

Wenn die erste Variation zu einer verträglichen Lösung führen würde, müssten die mit der Deformationsmethode und mit der Kraftmethode erzielten Lösungen exakt übereinstimmen. Die auftretenden Diskrepanzen zwischen den Lösungen beider Verfahren haben zu erheblichen Anstrengungen geführt, gemischte und hybride Verfahren zu entwickeln. Letztlich hat sich jedoch die Deformationsmethode durchgesetzt, die sich nur auf die erste Variation beschränkt. Die Verschiebungsansätze machen die kinematischen Variablen zu Bestimmten.

Das auftretende Problem soll an einem Beispiel erläutert werden. Bei der FE-Berechnung eines dünnwandigen Flächentragwerks werden mit Elementen, die auf einem reduzierten ebenen Modell beruhen (CLT, FSDT) die Knotenverschiebungen des Tragwerks ermittelt. Wenn die Lösungen einer FE-Rechnung mit CLT-Ansätzen vorliegen, ergibt ein an beliebiger Stelle geführter virtueller Schnitt in der Regel eine Klaffung. Das Kontinuumsprinzip lässt solche Klaffungen im verformten Körper nicht zu. Die Dehnungen müssen einen kontinuierlichen Verlauf über die Schnittgrenzen hinweg haben und die Schnittkräfte in den Schnittufern müssen nach dem Wechselwirkungsgesetz gleich groß sein. Wenn Klaffungen in den Dehnungen auftreten, treten auch ungleiche Schnittkräfte auf und umgekehrt. In Bild 7 sind die Klaffungen in den Spannungsverteilungen aufgrund einer Klaffung im Dehnungszustand dargestellt. Diese müssen geschlossen werden, indem die Verteilungen so variiert werden, dass sie bezüglich des virtuellen Schnitts einen verträglichen Zustand liefern. Die Verträglichkeit ist dann gegeben, wenn die mit den Spannungsverteilungen über das Materialgesetz

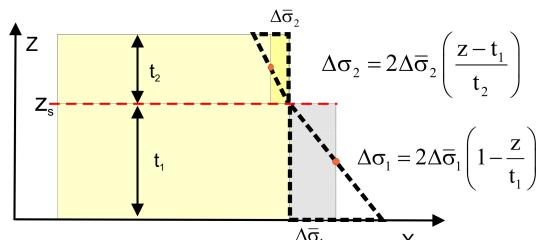


Bild. 7. Gleichgewichtsspannungen auf dem Kraft-Weg-Pfad

verknüpften Dehnungsverteilungen in der virtuellen Schnittfläche eine gemeinsame Spur haben.

Die Formänderungsarbeit darf sich wegen des Energieerhaltungsgesetzes dabei nicht ändern.

Die Erfüllung der inneren Randbedingungen in Form des kinematischen Zusammenhangs der deformierten Schnittkörper (Theorie II. Ordnung) führt zu Gradienten der Spannungskomponenten, die der Ausgangslösung überlagert werden müssen, unter der Voraussetzung des Superpositionsge setzes. Dabei gilt das Prinzip, dass die Überlagerung von Gleichgewichtslösungen zu einer neuen Gleichgewichtslösung führt und dass die Überlagerung kinematisch kompatibler Zustände zu einer kinematisch verträglichen Lösung führt. Die Gradienten von drei Schnittgruppen sind für  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  in Bild 8 dargestellt.

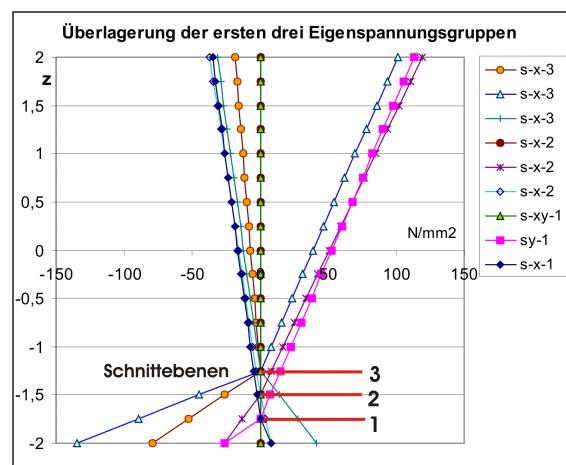


Bild. 8. Überlagerete kompatible Spannungsgruppen

## 4.3. Spannungen im deformierten Körper

Die sich ergebenden Spannungsverteilungen weichen deutlich von denen ab, die mit dem 2D-Element berechnet wurden. Im Gegensatz zu diesem werden hier die kinematischen Randbedingungen der Zustandsgrößen in Dickenrichtung erfüllt. Im 2D-Element können Randbedingungen in Dickenrichtung gar nicht definiert werden, weil außerhalb der Bezugsfläche keine Variablen definiert sind. Mit dem 2D-Modell wird der Körper als Fläche idealisiert, Variable sind nur in den Punkten der Fläche definiert. Für ein zugbelastetes symmetrisches und ausgeglichenes Winkellaminat mit einem Schichtaufbau [+45, -45]s ergeben sich bei einachsigem Zug die Dehnungsverteilungen entsprechend Bild 9 im Vergleich mit der CLT.

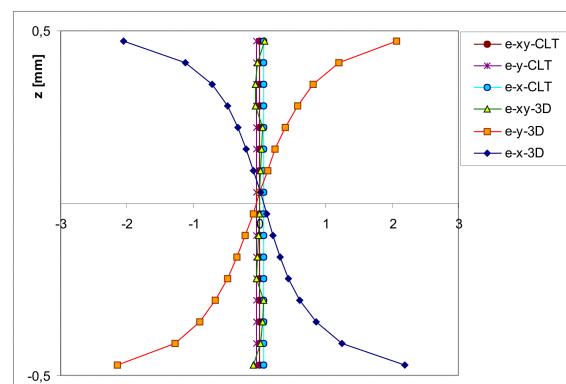


Bild. 9. Dehnungsverteilungen im Winkellaminat

Im Vergleich dazu wird die FE-Lösung<sup>2</sup> mit natürlichen Kraftrandbedingungen in Bild 10 gezeigt.

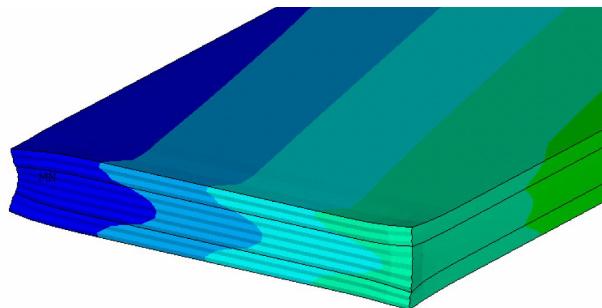


Bild. 10. Verwölbter Querschnitt im Winkellaminat

Der Wölbzustand am Rand des Laminatkörpers ist gut zu sehen. Jeder Verschiebung auf der einen Symmetrieseite ist eine gegensinnige Verschiebung auf der anderen Seite zugeordnet. Im 2D-Modell ist kein Eigenverhalten erfasst. Daher sind die Dehnungen im gesamten Querschnitt konstant. Der Spannungsverlauf stellt sich im deformierten Körper ähnlich dar (Bild 11). Man beachte die gegenüber der 2D-Schichtentheorie stark veränderten Verhältnisse. Der Verlauf der Schubspannungen zeigt ebenfalls den Einfluß der Wölbkräfte.

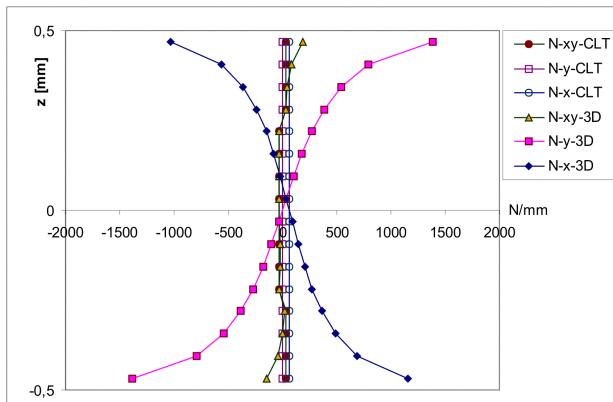


Bild. 11. Spannungsverteilungen im Winkellaminat (CLT,3D)

Die Spannungsverteilungen zeigen sehr anschaulich die Bedingungen für die Spannungsgradienten in den Punkten des deformierten Querschnitts (Gl.1.1). Wenn ein Gradient sehr klein ist, kann aus der Gleichgewichtsbeziehung direkt abgeleitet werden, dass die beiden verbleibenden Spannungsgradienten einen gegenläufigen Verlauf haben müssen. Dies entspricht den elementaren Betrachtungen der Balken- bzw. Plattenbiegung, die auf eine antiklastische Biegeverformung in Querrichtung hinweist. Zum Vergleich sollen die Dehnungs- und Spannungsverteilungen im zugbelasteten ANISO-Laminat mit dem Aufbau [0<sub>2</sub>/+45/0<sub>2</sub>/-45/0/90]<sub>s</sub> gegenübergestellt werden (Bilder 12 und 13). Der Körper weist eine starke Schubverformung in der y-z-Ebene auf, was an den Dehnungsverteilungen erkennbar ist. Bei den Spannungsverteilungen ist der Einfluss der sprunghaften Änderungen der Steifigkeiten im Laminatquerschnitt zu sehen. Die Spannungsgradienten haben auch hier eine deutlich gegenläufige

Tendenz.

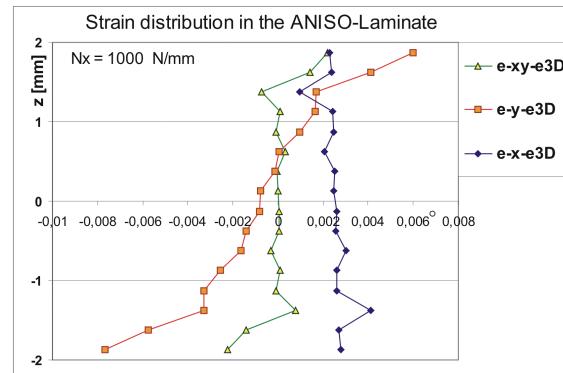


Bild. 12. Dehnungsverteilungen im ANISO-Laminat

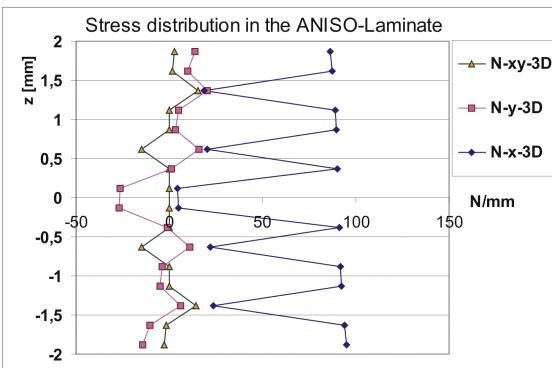


Bild. 13. Spannungsverteilungen im ANISO-Laminat

## 5. QUERSCHUBSPANNUNGEN

Die örtlichen Querschubspannungskomponenten ergeben sich aus der Integration über die Spannungsverteilungen von den freien Rändern bis zum Ort des virtuellen Schnitts. Das Gleichgewicht der Schubspannungen erfordert, dass die Integration in beiden Schnittufern denselben Spannungswert ergibt. Das gilt ungeachtet der unterschiedlichen Verteilungen beidseits der Schnittfläche. Da die berechneten Größen Komponenten eines Spannungsvektors sind, muss die Resultierende berechnet werden. Der Verlauf der Querschubresultierenden zeigt die Querschubbeanspruchung im Querschnitt des Laminats an, die interlaminaren Schubreaktionen (Bild 14).

$$(1.2) \quad \tau_{\text{Res}} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{xy}^2}$$

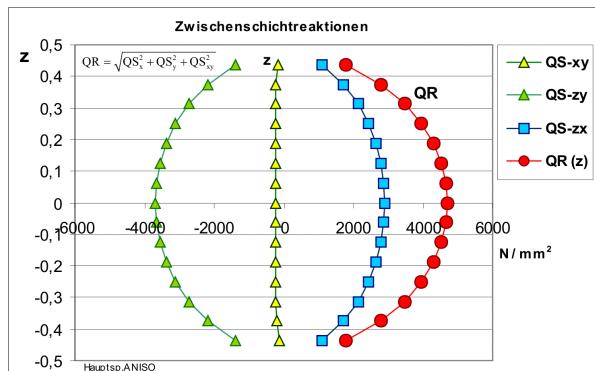


Bild. 14. Interlaminare Spannungen im Winkellaminat

Trotz der divergierenden Spannungsverteilungen (Bilder 11,13) ergibt sich bei der Integration der vertraute parabolische Verlauf, der von der Anwendung der Kusinenformel her bekannt ist. Zahlreiche Rechnungen haben ergeben, dass bei einachsig belasteten symmetrischen Laminaten immer eine ähnliche parabolische Verteilung zu erwarten ist, bei Überlagerung weiterer Beanspruchungskomponenten ergibt sich jedoch ein stark veränderter Verlauf.

### 5.1. Die Wirkung von Querschubspannungen

Da die Querschubspannungen im gesamten Volumen des deformierten Körpers verteilt sind, müssen ihre Wirkungen auch an Schäden erkennbar sein, wenn die Schubspannungen die Festigkeitsgrenzen übersteigen. Bei thermischer Zyklierung wurden schon frühzeitig flächige Rissbildungen beobachtet. Aber diese wurden als Spezialfall angesehen, weil in diesem Fall die Wirkung von Eigenspannungen vorausgesetzt wurde.

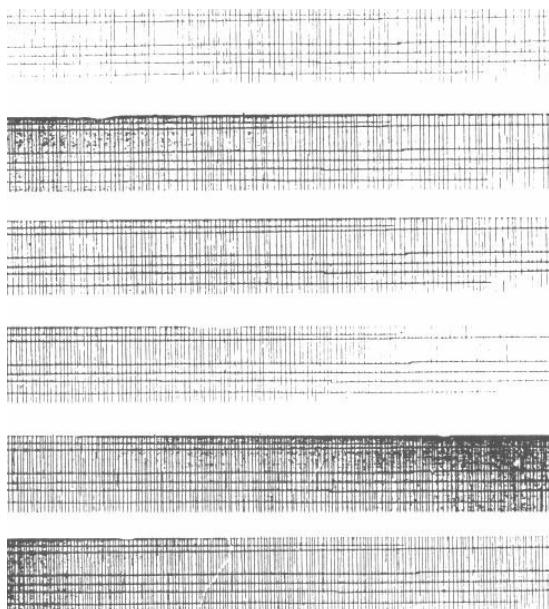


Bild. 15. Rissbildungen in einer  $[0_4, 90_4, 0_4]$ -Zugprobe mit zunehmender Lastwechselzahl  $2 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^6$

Eigenspannungen infolge mechanischer Belastung wurden ausgeschlossen und waren in den 2D-Modellen auch nicht vorgesehen. Hierzu gibt es jedoch Untersuchungen, die an Ermüdungsproben eines 12-schichtigen symmetrischen Laminats durchgeführt worden sind<sup>4</sup>. Die fortschreitende Zerrüttung der Matrix in einer Probe aus T300 / 914C mit dem Aufbau  $[0_4, 90_4, 0_4]$  bei  $R = -1$  bei einer oberen Spannung von  $800 \text{ N/mm}^2$  äußert sich in zunehmender Dichte der Querrisse (Siehe Kap.5.5).

Mit zunehmender Lastwechselzahl wächst die Rissdichte und die Schädigungen wachsen zusammen. Angesichts des vorhandenen orthotropen Laminataufbaus ohne Winkelkästen können keine großen Querschubspannungen vermutet werden. Umso interessanter sind die vorliegenden Versuchsergebnisse, weil sie zeigen, dass Querschubspannungen allgemein auftreten und nicht auf Sonderfälle zurückzuführen sind.

### 5.2. Abhängigkeit von anisotropen Kopplungen

Für jeden deformierten elastischen Körper können Querschubspannungsverteilungen und Wölbdehnungen berechnet werden. Bei überlagerten Lastfällen bzw. mehrachsigen Beanspruchungen überlagern sich die Querschubspannungen, die durch die Einzelwirkungen verursacht sind entsprechend dem Satz von CLAPEYRON. Um einen Eindruck zu vermitteln, wie sich die anisotropen Kopplungen dabei auswirken, sind die Querschubspannungsverteilungen in einem einachsig belasteten Körper

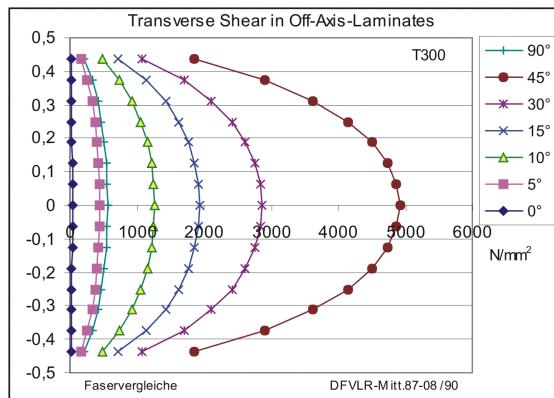


Bild. 16. Querschubspannungen bei Off-Axis-Faserorientierungen

(Einzelschicht) für verschiedene Faserorientierungen aufgetragen (Bild 16). Bei der  $45^\circ$ -Orientierung ergeben sich die größten Querschubspannungen, während sie bei der  $0^\circ$ -Orientierung nahezu (aber nicht ganz!) verschwinden. Der letztgenannte, scheinbar belanglose Sonderfall soll nun näher beleuchtet werden, denn er betrifft die Verhältnisse in Fasersträngen.

### 5.3. Abhängigkeit von den Fasereigenschaften

Es besteht die verbreitete Annahme, dass in einem in Belastungsrichtung ausgerichteten Faserstrang keine Querschubspannungen vorhanden sind. Dies ist jedoch keineswegs der Fall. Zwar sind die Schubspannungen im Vergleich ziemlich klein, jedoch bewirken sie, dass in keinem Fall die nach der Mischungsregel berechnete Faserfestigkeit erreicht wird<sup>1</sup> (Siehe Kap.1). Mit den Schubspannungen wird ein Versagensmodus wirksam, der nicht durch die Faserfestigkeit bestimmt ist, sondern durch die Festigkeitsgrenzen des Bettungsmaterials (Bild 17). Bei den Fasertypen T300 und T800 wurden bei den gemessenen Bruchspannungen die Harzschubfestigkeiten (TAB 1) erreicht oder überschritten, wie die Rechnung an einem zugbelasteten  $0^\circ$ -Laminat ergab. Bei den hochsteifen Fasertypen ergab sich diese gute Korrelation jedoch nicht.

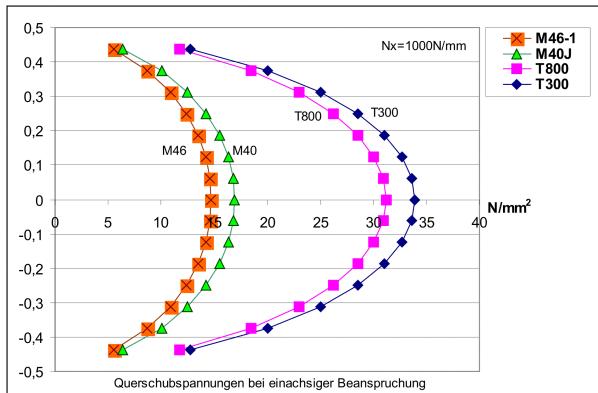


Bild. 17. Querschubspannungen im  $0^\circ$ -Laminat

#### 5.4. Der Einfluß der Schichtenfolge

Der Einfluß der Schichtenfolge ist derart komplex, dass die Abhängigkeiten nicht an wenigen einfachen Beispielen erläutert werden können. Schon bei der Auswahl der Versuchspuren, die im Rahmen der Schadensmechanik im Institut für Strukturmechanik untersucht werden sollten, ergab sich wegen des extrem großen Aufwandes die Schwierigkeit, typische und verallgemeinerbare Beispiele zu finden. Aufgrund der Erfahrungen, die mit Rechnungen mittlerweile gewonnen werden konnten, wird diese Schwierigkeit verständlich.

Da angesichts der unbekannten Zusammenhänge bezüglich des Eigenverhaltens und der vorherrschenden Auffassung, man müsse in jeder zu erwartenden Belastungsrichtung Fasersteifigkeiten- und Festigkeiten anordnen, aussagekräftige Beispiele schwer zu definieren waren, wurden ein quasi-isotropes Laminat (QUASI) und ein mehr nach akademischen Gesichtspunkten gewähltes faserdominiertes Laminat (ANISO) untersucht.

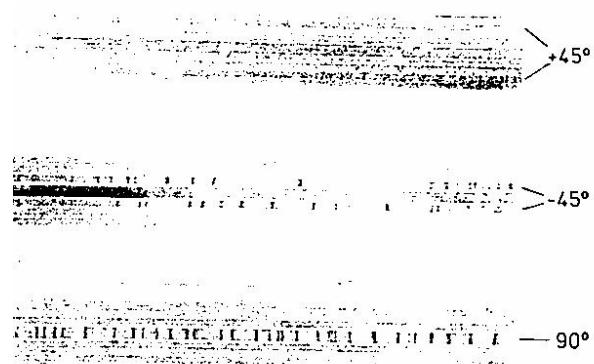
$$[0_2/+45_2/-45_2/90_2]s = \text{ANISO}$$

$$[0_2/+45_2/-45_2/90_2]s = \text{QUASI}$$

Auf das ANISO-Laminat wurde bereits in den Bildern 12 und 13 eingegangen.

#### 5.5. Matrixrisse und Dehnungskriterium

Im Querschnitt des ANISO-Laminats zeichnete sich mit zunehmender Lastwechselzahl ein Rissmuster mit in Dickenrichtung unterschiedlich verteilter Rissdichte ab. Die Anzahl und die Dichte der Risse sind abhängig vom Lastniveau und der Lastwechselzahl. In Bild 18 ist die Auswertung der Rissdichte dargestellt. In den außen liegenden  $+45^\circ$ -Schichten ist die Rissdichte deutlich geringer als in den weiter innen befindlichen  $-45^\circ$ -Schichten.



Specimen N: 903 / 3

Stacking sequence  $[0_2,+45_2,-45_2,0_2,90_2]s$

Loading:  $400 \text{ N/mm}^2$ ,  $R = -1$ ,  $8 \cdot 10^5 \text{ L.C.}$

Bild. 18. Rissverteilungen im ANISO-Laminat

Dies ist ein deutlicher Hinweis auf die Verteilungen der Querschubspannungen entsprechend Bild 14. Die Wirkung der Querschubspannungen hat zu einer zunehmenden Zerrüttung der Matrix geführt.

Die Rißbildung ist neben dem Belastungsniveau und der Lastwechselzahl von der Schichtenfolge und den Faserwinkeln in den Einzelschichten abhängig, abgesehen vom Fasermaterial und den Eigenschaften des Harzes sowie den Bindungen zwischen diesen. Die Vielfalt der Abhängigkeiten macht es unmöglich, die typischen Einflüsse auf wenige anschauliche Beispiele zu reduzieren.

In Bild 19 ist der Verlauf der Querschubspannungen im ANISO-Laminat schematisch eingezeichnet.

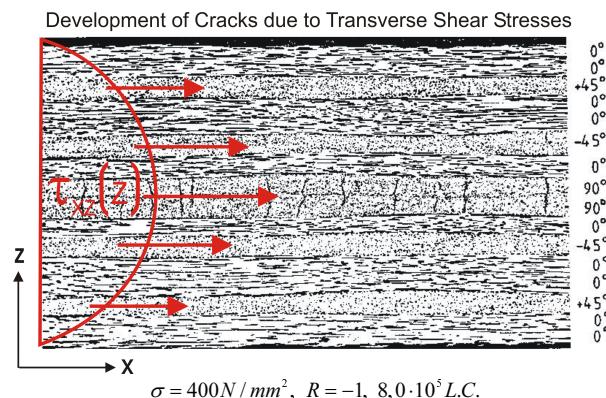


Bild. 19. Querschubspannungen im ANISO-Laminat<sup>6</sup>

In Bild 20 ist der Mechanismus der Querschubspannungen und ihrer Wirkung ebenfalls schematisch dargestellt. Die Schubspannungen verursachen Risse sowohl quer durch die Einzelschichten wie auch in den Grenzflächen zwischen den Schichten. Während die Schichtrisse bis zur nächsten Grenzfläche laufen, können sich die Risse in den Grenzflächen unbehindert ausbreiten. Wenn sie zusammenwachsen, findet eine Ablösung in der Grenzschicht statt, die sich zur großflächigen Delamination ausweiten kann.

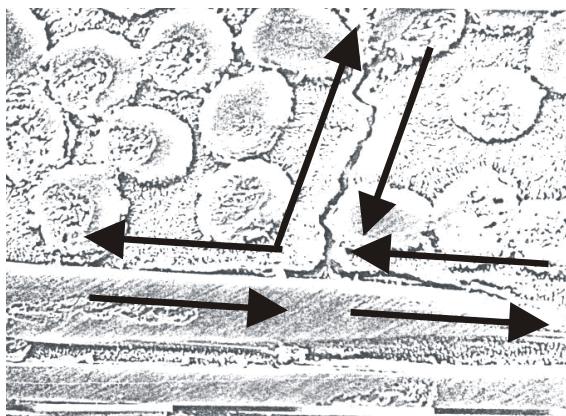


Bild. 20. Querschubmechanismus und Rißentstehung

Mit der Trennung in Teilschichten verändert sich das gesamte Strukturverhalten und in der Regel kann der Körper die ursprüngliche Aufgabe nicht mehr erfüllen. Unter Betriebslasten ist die Rissbildung meistens erkennbar und sollte auch hinsichtlich der drohenden Delaminationsgefahr entsprechend bewertet werden. Um die Wahrscheinlichkeit von Delaminationen herabzusetzen, werden die Dehnungen in der Struktur empirisch begrenzt, indem Grenzen für die zulässigen Dehnungen festgelegt werden. Da dies bei einer 2D-Modellierung nur mit integralen Dehnungen geschehen kann, ist diese Verfahrensweise äußerst ungenau. Die obigen Beispiele zeigen, dass die integralen Dehnungen kein brauchbarer Indikator für die tatsächlichen Spannungsverteilungen sein können. Diese hängen in hohem Maße davon ab, welche anisotropen

Kopplungen im Laminatquerschnitt vorhanden sind.

## 5.6. Der Einfluß der Faserorientierung

Die Ergebnisse der umfangreichen Arbeiten auf dem Gebiet der Schadensmechanik sind in Bergmann et.al.<sup>4</sup> niedergelegt. Bei statischen Versuchen an Laminatproben mit unterschiedlichem Schichtenaufbau (Schichtfolge und Faserorientierung) wurde eine starke Abhängigkeit der Bruchfestigkeit (Laminat-Bruchfestigkeit) von der Probenbreite beobachtet<sup>4</sup>. Die Bruchspannungen sind als Laminatspannungen definiert und haben daher keinen Zusammenhang mit den im Laminatkörper vorhandenen realen Spannungsverteilungen. Die Versuche wurden ebenfalls mit den Laminaten QUASI und ANISO durchgeführt, mit unterschiedlichem Matrix- und Fasermaterial.

Auffällig sind die unterschiedlichen Abhängigkeiten im Vergleich. Schon bei Zugbelastung ergibt sich ein großer Festigkeitsunterschied, wenn bei gleichem Fasermaterial (T800) unterschiedliche Matrixsysteme Verwendung finden. Dies deutet darauf hin, dass der Einfluß der Matrix auf die Festigkeit sehr viel größer ist als es die Mischungsregel ergibt (Kap.5.3). Der Vergleich (Bild 21) der beiden Laminaten mit Epoxidharz zeigt ein Festigkeitsverhältnis ANISO/QUASI von 2,6 bei Zug- und von 3 bei Druckbelastung für kleine Probenbreiten. Bei Verwendung des Bis-maleimidharzes ergibt sich entsprechend das Verhältnis von 3 bei Zug- und von 2 bei Druckbelastung, mit Polyimidharz von 2,4 und 1,7.

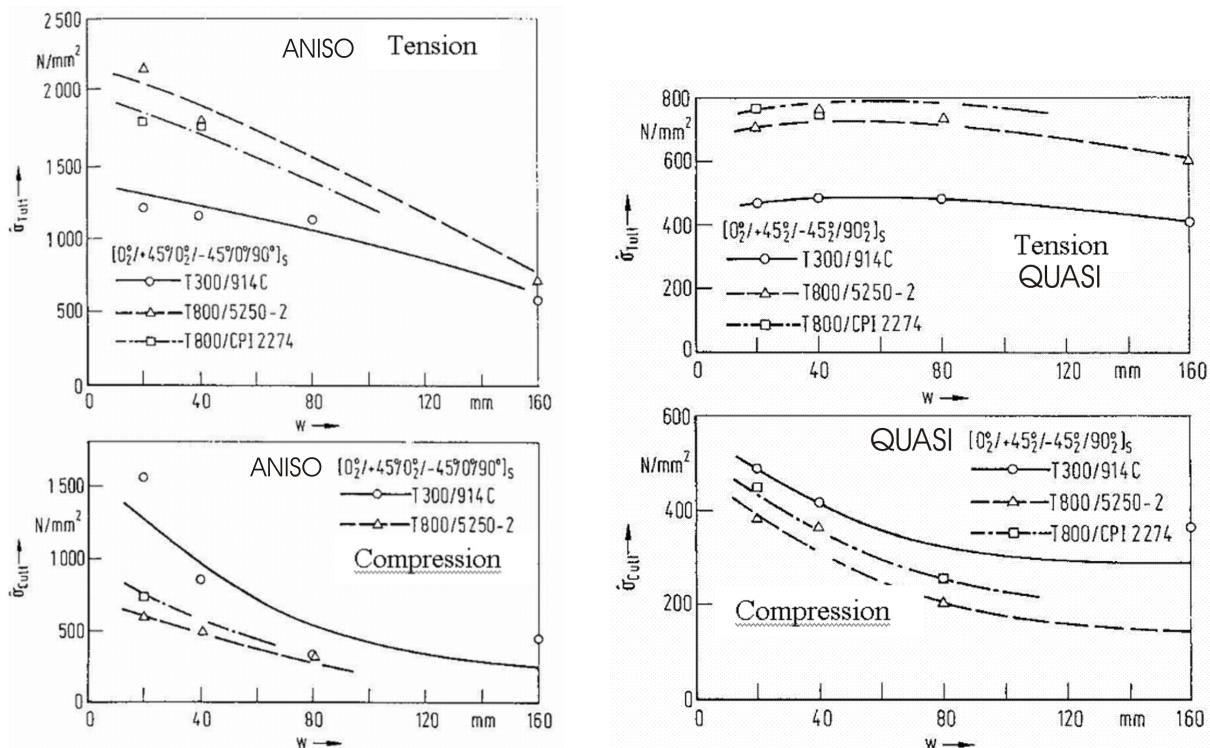


Bild 21. Bruchspannungen in den Laminaten **ANISO** und **QUASI** in Abhängigkeit von der Probenbreite [DLR 92].

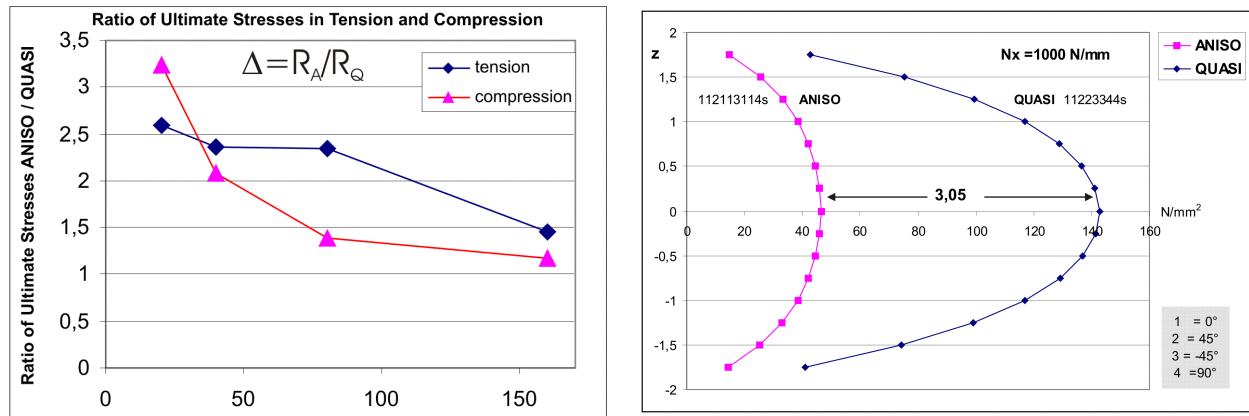


Bild 22. Korrelation der gemessenen Bruchspannungen mit den gerechneten Querschubspannungen. Die Querschubspannungen müssen dabei mit den Ergebnissen bei geringer Probenbreite verglichen werden.

Die in Bild 22 rechts gezeigten gerechneten Querschubspannungsverteilungen in den beiden verglichenen Laminaten weisen nahezu dasselbe Verhältnis (3,05) auf wie die gemessenen Bruchspannungen der schmalen Proben. Mit zunehmender Probenbreite tritt bei beiden Laminaten ein massiver Einbruch in den Bruchspannungen auf. Die Gradienten sind jedoch unterschiedlich groß.

Der starke, aber unterschiedliche Abfall der Festigkeiten mit wachsender Probenbreite macht deutlich, dass auch in der Fläche Wölbspannungen vorhanden sind. Diese sind jedoch hier nicht der Gegenstand der Untersuchung, denn es wurde davon ausgegangen, dass die eingeprägten Kräfteverteilungen in der Fläche bereits bekannt bzw. ausreichend genau berechnet sind. Der Breiteneffekt macht deutlich, dass auch in der Fläche eine zweite Variation durchgeführt werden muss.

Der Festigkeitsabfall ist beim QUASI-Laminat weniger stark ausgeprägt als beim ANISO-Laminat. Den Grund dafür kann nur die Berechnung der Wölbspannungen in der Fläche liefern. Die Abhängigkeit der gemessenen Bruchspannungen von der Probenbreite wird als ‚Breiteneffekt‘ bezeichnet.

## 6. VERSAGEN DURCH SCHUBSPANNUNGEN

### 6.1. Warum ist ein Rotorblatt ermüdungsfrei?

In Bild 23 ist die Abhängigkeit der Bruchspannungen von der Anzahl der Lastwechsel aufgetragen<sup>5</sup>. Während das unidirektionale 0°-Laminat mit zunehmender Lastwechselzahl nur wenig abfällt, ist bei den multidirektionalen Laminaten ein deutlicher Einbruch in der Ermüdungsfestigkeit erkennbar. Wenn starke Schubkopplungen im Verbund durch Off-Axis- Orientierungen vorhanden sind, ist der Festigkeitseinbruch besonders groß.

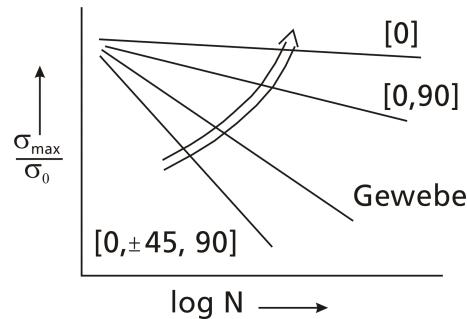


Bild 23. Ermüdungsfestigkeit in Abhängigkeit vom Laminataufbau<sup>5</sup>

In Bild 24 sind die zugeordneten Querschubspannungsverteilungen bei einachsiger Zugbelastung dargestellt. Für Gewebe sind keine zuverlässigen Daten verfügbar, daher ist das Gewebe im Vergleich nicht berücksichtigt. Die sehr viel größeren Querschubspannungen im quasistotropen [0,-45,+45,90]-Aufbau korrelieren mit dem starken Festigkeitsabfall. Da ein direkter Zusammenhang zwischen der Größe der Querschubspannungen und dem Laminatversagen durch Ermüdung besteht, ist die Auslegung mit einem unidirektionalen Faserquerschnitt eine zwingende Voraussetzung für ein stark schwingbeanspruchtes Bauteil wie das Rotorblatt eines Helikopters. Dass Faserverbundstrukturen ein günstigeres Ermüdungsverhalten aufweisen als metallische Strukturen, trifft nur auf unidirektionale Verbunde zu, die in Lastrichtung orientiert sind.

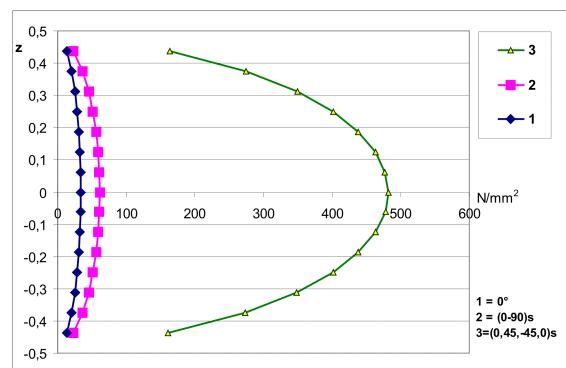


Bild 24. Querschubspannungsverteilungen bei einachsiger Zug im Vergleich (Beispiele Bild 23)

Die Ermüdungseigenschaften hängen fast ausschließlich von den Schubspannungsverteilungen ab.

## 6.2. Spannungsrechnung und Versuche

Die Berechnung des Festigkeitsverhaltens kann, wenn ein direkter Zusammenhang zwischen den Querschubspannungen und dem Versagen des Faserverbundbauteils nachgewiesen ist, auf die Ermittlung der Spannungsverteilungen beschränkt werden. Denn für den Entwurf gelten relative Aussagen, die durch exemplarische Eckversuche validiert werden können. Vor allem erübrigt sich dann die mit Unsicherheiten behaftete Anwendung nicht abgesicherter Versagenskriterien, die im Gegensatz zu den Spannungsverteilungen keine physikalische Grundlage haben. Mit dem Zusammenhang zwischen Querschubspannungsverteilungen und Versagen steht zum ersten Mal ein rein physikalisches Kriterium zur Verfügung. Hierzu einige Laminatvergleiche:

Zug-Druck-Wechselbelastung,  $R=-1$ , (Teil1):

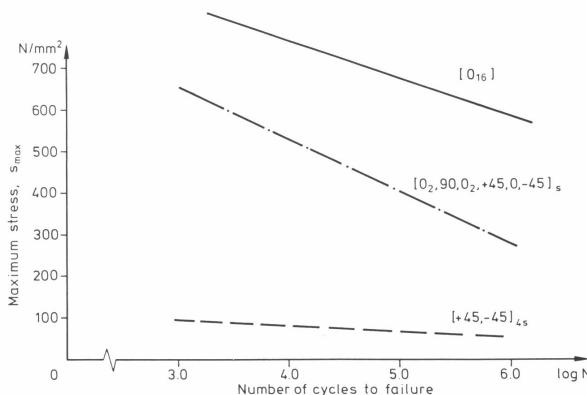


Bild 25. Ermüdungsfestigkeit in Abhängigkeit vom  $0^\circ$ -Anteil (Laminate 1,2,4)<sup>4</sup>

In welchem Ausmaß die Ermüdungsfestigkeit von dem Anteil der in  $0^\circ$ -Richtung orientierten Fasern abhängt, wird in den Zeitfestigkeitskurven für je ein faserdominiertes, ein multidirektionales und ein matrixdominiertes Laminat deutlich (Bild 25). Obgleich 10 von 16 Schichten im multidirektionalen Laminat in  $0^\circ$ -Richtung orientiert sind, fällt die Ermüdungsfestigkeit gegenüber dem rein faserdominierten  $0_{16}$ -Laminat drastisch ab. Bei dem matrixdominierten  $[+45, -45]4s$ -Laminat ist die niedrige Festigkeit als typisch anzusehen und muß im Zusammenhang mit den vergleichsweise sehr großen Schubdehnungen (siehe Querkontraktion) bewertet werden. Entsprechend der Gruppierung der Zeitfestigkeitskurven stehen auch die in den deformierten Körpern verursachten Querschubspannungen im Verhältnis zueinander (Bild 26).

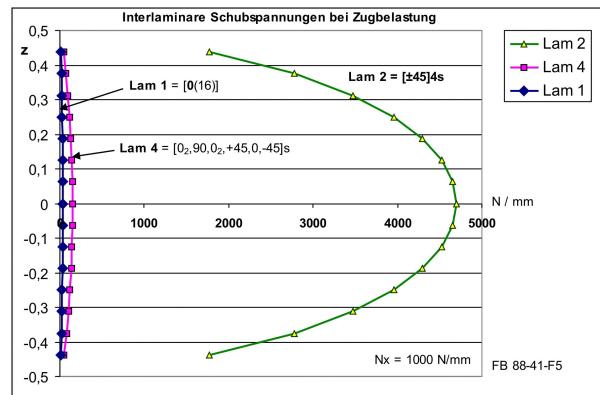


Bild 26. Vergleich der Querschubspannungen<sup>6</sup> (Laminate 1,2,4)

Zug-Druck-Wechselbelastung,  $R=-1$ , (Teil2):

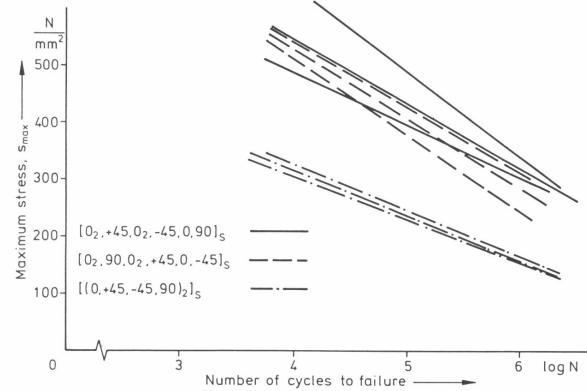


Bild 27. Ermüdungsfestigkeit multidirektionaler und quasi-isotroper Laminat (3,4,5)

Der Vergleich der Ermüdungsfestigkeiten von zwei multidirektionalen Laminaten mit einem  $0^\circ$ -Anteil von 62,5% mit einem quasi-isotropen Laminat mit einem  $0^\circ$ -Anteil von 25% (Bild 27) zeigt bei Versuchen eine erheblich höhere Streuung bei den multidirektionalen Laminaten. Hieraus wurde bei der Auswertung geschlossen, dass sich die Schädigungsmechanismen in einem faserdominierten Laminat weitgehend unkontrollierbar erweisen. Die Analyse der zu diesem Zeitpunkt noch nicht verfügbaren Querschubspannungsverteilungen weist jedoch auf einen eindeutigen Einfluß der Schichtfolge hin. Auch haben schon geringe Abweichungen der Fasern von der Belastungsrichtung einen erheblichen Einbruch bei der Ermüdungsfestigkeit zur Folge. Auf jeden Fall wird deutlich, dass es nicht ausreicht, einen großen Faseranteil in Belastungsrichtung anzugeben, um einen so genannten *fasergerichteten* Entwurf zu erzielen.

Die Verhältnisse der zugehörigen Querschubspannungen ergeben sich nahezu deckungsgleich (Bild 28). Hier wird deutlich, dass der quasi-isotrope Laminataufbau in höchstem Maße ermüdungskritisch ist. Dies widerspricht der verbreiteten Auffassung, mit einem quasi-isotropen Laminat könne man „nichts falsch machen, wenngleich es auch nicht fasergerecht ist“. Ein ungünstiger Laminataufbau kann die Ermüdungsfestigkeit erheblich beeinträchtigen. Die Optimierung der Faserorientierungen und Schichtfolgen für die zu erwartenden Lastfälle wird damit zu einem wesentlichen Bestandteil des Laminat-Entwurfs.

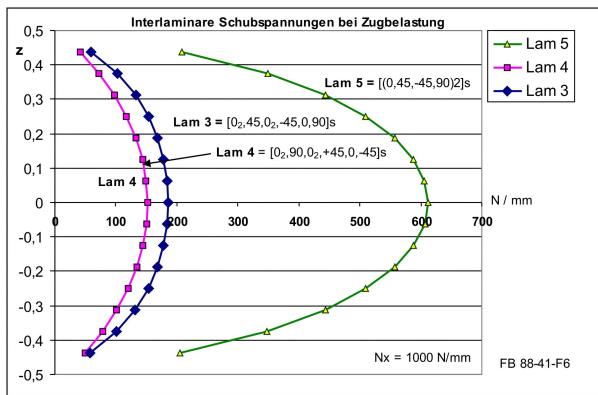


Bild 28. Vergleich der Querschubspannungen<sup>6</sup>  
(Laminate 3,4,5)

## 7. DER FASERGERECHTE ENTWURF

Die Festigkeit der Fasern spielt bezüglich der Festigkeit von Mehrschicht-Faserverbundbauteilen nur eine untergeordnete Rolle. Die von der Belastung, der Schichtfolge und den Faserorientierungen abhängigen Querschubspannungen begrenzen das Tragvermögen unter Betriebsbedingungen. Dies macht die Ausnutzung der überlegenen Fasereigenschaften größtenteils zunicht. Eine Verbesserung der Festigkeitseigenschaften ist nur in dem Maße möglich, wie sich die Querschubspannungen minimieren lassen

## 8. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Die Anforderungen, welche durch die Festigkeitsvorhersage an die Berechnung gestellt werden, sind nicht mit den Mitteln der herkömmlichen Modellmechanik erfüllbar. Anstelle der Bedingungen am unverformten Körper sind die örtlichen Bedingungen im verformten Körper zu erfüllen. Die Grundlage für die Berechnung der Spannungen und Dehnungen liefert die allgemeine Elastizitätstheorie.

## 9. LITERATUR

- [1] R. Schülein et.al. *Verbesserung der Ausnutzbarkeit der neuen hochfesten C-Fasern in hochbelasteten Verbundstrukturen und Verbesserung des Dimensionierungsverfahrens*, Fortschrittsberichte VDI, Reihe 5 Bd.186
- [2] M.Piening, C.Anholt, *Bedeutung physikalischer Plausibilitätsbedingungen bei der Berechnung von Laminatstrukturen*, DGLR-Kongress, München, 2003
- [3] K. Rohwer, *Modelle und Methoden zu Berechnung von Laminaten aus unidirektionalen Faserverbunden*, Fortschrittsberichte VDI, Nr.264, 1996
- [4] H.W.Bergmann, J.Block et.al, *Fracture/Damage Mechanics of Composites- Static and Fatigue Properties*, DLR-Mitt. 92-03
- [5] G. Niederstadt, *Festigkeit und Gestaltung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoff*, CCG-Lehrgang F7.04, 2a-c, 1990
- [6] M.Piening, *The Strength Problem in the Design of Smart Structures*, Int.Conference on Adaptive Structures and Technologies (ICAST), Paris, 2005