

# Berechnung und Optimierung von Ausschnitten in Faser-Kunststoff-Verbunden

T. Kremer\*, H. Schürmann\*\*

TU-Darmstadt, Fachgebiet Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen  
Petersenstraße 30, 64287 Darmstadt

## ÜBERSICHT

Die Auslegung von Ausschnitten in Faser-Kunststoff-Verbunden erfordert die genaue Kenntnis des Spannungszustands am Ausschnitttrand. Anders als bei metallischen Werkstoffen kann in vielen Fällen nicht mit Formfaktoren gearbeitet werden, da der Ort der höchsten Randspannung in der Regel nicht der Ort des Versagens ist.

Die analytische Bestimmung des Randspannungszustands ist mit Hilfe komplexwertiger Ansätze möglich. Diese eignen sich in der Praxis jedoch nicht für die Vorlauslegung. Es wird daher ein neues einfaches Berechnungsverfahren vorgestellt, das direkt die Schichtspannungen an Ausschnitten liefert. Mit Hilfe des neuen Berechnungsverfahrens ist die analytische Formoptimierung von Ausschnitten – bereits in der Phase der Vorauslegung – möglich.

Die parameterfreie Gestaltoptimierung ist bis jetzt hauptsächlich bei metallischen Werkstoffen bekannt. Mit dem neuen CAO.FKV-Verfahren ist die Gestaltoptimierung von Bauteile aus Faser-Kunststoff-Verbund möglich. Das Verfahren wurde speziell für diese Werkstoffe entwickelt und berücksichtigt deren spezielle Versagensmechanismen. Anhand eines praktischen Beispiels wird die Wirksamkeit des Optimierungsverfahrens demonstriert.

## 1 Berechnung der Randspannungen

### 1.1 Annahmen

Alle folgenden Betrachtungen erfolgen unter Einhaltung der Annahmen der klassischen Laminattheorie (CLT). Randeffekte finden also keinen Eingang in die Berechnung. In allen betrachteten Fällen herrscht ein Scheiben-spannungszustand.

Die Beurteilung der Spannungszustände erfolgt allein anhand des Randspannungszustands. Der Einfluss von Größen- oder Stützeffekten, wie von KROLL oder WHITNEY/NUISMER beschrieben [14], ist nicht Schwerpunkt dieses Beitrags. Es empfiehlt sich jedoch gerade bei kleinen Ausschnitten solche Effekte zu berücksichtigen, da die reine Randspannungsbetrachtung zu konservativ ist.

\*Kontakt und Referent: tobias.kremer@klub.tu-darmstadt.de

\*\*Prof. Dr.-Ing Helmut Schürmann, Fachgebietsleiter

### 1.2 Formfaktoren

Für die Beurteilung der Gefahr des Versagens eines Ausschnitts in Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV) wird häufig der Formfaktor verwendet. Formfaktoren beschreiben nicht den Randspannungszustand, sondern nur die Maximalspannung an einem Punkt. Um so höher der Formfaktor – so wird angenommen – desto größer die Gefahr des frühzeitigen Versagens, die von dem Ausschnitt ausgeht.

Anders als bei isotropen Werkstoffen sind die Formfaktoren in FKV neben der Ausschnittform zusätzlich von den globalen Elastizitätsgrößen des Werkstoffs abhängig. Dies ist nicht nur der Orthotropiegrad sondern auch die Querkontraktionszahl und der Schubmodul. Ein Beispiel für einen elastizitätsabhängigen Formfaktor ist der des Kreislochs in der unendlichen Scheibe unter einaxialem Zug, der sich bei LEKHNITSKII oder auch KROLL findet [6; 4].

$$K_t = 1 + \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{E_x}{E_y} - \nu_{yx}} \right) + \frac{E_x}{G_{xy}}} \quad (1)$$

Der Formfaktor gibt an, um welchen Faktor die globale Spannung  $\hat{\sigma}$  am Scheitel des Kreislochs höher ist als die angreifende Randspannung  $\sigma_\infty$  im Unendlichen. Vergleicht man diesen Wert mit der Zugfestigkeit  $\hat{R}_{\text{ungest}}$  des ungestörten Laminats, lässt sich – unter bestimmten Voraussetzungen – die maximale Zugspannung  $\sigma_{\infty, \text{max}}$  berechnen, die das gelochte Laminat ohne Versagen ertragen kann.

$$\sigma_{\infty, \text{max}} = \frac{\hat{R}_{\text{ungest}}}{K_t} \quad (2)$$

### 1.3 Gefahren bei der Verwendung von Formfaktoren

Der oben beschriebene Zusammenhang – zwischen Formfaktor und Laminatfestigkeit – gilt *nicht* allgemein für alle Laminatklassen. Er gilt nur in den Fällen, in denen der Ort des Versagens und Ort der Spannungsspitze identisch sind. Dies ist in der Regel bei Laminaten der Klasse  $(0, 90)_S$  oder  $(0, 90, \pm 45)_S$  der Fall. Bei diesen Laminaten wirkt jeweils die  $90^\circ$ -Schicht versagensauslösend. Damit liegt auch jeweils der Ort des Versagens fest.

Betrachtet man jedoch eine unidirektionale Schicht (UD-Schicht) oder Laminat der Klasse  $(0, \pm \omega)_S$  stellt man fest,

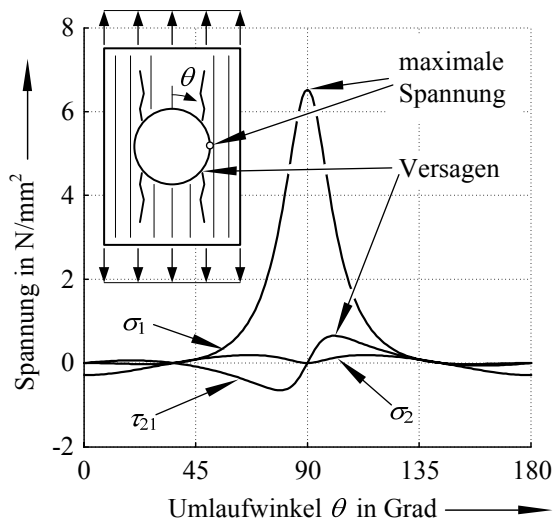


BILD 1: Schichtspannungen am Kreisabschnitt in einer UD-Schicht aus CFK. Einaxialer Zug in Faserrichtung. Ort der maximalen Spannung ist nicht Ort des Versagens.

dass der Formfaktor fehlerhafte Werte bezüglich der Versagenslast liefert. Der Fehler kommt durch zwei Gründen zustande:

- Die berechnete globale Spannung – basierend auf den globalen Elastizitätsgrößen des Verbunds – entspricht nicht dem Spannungszustand in den Einzelschichten.
- Der versagensauslösende Spannungszustand stimmt nicht mit dem Spannungszustand überein, der durch den Formfaktor beschrieben wird.

In Bild 1 sind die Spannungen im Faserkoordinatensystem entlang des Ausschnitttrands aufgetragen. Man erkennt deutlich die durch den Formfaktor vorhergesagte Überhöhung der faserparallelen Spannung  $\sigma_1$ . Dieser steht jedoch die hohe faserparallele Zugfestigkeit  $R_{\parallel}^+$  entgegen. Versagensauslösend ist die Schubspannung  $\tau_{21}$ , die beim Umleiten der Last um den Kreisabschnitt entsteht. Der Schubspannung steht nur die wesentlich niedrigere Schubfestigkeit  $R_{\perp\parallel}$  entgegen. Das Versagen durch den Schubriss tritt daher bei niedrigeren Lasten auf, als durch den Formfaktor vorausgesagt.

Der Quotient der Laminatfestigkeiten – für den ungestörten und gestörten Fall – wird als *schichtenweiser Überhöhungsfaktor* bezeichnet, da er die lokale Spannungsverteilung in den Einzelschichten berücksichtigt. Er ist also nicht als reiner Spannungsquotient definiert, sondern enthält auch Festigkeitsgrößen.

$$K_{t,\text{Schicht}} = \frac{\hat{R}_{\text{ungest.}}}{\hat{R}_{\text{gest.}}} \quad (3)$$

Der Überhöhungsfaktor aus der Formzahl wird hier als *globaler Überhöhungsfaktor* bezeichnet, da er auf den globalen Spannungen an einem Punkt des Ausschnitttrands basiert.

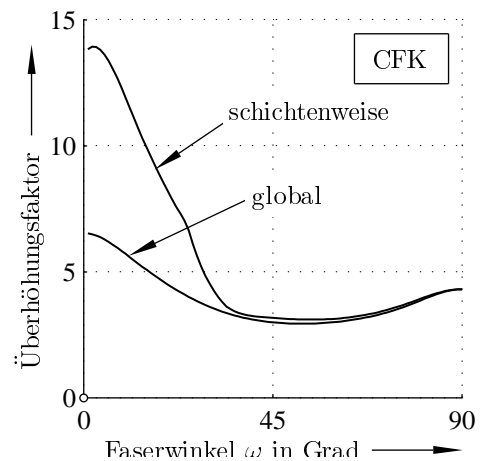


BILD 2: Überhöhungsfaktoren des Kreislochs für ein Laminat  $(0, \pm\omega)_s$ . *global*: Überhöhungsfaktor aus globaler Formzahl. *schichtenweise*: Überhöhungsfaktor aus tatsächlicher Bruchlast.

In Bild 2 ist für die Laminatklasse  $(0, \pm\omega)_s$  der globale und schichtenweise Formfaktor über dem Faserwinkel  $\omega$  aufgetragen. Man erkennt, dass der globale Überhöhungsfaktor stets niedriger ist, als der schichtenweise. Dies bedeutet, dass bei einer Auslegung mit Hilfe des globalen Formfaktors die Versagenslast *überschätzt* wird, die Auslegung mit diesem Faktor ist somit unsicher. Im Fall der UD-Schicht ( $\omega = 0^\circ$ ) wird die Bruchlast um den Faktor 2 überschätzt.

Das Beispiel hat gezeigt, dass die Beurteilung eines Ausschnitts mit Hilfe des Formfaktors in vielen Fällen zu falschen Schlussfolgerungen führt. Die Kenntnis des gesamten Spannungszustands an einem Ausschnitt ist daher für eine zuverlässige Beurteilung notwendig. Die Kenntnis der Spannungsspitze an einer Stelle – ausgedrückt durch den Formfaktor – ist in der Regel für die Beurteilung von Ausschnitten in Faser-Kunststoff-Verbunden ungenügend.

#### 1.4 Analytische Berechnung des Spannungszustands am Ausschnitt

Es existiert eine Vielzahl von Lösungen für die Randspannungen an Ausschnitten in orthotropen oder anisotropen Werkstoffen. Lösungen für unterschiedliche Lastfälle am Kreis- oder Ellipsenausschnitt hat LEKHNITSKII entwickelt [6]. Für beliebige Ausschnittgeometrien existieren Lösungen von UKADGAONKER, LEPPER und vielen anderen mehr [13; 7]. Alle diese Lösungen beschreiben die Ausschnittgeometrie über eine Reihenentwicklung. Mit Hilfe der Methode der komplexen Potentiale und der konformen Abbildung wird der Randspannungszustand ermittelt.

Der Lösungsweg gestaltet sich als sehr aufwändig. Daher sind diese Lösungen in eigenständigen Programmen implementiert, z.B. *COSCA* der TU-Dresden oder *ALADIN* der TU-Darmstadt. Für eine Vorauslegung von FKV-Bauteilen mit Ausschnitten ist jedoch eine einfache Lösung wünschenswert, die in der gewohnten Berechnungsumgebung zur Vorauslegung implementiert werden kann.

## 1.5 Methode der Übertragungsfunktion

Die neu entwickelte Methode, Übertragungsfunktionen zur Beschreibung des Randspannungszustands zu verwenden, basiert auf den bekannten Lösungen in der Literatur. Sie enthält implizit eine Berechnung nach der CLT, so dass direkt Schichtspannungen als Ergebnis erzielt werden.

Die Schichtspannungen am Ausschnitttrand werden nach dem nachfolgenden Schema berechnet, wobei  $E_x, E_y, G_{xy}$  und  $\nu_{yx}$  die globalen Elastizitätsgrößen des Verbunds und  $E_{\parallel}, E_{\perp}, G_{\parallel\perp}$  bzw.  $\nu_{\perp\parallel}$  die Elastizitätsgrößen der entsprechenden Einzelschichten des Verbunds mit dem Faserwinkel  $\alpha$  sind.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\nu_{\perp\parallel} - \nu_{xy}}{E_y} & \frac{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ \frac{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{xy}}{E_y} & \frac{\nu_{\perp\parallel} - \nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_{\perp\parallel}}{4G_{yx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \psi \\ \sin^2 \psi \\ \sin 2\psi \end{bmatrix} \frac{E_{\parallel} \cdot \dot{U} \cdot \sigma_{\infty}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\perp\parallel}} \quad (4)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{xy}}{E_y} & \frac{\nu_{\perp\parallel} - \nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ \frac{\nu_{\perp\parallel} - \nu_{xy}}{E_y} & \frac{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_{\perp\parallel}}{4G_{yx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \psi \\ \sin^2 \psi \\ \sin 2\psi \end{bmatrix} \frac{E_{\perp} \cdot \dot{U} \cdot \sigma_{\infty}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\perp\parallel}} \quad (5)$$

$$\tau_{12} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2G_{xy}} \\ \frac{1 + \nu_{xy}}{E_y} & -\frac{1 + \nu_{yx}}{E_x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \psi \\ \sin^2 \psi \\ \sin 2\psi \end{bmatrix} G_{\parallel\perp} \cdot \dot{U} \cdot \sigma_{\infty} \quad (6)$$

Die Übertragungsfunktion  $\dot{U}$  enthält alle Informationen über die Ausschnittgeometrie und die Belastungsart.  $\sigma_{\infty}$  ist die Belastung im Unendlichen.  $\psi$  bezeichnet den Tangentenwinkel des Ausschnitts an der Stelle  $\theta$ . Für eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  bzw. einen Kreis ( $a = b$ ) gilt die folgende Beziehung.

$$\psi(\theta) = \arctan \left( -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} \right) \quad (7)$$

Für die Belastungsarten

- einaxialer Zug und Druck,
- Schub,
- und die Scheibenbiegung

wurden bereits Übertragungsfunktionen hergeleitet. Beispielhaft ist hier die Übertragungsfunktion des Kreislochs unter Schub und einaxialem Zug oder Druck angegeben.

$$\dot{U}_{\text{Kreis}, \tau} = \frac{-0,5 \cdot (1 + k + n) \cdot n \sin 2\theta}{\sin^4 \theta + (n^2 - 2k) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + k^2 \cos^4 \theta} \quad (8)$$

$$\dot{U}_{\text{Kreis}, \sigma} = \frac{-k \cos^2 \theta - (1 + n) \sin^2 \theta}{\sin^4 \theta + (n^2 - 2k) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + k^2 \cos^4 \theta} \quad (9)$$

$n$  und  $k$  sind Abkürzungen für die Lösungen der charakteristischen Gleichung der orthotropen Platte. Sie sind LEKHNITSKII entnommen [6].  $k$  hat die Bedeutung der Wurzel des Orthotropiegrads  $E_x/E_y$  des Verbunds. Für isotrope Werkstoffe gilt  $k = 1$  und  $n = 2$ .

$$k = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \quad (10)$$

$$n = \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{E_x}{E_y} - \nu_{yx}} \right) + \frac{E_x}{G_{xy}}} \quad (11)$$

### 1.5.1 Ableiten von Formfaktoren

Die Übertragungsfunktionen beinhalten natürlich auch die bekannten Formfaktoren. Um einen Formfaktor aus der Übertragungsfunktion abzuleiten, muss zunächst der Ort und die Richtung der maximalen Spannung bekannt sein. Im Fall der einaxialen Belastung des Kreislochs ist dies  $\sigma_1$  an der Stelle  $\theta = \pi/2$ . Da der Verbund für den globalen Überhöhungsfaktor als homogen angenommen wird, sind die Elastizitätsgrößen der Schicht mit denen des Verbunds identisch. Es gilt also  $E_x \equiv E_{\parallel}$  usw., der Schichtwinkel der Einzelschicht ist dementsprechend  $\alpha = 0$ .

Setzt man diese Größen in Gleichung (4) ein, erhält man den folgenden Ausdruck.

$$\sigma_1 = \frac{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}{E_x} \cdot \frac{E_x \cdot \dot{U} \cdot \sigma_0}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \dot{U} \cdot \sigma_{\infty} \quad (12)$$

Die Vergrößerungsfunktion entspricht in diesem Fall also genau der Definition des Formfaktors. Ersetzt man in der Vergrößerungsfunktion die Konstanten  $k$  und  $n$ , ergibt sich das bekannte Ergebnis für den Kreisausschnitt aus Gleichung (9).

$$K_{t, \text{Kreis}, \sigma} = \dot{U} = \frac{-(1+n)}{-1} \quad (13)$$

$$= 1 + \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{E_x}{E_y} - \nu_{yx}} \right) + \frac{E_x}{G_{xy}}}$$

Aus der Vergrößerungsfunktion der Ellipse lassen sich analog deren Formfaktoren ableiten.<sup>1</sup> Hier angegeben sind die

<sup>1</sup>Die Übertragungsfunktion der Ellipse ist in diesem Artikel nicht angegeben.

Formfaktoren für den einaxialen Spannungsfall und die Scheibenbiegung.  $a$  und  $b$  sind die Halbachsen der Ellipse, wobei die äußere Spannung  $\sigma_\infty$  in Richtung der  $a$ -Achse wirkt.

$$K_{t, \text{Ellipse}, \sigma} = 1 + \frac{b}{a} \cdot n \quad (14)$$

$$K_{t, \text{Ellipse}, M} = \frac{b}{2a} \cdot n - 1 \quad \text{mit} \quad \sigma_\infty = M/I \cdot b \quad (15)$$

Auch für quadratähnlichen Ausschnitte, deren Geometrie nach Gleichung (17) definiert ist, kann auf diese Weise ein Formfaktor ermittelt werden. Für den einaxialen Zug lautet der Faktor:

$$K_{t, \text{Quad}, \sigma} = 1 + \frac{1+3 \cdot m}{1-3 \cdot m} \cdot n \quad \text{mit} \quad -0,08 \leq m < \frac{1}{3} \quad (16)$$

## 1.6 Weitere Schritte

Nachdem mit Hilfe der Methode der Übertragungsfunktion die Schichtspannungen in jeder Einzelschicht des Verbunds bekannt sind, können diese nun mit Hilfe eines Bruchkriteriums beurteilt werden. Dies ist in soweit notwendig, als nur mit einem physikalisch basierten Bruchkriterium – wie dem Bruchkriterium nach PUCK, das der VDI-Richtlinie 2014 zugrunde liegt – das Versagen der Einzelschicht beschrieben werden kann.

Neben der reinen Analyse der Schichtspannungen empfiehlt sich die Untersuchung des Abklingverhaltens der Spannungen. Das Abklingverhalten gibt Aufschluss über den Größeneinfluss bzw. die vorliegende Stützwirkung. Hierzu wurde von KROLL/HUFENBACH ein Modell für die Laminatklasse  $(0, 90, \pm 45)_S$  aus CFK erstellt [5].

## 2 Optimierung der Ausschnittgeometrie mit Hilfe der Übertragungsfunktion

Mit dem oben vorgestellten Verfahren steht eine einfache Lösung für den schichtenweisen Randspannungszustand zur Verfügung. Diese Lösung erstreckt sich nicht nur auf kreis- oder ellipsenförmige Ausschnitte, sondern auch weitere wie quadrat- oder dreieckähnliche.

Die quadrat- oder dreieckähnlichen Ausschnitte werden dabei über die komplexe Funktion  $z(\theta)$  dargestellt, wobei der Realteil der  $x$ -Koordinate und der Imaginärteil der  $y$ -Koordinate des Ausschnittsrandes entspricht.

$$z(\theta) = e^{i\theta} + \frac{m}{e^{i\theta N}} \quad \text{mit} \quad N = 2, 3 \quad (17)$$

Der Exponent  $N$  gibt die Ausschnittform an, für ein quadratähnlichen Ausschnitt wird  $N = 3$  und für einen dreieckähnlichen  $N = 2$  gesetzt. Mit dem Parameter  $m$  lässt sich die Krümmung der Flanken des Ausschnitts beeinflussen. Für  $m = 0$  liegt jeweils ein Kreis vor. Eine Variation des Formparameters  $m$  ist in Bild 3 gezeigt.

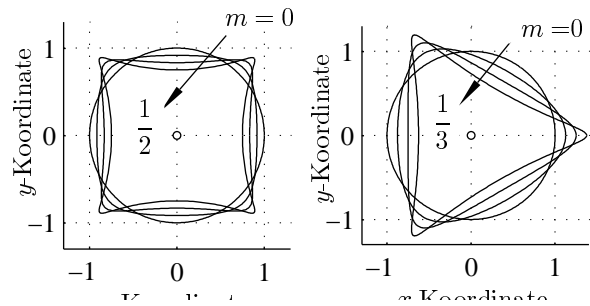


BILD 3: Variation eines quadrat- und dreieckförmigen Ausschnitts mit Hilfe des Formparameters  $m$  von  $m = 0$  für den Kreis bis  $m = 1/2$  bzw.  $1/3$ .

Mit Hilfe des Formparameters  $m$  lässt sich somit die Ausschnittkrümmung variieren, welche maßgeblich die Spannungsüberhöhung an einem Ausschnitt beeinflusst [10].

## 2.1 Optimierungsproblem

Das Optimierungsproblem besteht in der Suche des Formparameters  $m$ , der zu einer minimalen Anstrengung des Ausschnittsrandes führt. Als Entwurfparameter wird der Formparameter  $m$  gewählt, als Zielfunktion  $z$  die maximale Anstrengung  $f_E$  über alle Einzelschichten  $i$  am Ausschnittsrand. Die Systemgleichungen, die das Verhalten des Laminats beschreiben, werden durch die Gleichungen (4) – (6) der schichtenweisen Randspannungen sowie der Berechnungsvorschrift für die Anstrengung nach VDI-Richtlinie 2014 gebildet.

$$\min_m \left\{ \max_{i, \theta} \{f_{E,i}(\theta, m)\} \mid |m| < \frac{1}{N} \right\} \quad (18)$$

Der Parameterraum von  $m$  muss beschränkt werden, da zu große Beträge des Formparameters zu sehr kleinen Eckradien führen. Dies hat eine Singularität im Spannungsverlauf zur Folge, was bei einem Ausschnitt in der Regel nicht erwünscht ist.

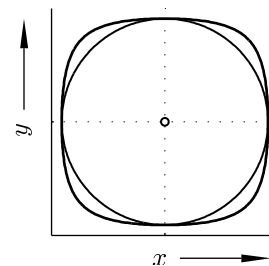


BILD 4: Bester quadratähnlicher Ausschnitt in einem Flugzeugbaulaminat aus CFK unter einaxialem Zug im Vergleich zum Kreisabschnitt.

In der Tabelle 1 sind die Verbesserungen gegenüber dem Kreisabschnitt angegeben, die durch die Lösung des Optimierungsproblems erzielt werden konnten. Sie beziehen sich auf ein typisches CFK- und GFK-Laminat der Klassen  $(0, 90, \pm 45)_S$  („Flugzeugbaulaminat“) und  $(0, 90)_S$  (Kreuzverbund) unter einaxialem Zug in  $0^\circ$ -Richtung. Die zuge-

hörige Ausschnittgeometrie ist durch den Parameter  $m$  und Gleichung (17) gegeben. Bild 4 zeigt die zum optimalen Parameter  $m$  zugehörige Geometrie in einem Flugzeugbaulaminat. Weitere Ergebnisse für andere Lastfälle, Laminat- oder Ausschnittgeometrien können auf gleichem Weg, durch Lösung des Optimierungsproblems, gewonnen werden.

TAB. 1: Bester quadratähnlicher Ausschnitt unter einaxialem Zug. Die Verbesserung ist auf die rechnerische Bruchlast des Laminats mit Kreis-ausschnitt bezogen.

	Flugzeugbaulam.		Kreuzverbund	
	GFK	CFK	GFK	CFK
Verbesserung	20%	20%	28%	27%
$m$	-0,060	-0,059	-0,067	-0,064

## 2.2 Ellipsenförmige Ausschnitte

Für ellipsenförmige Ausschnitte in *quasiisotropen* Laminaten ist die Lösung der Optimierungsaufgabe nicht notwendig. Das optimale Achsenverhältnis  $a/b$  kann ohne Lösung des Optimierungsproblem angegeben werden. Für die Ellipse gilt, dass der Randspannungszustand konstant ist, wenn das Achsenverhältnis der Ellipse gleich dem Verhältnis des äußeren Normalspannungszustands ist.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad \text{mit} \quad \sigma_x, \sigma_y > 0 \quad (19)$$

Für einen einaxialen Zugspannungszustand ist – wie nicht anders zu erwarten – der Riss  $a/b \rightarrow \infty$  in Lastrichtung optimal.

Die obige Beziehung basiert nur auf der Elastostatik, sie beinhaltet keine Festigkeitsgrößen. Für negative Normalspannungsverhältnisse lässt sich kein Optimum, allein basierend auf dem Spannungszustand, angeben. Das Einbeziehen von Festigkeitsgrößen ist hier zwingend notwendig. So muss z.B. beurteilt werden, ob ein Zug- oder Druckspannungszustand gleichen Betrags günstiger ist.

## 3 Das Optimierungsverfahren CAO.FKV

Die oben beschriebenen Methoden zur Verbesserung von Kerben in Faser-Kunststoff-Verbunden bezogen sich ausschließlich auf Ausschnitte in Scheiben unter bestimmten äußeren Belastungen. In technischen Anwendungen liegen jedoch in der Regel dreidimensionale Bauteile unter komplexen Belastungszuständen vor. Solche Bauteile sind keiner analytischen Lösung zugänglich.

Das CAO.FKV-Verfahren schließt diese Lücke. Es erlaubt die Optimierung von beliebig geformten Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden bezüglich unterschiedlicher Zielfunktionen.

## 3.1 Beschreibung des Verfahrens

Das CAO.FKV-Verfahren ist ein parameter- und gradientenfreies Optimalitätskriterien-Verfahren zur Formoptimierung, basierend auf der FEM. Da das Verfahren 0-ter Ordnung ist, ist seine Geschwindigkeit praktisch nicht von der Größe des Problemgebiets abhängig. Ziel der Optimierung ist es den Rand  $\Gamma$  des Problemgebiets  $\Omega$  so zu variieren, dass in dem gewählten Designbereich  $\Gamma_d$  das Optimalitätskriterium erfüllt wird.

Die FEM übernimmt die Beschreibung der Systemgleichungen des Optimierungsproblems. Gleichzeitig wird die diskretisierte Struktur der FEM zur Beschreibung der Designparameter genutzt. Als Designparameter werden die Verschiebungen der Knoten auf der Bauteiloberfläche  $\Gamma_d$  verwendet. Wie in Bild 5 gezeigt, wird die Oberflächenverschiebung an jedem Knoten  $i$  durch die Knotennormale  $\vec{n}_i$  und eine Amplitude  $A_i$  beschrieben. Die Knotennormalen berechnen sich dabei aus den angrenzenden Facetten, die durch die Elementoberflächen gebildet werden.

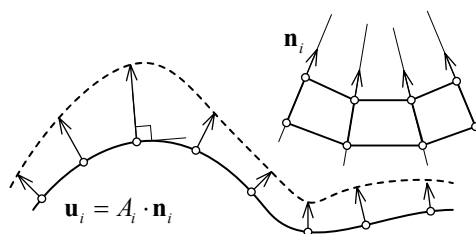


BILD 5: Bestimmung des Verschiebungsvektors  $\vec{u}_i$  des Knoten  $i$  auf der Oberfläche  $\Gamma_d$ .

### 3.1.1 Zielgrößen

Bei metallischen Werkstoffen ist ein Rand dann optimal, wenn die Randspannung konstant ist [11]. Die Zielgröße  $z$  ist in diesem Fall die Randspannung  $\sigma_\theta$  deren Abweichung bezüglich des gewünschten Zielwerts minimiert werden soll. THOMPSON entdeckte den Zusammenhang zwischen der konstanten Randspannung und einer optimalen Bauteilgeometrie in der Natur, was später von MATTHECK aufgegriffen und in ein Optimierungsverfahren implementiert wurde [12; 8]. Die Forderung der konstanten Randspannung liegt auch z.B. dem Baud-Profil oder dem Profil nach NEUBER zugrunde [1; 9].

Für Faser-Kunststoff-Verbunde eignet sich die Randspannung als Zielgröße nicht. Hier muss das physikalische Bruchgeschehen des Werkstoffs berücksichtigt werden. Dies geschieht im CAO.FKV-Verfahren mit Hilfe der Anstrengungen, die mit Hilfe der VDI-Richtlinie 2014 berechnet wird. Sowohl die Faser- als auch die Zwischenfaserbruch-Anstrengung dient dem Verfahren als Zielfunktion  $z$ .

Bei geschichteten Verbunden können die Schichten durch Volumenelemente (Hexaeder oder Tetraeder) oder durch ein geschichtetes Materialmodell (Schalenelemente oder ebene Elemente) modelliert werden. Alternativ bietet das CAO.FKV-Verfahren die Möglichkeit eigene Zielgrößen, z.B. die Querkzugspannung  $\sigma_2$ , zu definieren.

### 3.1.2 Optimalitätskriterium

Als Optimalitätskriterium wird im CAO.FKV-Verfahren die Forderung einer gleichmäßigen Anstrengungsverteilung auf der Oberfläche verwendet. Bei der Berechnung der Zwischenfaserbruch-Anstrengung  $f_{E1}$  wird, der VDI-Richtlinie 2014 folgend, der Einfluss der faserparallelen Spannung auf die Zwischenfaserbruchanstrengung berücksichtigt. Dies ist für die Optimierung von geschichteten Faser-Kunststoff-Verbunden von großer Bedeutung, da sich im Laufe der Iterationen die Spannungen in faserparallele Richtung umlagern. Gleichzeitig liegen jedoch auch hohe Zwischenfaserbruch-Anstrengungen vor, so dass die Berücksichtigung des Einflusses ausschlaggebend für den Erfolg der Optimierung ist.

### 3.1.3 Redesign-Regel

Als Redesign-Regel verwendet das CAO.FKV-Verfahren das Gesetz des konstanten relativen Wachstums [3]. Das heißt die maximale Verschiebungsamplitude  $A_{\max}$  der Oberfläche  $\Gamma_d$  ist konstant. Alle anderen Oberflächenknoten, die nicht den maximalen Zielwert besitzen, werden relativ zu der maximalen Verschiebung und ihrer Abweichung zum Sollwert  $z_{\text{soll}}$  verschoben.

$$A_i = A_{\max} \cdot \frac{z_i - z_{\text{soll}}}{z_{\max} - z_{\text{soll}}} \quad \text{mit} \quad z_i = f_{E1}, f_{Fb} \quad (20)$$

Das Gesetz des konstanten relativen Wachstums hat den Vorteil, dass es unabhängig vom Betrag der vorliegenden Überhöhung der Anstrengung arbeitet. Lediglich die maximale Verschiebungsamplitude muss vorgegeben werden. Dies führt zu einem sehr stabilen Verhalten. Entsteht während einem Iterationsschritt, etwa durch eine Netzverzerrung, eine singuläre Stelle, antwortet das Gesetz nicht mit einer übermäßigen Knotenverschiebung. Dies würde unweigerlich das Modell zerstören.

Nachteilig ist die langsame Konvergenz am Anfang der Optimierung, da hier in der Regel große Werte der Verschiebungsamplituden  $A_i$  zulässig sind. Dies gilt besonders dann, wenn mit einem sehr schlechten Startentwurf gestartet wird.

### 3.1.4 Praktische Umsetzung

Die Umsetzung des CAO.FKV-Verfahrens erfolgte mit Hilfe von Fortran-Subroutinen in ABAQUS. Die Berechnung kann wahlweise geometrisch linear oder nichtlinear erfolgen, gleiches gilt für das Werkstoffgesetz. Bei der Belastung ist auch die Behandlung von Kontaktproblemen möglich.

## 4 Experimenteller Nachweis der Wirksamkeit

Der Nachweis, dass das formulierte Optimalitätskriterium des CAO.FKV-Verfahrens zu optimalen Bauteilen führt,

wird mit Hilfe eines Versuchs erbracht. Als Probengeometrie wird ein Querschnittsprung in einer Zuglasche aus einer unidirektionalen Schicht (UD-Schicht) gewählt. Ziel der Optimierung des Querschnittsübergangs ist es, dass die Zuglasche auf Faserbruch im freien Bereich versagt, ohne zuvor einen Zwischenfaserbruch zu erzeugen. Ein so ausgelegter Querschnittsprung hat die maximal mögliche Bruchlast, da die übertragbare Last durch den freien ungestörten Bereich beschränkt wird und nicht durch die Lasteinleitung.

Der Laminataufbau als UD-Schicht hat bezüglich der Überprüfung des CAO.FKV-Verfahrens den Vorteil, dass die UD-Schicht keine Möglichkeit zur Spannungsumlagerung bietet. Ein Zwischenfaserbruch wird nicht durch quer liegende Schichten gestoppt. Der Aufbau bedingt zudem, dass hohe Faser- und Zwischenfaserbruch-Anstrengungen in großer räumlicher Nähe vorliegen. Dies bietet die interessante Möglichkeit, den Einfluss der faserparallelen Spannungen auf die Zwischenfaserbruch-Anstrengung zu untersuchen.

### 4.1 Probenmaterial und Probenherstellung

Ausgangsmaterial für die Herstellung der Proben sind GfK-Prepreg Platten, die im Heißpressverfahren hergestellt wurden. Die Plattendicke betrug 3mm bei einem Faservolumenanteil von  $\varphi \approx 56\%$ .

Die Zugproben wurden im Wasserstrahlschneide-Verfahren aus den Platten geschnitten. Die Geometrie-Beschreibung der Schnittkontur – besonders im Fall des optimalen Querschnittsübergangs – konnte weitestgehend direkt aus der FEM übernommen werden. Die mikroskopische Untersuchung der Schnittkanten hat keine signifikante Vorschädigung durch das Wasserstrahlschneiden gezeigt.

### 4.2 Ziel der Optimierung

Ziel der Optimierung ist ein Querschnittsübergang, der die maximal übertragbare Last erträgt, ohne dass es zu einem frühzeitigen Zwischenfaserbruch kommt. Bei der UD-Schicht entspricht der frühzeitige Zwischenfaserbruch dem Totalversagen der Probe. Die maximal übertragbare Last ergibt sich aus der Bruchlast  $F_B = A_{\text{frei}} \cdot R_{\parallel}^+$  der Zuglasche im freien Querschnitt (Bild 7).

Ziel der Optimierung ist somit ein Profil, dass die Kriterien  $f_{E1} < 1$  und  $f_{Fb} < 1$  erfüllt.

### 4.3 Referenzprobe

Als Referenzprobe dient ein Querschnittsübergang mit einem konventionellen Kreisprofil, wie in Bilde 6 abgebildet. Der Rundungsradius wurde so gewählt, dass er den maximalen zur Verfügung stehenden Bauraum ausfüllt.

Das Versagen erfolgt frühzeitig aufgrund zu hoher Schubspannungen  $\tau_{21}$ , die einen Zwischenfaserbruch auslösen. Der Zwischenfaserbruch kann nicht gestopt werden und läuft bis in die Krafteinleitung durch. Er durchtrennt

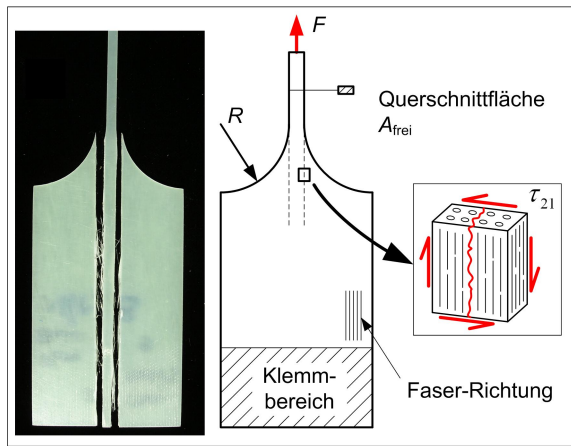


BILD 6: Versagen einer Zuglasche mit Kreisradius durch einen Schubriss.

die Probe vollständig. In Bild 7 ist deutlich die rechnerisch ermittelte Überhöhung um den Faktor  $\approx 4$  der Zwischenfaserbruch-Anstrengung zu sehen.

Das Kreisprofil ist offensichtlich nicht in der Lage, die Spannungen ohne Schubspannungsspitze und damit auch Anstrengungsspitze zu übertragen.

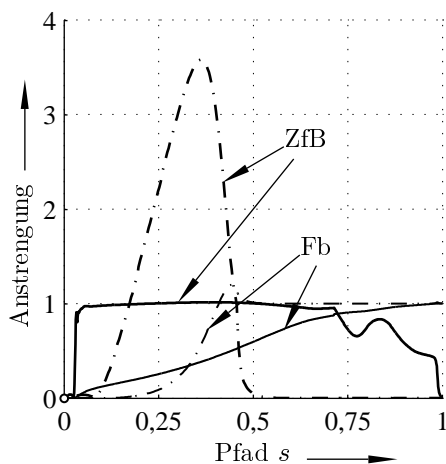


BILD 7: Vergleich der Anstrengungsverläufe für Zwischenfaserbruch (ZfB) und Faserbruch (Fb) am Kreisprofil (gestrichelt) und dem optimalen Querschnittsübergang.

Im Bild 8 ist die Verteilung der Anstrengungen über der Probe dargestellt. Bereiche der Überanstrengung liegen nicht nur an der Oberfläche vor, sondern sind auch großflächig im Inneren der Zuglasche vorhanden. Dies bedeutet, dass ein großes Werkstoffvolumen potentiell versagensgefährdet ist. Umso größer das gefährdete Volumen ist, desto größer auch die Wahrscheinlichkeit, dass sich in diesem Volumen eine versagensauslösende Fehlstelle befindet.

#### 4.4 Optimaler Querschnittsübergang

In Bild 7 ist zu sehen, dass die Faserbruch-Anstrengung fast linear von Null auf den Wert 1,0 im freien Querschnitt ansteigt. Die Zwischenfaserbruch-Anstrengung bleibt da-

bei fast konstant auf dem gewählten<sup>2</sup> Wert von  $f_{E1} = 1,0$  und fällt dann auf Null im freien Querschnitt ab.

Die Verteilung der Anstrengungen in Bild 8 zeigt, dass die Anstrengung nicht nur an der Oberfläche des Profils die Vorgaben erfüllt, auch im Inneren des Profils besitzen alle Bereiche eine Anstrengung kleiner 1,0. Die Anstrengung fällt, mit zunehmender Entfernung vom Rand weg, sehr sprunghaft ab.

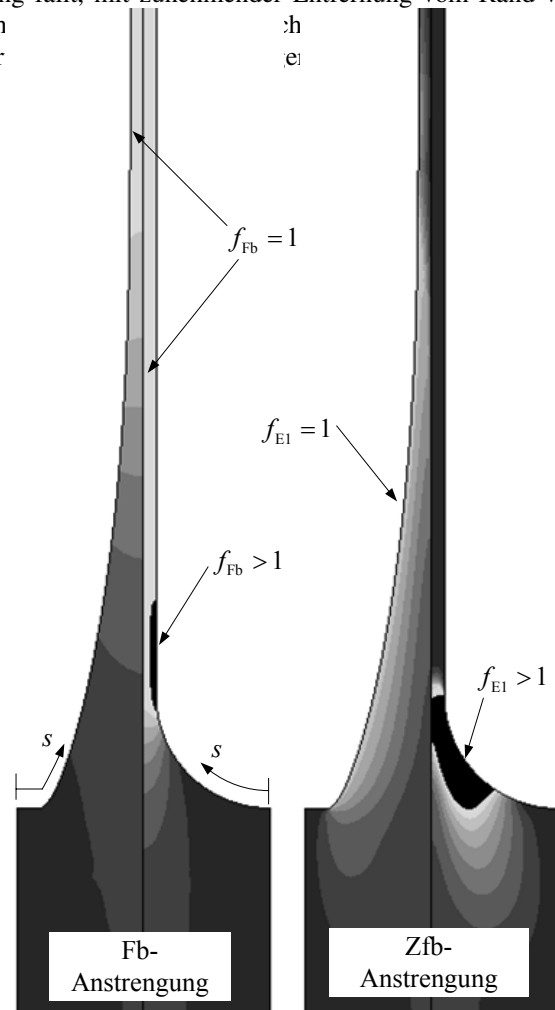


BILD 8: Verteilung der Zwischenfaserbruch-Anstrengung  $f_{E1}$  und der Faserbruch-Anstrengung  $f_{Fb}$  im Querschnittsübergang mit Kreisprofil und optimalem Profil. In den schwarz ausgefüllten Bereichen ist die Anstrengung  $>1$ .

##### 4.4.1 Ergebnisse des Experiments

Im Zugversuch haben die Querschnittsübergänge mit dem durch das CAO.FKV-Verfahren ermittelten Profil durchgängig, wie in Bild 9 zu sehen ist, sehr hohe Bruchlasten gezeigt. Diese lagen etwa 12% unterhalb der der theoretischen Zugfestigkeit der UD-Schicht. Die zugrunde gelegte theoretische Festigkeit wurde aus der Festigkeit des Einzelfilaments nach Angaben des Faserherstellers ermittelt. Dieser Festigkeitswert wird in der Praxis nicht erreicht, da

<sup>2</sup>Das CAO.FKV-Verfahren bietet auch die Möglichkeit, für die Fb- und ZfB-Anstrengung unterschiedliche Zielwerte vorzugeben, etwa  $f_{E,Fb} = 1,0$  und  $f_{E1} = 0,5$

die Filamente durch die Weiterverarbeitung vorgeschädigt werden.

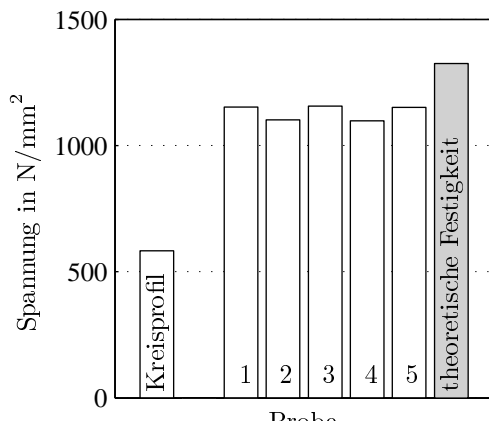


BILD 9: Bruchspannung der Zugproben mit optimalem Querschnittsübergang im Vergleich zum Kreisprofil und der theoretischen Zugfestigkeit.

Das Versagensbild – die Profile sind auf Versagen auf Faserbruch im freien Bereich ausgelegt – ist auf den ersten Blick nicht eindeutig. Nur bei einigen Proben wurde der komplette Probenquerschnitt auf Faserbruch durchtrennt. Die meisten Proben wurden im freien Querschnitt nur teilweise durchtrennt. Wird der Querschnitt nicht schnell genug durchtrennt, kommt es zu einer exzentrischen Spannungsverteilung und damit einem überlagerten Biegemoment. Das auf den einaxialen Zug optimierte Profil kann dieses Biegemoment nicht ertragen. Daher entstehen sekundäre Zwischenfaserbrüche im Profil. Die hohe Versagenslasten und die Video-Auswertung weisen jedoch eindeutig auf einen primären Faserbruch hin.

Bei der Auswertung der Proben hat sich zudem gezeigt, dass das verwendete unidirektionale Probenmaterial teilweise mit Ondulationen behaftet war. Dies hat dazu geführt, dass sich onduliere Rovings aus der Grundplatte gelöst haben und so zur Schwächung des freien Querschnitts führten.

Das Experiment hat gezeigt, dass mit Hilfe des CAO.FKV-Verfahrens selbst in einem sehr ungünstigen Laminat – der unidirektionalen Schicht – ein Profil erzeugt werden kann, das die maximal mögliche Bruchlast aufweist.

## 5 AUSBLICK

Mit dem vorgestellten Verfahren der Übertragungsfunktion ist eine realitätsnahe Beschreibung des Spannungszustands um technisch relevante Ausschnitte bereits in der Vorauslegung möglich. In Kombination mit den physikalisch begründeten Bruchkriterien nach PUCK – das der VDI-Richtlinie 2014 zugrunde liegt – ist eine gute Abschätzung der Festigkeit eines gelochten Laminats möglich. Wünschenswert ist jedoch in Zukunft die Berücksichtigung von Größeneffekten. Dies betrifft insbesondere kleine Ausschnitte.

Das CAO.FKV-Verfahren kann dazu dienen, Gestaltungsrichtlinien für Bauteile aus FKV zu erzeugen und so einen Vorrat an optimalen Konstruktionselementen zu erstellen. Oft fehlen für FKV eindeutige Konstruktionshinweise. Die CAO.FKV-Methode kann hier helfen, geeignete Konstruktionsvorschläge zu erzeugen. Dies betrifft insbesondere die Abhängigkeit des Designs vom verwendeten Verbundwerkstoff und dessen Elastizitäts- sowie Festigkeitskennwerten. KRAUS hat bereits für die Zuglasche die optimale Profilkontur in Abhängigkeit der Verbundeigenschaften beschrieben [2]. Diesen Ansatz gilt es weiter zu verfolgen.

## Literatur

- [1] BAUD, Robert V.: *Beiträge zur Kenntnis der Spannungsverteilung in prismatischen und keilförmigen Konstruktionselementen mit Querschnittsübergängen*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Diss., 1934. – Nr. 702
- [2] KRAUS, Katharina: *Erhöhung der Versagensgrenzen von Faser-Kunststoff-Verbund-Bauteilen mittels numerischer Wachstumsverfahren*. Darmstadt, Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Konstruktiver Leichtbau und Bauweisen, Studienarbeit, 2005. – Nr. S/05/01
- [3] KREMER, Tobias ; SCHÜRMAN, Helmut: Formoptimierung von geschichteten Faser-Kunststoff-Verbunden. In: *Konstruktion* (2006). – im Druck
- [4] KROLL, Lothar: *Kerbfestigkeit von mehrschichtigen Faserverbundscheiben mit unbelasteter Bohrung bei einachsigem Zug (OHT)*. Industrieller Ausschuss Berechnungsunterlagen. 2004. – Kapitel 37109-01
- [5] KROLL, Lothar ; HUFENBACH, Werner ; KOSTKA, P.: Neue Kerbfestigkeitsbedingungen für den Tragfähigkeitsnachweis von Faserverbundbauteilen mit Ausschnitten. In: *Jahrbuch der Deutschen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt – Lilienthal-Oberth e.V.* Bd. Bd. 1 und 2 Deutsche Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt – Lilienthal-Oberth e.V. (Veranst.), 2005. – Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress 27.–29. September in Friedrichshafen
- [6] LEKHNITSKII, Sergei G. ; TSAI, S. W. (Hrsg.) ; CHE- RON, T. (Hrsg.): *Anisotropic Plates*. Dritte Auflage. New York London Paris Montreux Tokyo Melbourne : Gordon and Breach, 1968. – Übersetzung aus dem Russischen
- [7] LEPPER, Martin: *Kerbspannungsanalyse anisotroper Mehrschichtverbunde mit symmetrischem und un-symmetrischem Strukturaufbau*, Technische Universität Clausthal, Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Diss., 1999
- [8] MATTHECK, Claus ; BURKHARDT, S.: A new method of structural shape optimization based on biolo-



gical growth. In: *International Journal of Fatigue* 12 (1990), Nr. 3, S. 185–190

- [9] NEUBER, H.: Der zugbeanspruchte Flachstab mit optimalem Querschnittsübergang. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 35 (1969), Nr. 1, S. 29–30
- [10] NEUBER, Heinz: *Kerbspannungslehre*. 3., völlig neu bearb. u. erw. Aufl. Springer, 1985
- [11] SCHNACK, Eckard: Optimierung von Zuglaschen. In: *Konstruktion im Maschinen- Apparate- und Gerätebau* 30 (1978), Nr. 7, S. 277–281
- [12] THOMPSON, D'Arcy W.: *On Growth and Form*. 1. Auflage. Cambridge : Cambridge University Press, 1916
- [13] UKADGAONKER, Vijay G. ; RAO, D.K. N.: A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under inplane loading. In: *Composite Structures* 49 (2000), S. 339–354
- [14] WHITNEY, J. M. ; NUISMER, R. J.: Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations. In: *Journal of Composite Materials* 8 (1974), July, S. 253–265