

# Berechnung des nichtlinearen Verhaltens von lagerlosen Rotorblättern mit beliebig verteilten Blatteigenschaften

Florian Sellmann, Andreas Büter

Fraunhofer Institut für Betriebsfestigkeit und Systemzuverlässigkeit (LBF)  
Bartningstraße 47, 64289 Darmstadt  
Tel.: +49 6151 705277; E-Mail: bueter@lbf.fhg.de

**Zusammenfassung** Die Auftriebsmittel eines Drehflüglers oder die Rotorblätter einer Windkraftanlage sind als schlanke umströmte, elastische Strukturen in ihrem statischen und dynamischen Verhalten wesentlich von der umgebenden Aerodynamik beeinflusst. Unter Zuhilfenahme einer mechanischen Betrachtung verhalten sich diese Strukturen wie rotierende Balken, welche sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben lassen. Die sich daraus ergebenden drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen und die sich einstellenden Eigenformen sind wesentlich von der Verteilung der Blatteigenschaften, wie z.B. der Massen- und Steifigkeitsverteilung beeinflusst. Auch der Abstand von Schwerachse zur elastischen Achse kann über die Blattlänge variieren, was für das dynamische Verhalten der Gesamtstruktur ebenfalls von Bedeutung ist. Eine ganzheitliche physikalische Beschreibung und damit die Auslegung derartiger aeroelastischer Strukturen ist letztlich nur unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen mit der umgebenden Aerodynamik sinnvoll. Hierbei können sich die aerodynamischen Randbedingungen beim Hubschrauber systembedingt und bei der Windkraftanlage witterungsbedingt jedoch sehr stark ändern.

Zur ersten Bewertung derartiger schwingender, rotierender Systeme wird ein Campbell Diagramm herangezogen, in dem die strukturdynamisch bedingten Eigen- und die Erregerfrequenzen über die Drehzahl dargestellt sind. Treten z.B. Überschneidungen der rotorharmonischen Drehzahlen und den Eigenfrequenz bzw. deren Vielfachen im Betriebspunkt auf, so ist im Betrieb mit starken Vibrationen zu rechnen.

Je genauer die Beschreibung durch die o.g. Differentialgleichungen erfolgt, desto aussagekräftiger sind Campbell - Diagramm und weitere strukturdynamische Betrachtungen.

Nach einer kurzen Beschreibung der für Rotorblattschwingungen wesentlichen physikalischen Zusammenhänge, soll im Rahmen dieser Veröffentlichung ein numerisches Berechnungsverfahren vorgestellt werden, mit dem sich sowohl das lineare als auch das nichtlineare Verhalten von lagerlosen Rotorblättern mit beliebig verteilten Blatteigenschaften berechnen läßt.

Abschließend erfolgt eine Ergebnisdarstellung; eine Gegenüberstellung des gezeigten Verfahrens mit anderen Methoden steht noch aus.

## 1 Einleitung

Bei der strukturdynamischen Vorauslegung von Rotorblättern ist zum einen die Kenntnis der wirkenden Kräfte am Rotorblatt sowie die Kenntnis der drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen von großer Bedeutung. Um vor allen

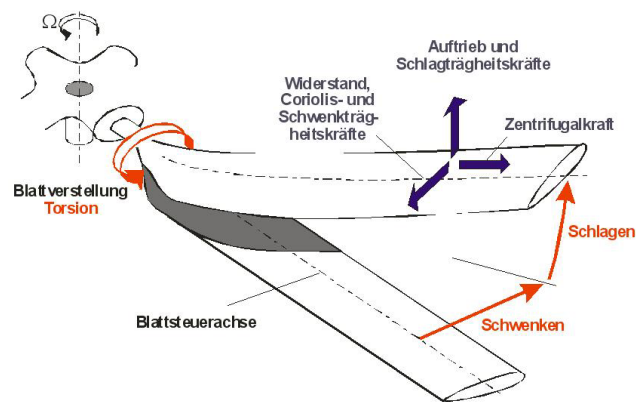


Abbildung 1. Verformungen und Kräfte am Rotorblatt

den Eigenfrequenzen während des Auslegungsprozesses graphisch habhaft zu werden, bedient man sich eines sogenannten Campel-Diagramms, in dem die strukturdynamisch bedingten Eigen- und die Erregerfrequenzen über die Drehzahl dargestellt sind. Ziel bei der Aus-

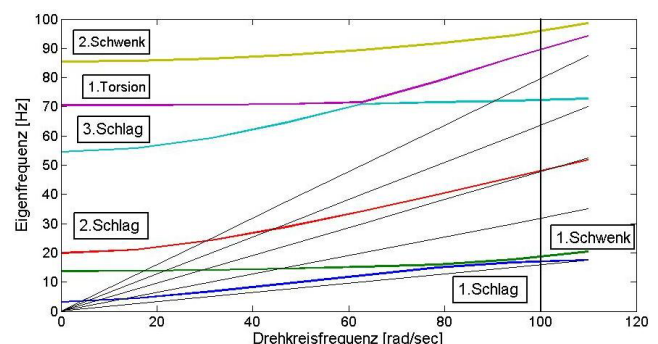


Abbildung 2. Campbell - Diagramm

legung ist zu vermeiden, dass es im Betriebspunkt zu Überschneidungen der rotorharmonischen Drehzahlen und den Eigenfrequenzen bzw. deren Vielfachen kommt. Die

Eigenfrequenzen erhält man wie üblich durch das Lösen von Differentialgleichungen; je genauer diese formuliert sind, desto aussagekräftiger ist das Campell - Diagram für weitere strukturdynamische Überlegungen.

Kritisch angemerkt sei an dieser Stelle, dass die detaillierter formulierte Differentialgleichung nicht zwangsläufig das probateste Mittel zur Berechnung darstellt. Letztlich muss zwischen Aufwand und Nutzen bei der Berechnung abgewogen werden. Im Rahmen dieser Veröffentlichung soll das Differentialgleichungssystem von Hodges/Dowell unter Mitberücksichtigung seiner nichtlinearen Komponenten zugunsten einer geschlosseneren Lösung berechnet werden.

Die Rechnung lässt sich in 3 Schritte gliedern:

1. Umformung der Differentialgleichung in Zustandsgleichungen
2. Integration des nichtlinearen Differentialgleichungssystems mittels des Integrationsmatrizenverfahrens liefert ein nichtlineares Gleichungssystem.
3. Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems
  - (a) Statische nichtlineare Rechnung unter Weglassung der zeitvarianten Terme
  - (b) Dynamische lineare Rechnung unter Einbeziehung der Lösung der statischen nichtlinearen Rechnung

Abschließend erfolgt eine kurze Darstellung und Interpretation bzw. Bewertung der Ergebnisse sowie ein Ausblick über weitere Schritte hinsichtlich der Berechnung elastischer Probleme

## 2 Physikalische Interpretation des gekoppelten Differentialgleichungssystem

Die im Folgenden beschriebenen Berechnungen basieren auf dem von Hodges/Dowell hergeleiteten, nichtlinearen Differentialgleichungssystem für vorverwundene Rotorblätter mit beliebig verteilten Blatteigenschaften. Aerodynamische Kräfte sind im Folgenden nicht berücksichtigt. Der eingebaute Konuswinkel und der Abstand der zwischen den Flächenschwerpunkten und den Schubmittelpunkten wurden im weiteren zu Null angenommen. Die unabhängigen Variablen sind die Spannweitenkoordinate  $r$  und die Zeit  $t$ . Das nichtlineare Differentialgleichungssystem lässt sich somit wie folgt angeben:

### Längung (U)

$$(1) \quad 0 = -P' + m'\ddot{u} - \Omega^2 m' r - 2\Omega m' \dot{v}$$

### Biegung - Schwenk (LL)

$$(2) \quad 0 = \{Pv'\}' + \{BL1v'' + BFLw''\}'' + m'\ddot{v} - m'e \sin \theta \ddot{\phi} - \{\Omega^2 m' r e (\sin \theta \phi - \cos \theta) - 2\Omega m' e \cos \theta \dot{v}\} + \Omega^2 m' r (\sin \theta \phi - \cos \theta) - \Omega^2 m' v + 2\Omega m' \dot{u} - 2\Omega m' e (\dot{v}' \cos \theta + \dot{w}' \sin \theta)$$

### Biegung - Schlag (F)

$$(3) \quad 0 = \{Pw'\}' + \{BF1w'' + BFLv''\}'' + m'\ddot{w} + m'e \cos \theta \ddot{\phi} + \{\Omega^2 m' r e (\cos \theta \phi + \sin \theta) - 2\Omega m' e \sin \theta \dot{v}\}'$$

### Torsion (T)

$$(4) \quad 0 = \{K_A^2(\theta' + \phi')P - GJ\phi' + K_{\phi u}u'\}' - I_{\theta'}\ddot{\theta} + \Omega^2 K_{md}(\cos 2\theta \phi + \cos \theta \sin \theta) + (EI_{z'} - EI_{y'}) \cos \theta \sin \theta (v'^2 - w'^2) + (EI_{z'} - EI_{y'} \cos 2\theta v'' w'') - m'e(\cos \theta \ddot{w} - \sin \theta \ddot{v}) + \Omega^2 m' r e (\cos \theta w' - \sin \theta v') + \Omega^2 m' e \sin \theta v$$

mit

$$(5) \quad P = EA \left( u' + \frac{w'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + K_A^2 \theta' \phi' \right) + K_{\theta u} \phi'$$

$$BF1 = [EI_{y'} + (EI_{z'} - EI_{y'}) \sin^2 \theta]$$

$$BL1 = [EI_{y'} - (EI_{z'} - EI_{y'}) \sin^2 \theta]$$

$$BFL = (EI_{z'} - EI_{y'}) \sin^2 \theta$$

$$K_A = \sqrt{\frac{I_{y'} + I_{z'}}{A}}$$

$$K_{md} = I_{\beta'} - I_{y'}$$

Gleichung (5) beinhaltet die aus der elastischen Verformung herrührenden Längskräfte im Rotorblatt. Die Massenkkräfte lassen sich aus Gleichung wie folgt errechnen.

$$P = \int_r^R m'(x) \ddot{u} dx - \Omega^2 \int_r^R m'(x) r dx - 2\Omega \int_r^R m'(x) \dot{v}(x) dx$$

Eingesetzt in Gleichung (2) und (3) wird die physikalische Bedeutung der Komponenten  $Pw''$  und  $Pv''$  deutlich. Sie beinhalten die aus Trägheits-, Zentrifugal- und Corioliskräften resultierenden Querkraftverteilungen für die Schlag- und Schwenkbewegung. Hierbei ist der Einfluß der Zentrifugalkraft am größten, da sie die effektive Schlag- und Schwenkbiegesteifigkeit beeinflusst, die sich somit mit der Drehzahl  $\omega$  erhöhen. In Tabelle 2 sind die physikalischen Interpretationen der zusätzlich berücksichtigten Komponenten des Differentialgleichungssystems zusammengefaßt.

Biege- & Torsionsmomente durch Zugkräfte z.B. aus Zentrifugal-, Coriolis- und Massenkraft (LL,F,T)	$\{Pv'\}'$ $\{Pw'\}'$ $\{K_A^2(\theta' + \phi')P\}'$
Durch Krümmung erzeugte Torsionsmomente (T)	$(EI_{z'} - EI_{y'}) \cos \theta \sin \theta v'^2$ $-(EI_{z'} - EI_{y'} \cos \theta \sin \theta w'^2)$ $+(EI_{z'} - EI_{y'} \cos 2\theta v'' w'')$

Tabelle 1: Physikalische Interpretation der Komponenten des DGL-Systems

Die unterstrichenen nichtlinearen Komponenten des Differentialgleichungssystems sind die am gekrümmten Balken entstehenden Torsionsmomentenanteile und die Biege-

bzw. Torsionsmomentenanteile durch die Zugkräfte. Hierbei sind es die Coriolis- und Massenträgheitskräfte, die nichtlineare Komponenten in den Bewegungsdifferentialgleichungen erzeugen.

### 3 Vorgehen bei der Berechnung

Unter der Annahme kleiner statischer und dynamischer Verformungen wird wie oben bereits erwähnt zur Berechnung der Rotorblattverformungen mittels des Integrationsmatrizenverfahrens zunächst das Differentialgleichungssystem nach Hodges Dowell (Gleichung (1) bis (4)) in Zustandsgleichungen umgeformt.

#### 3.1 Umformung in Zustandsgleichungen

Erklärtes Ziel bei der Umformung ist ein Gleichungssystem der Form

$$(6) \quad [X'] = [M][\ddot{X}] + [D][\dot{X}] + [K][X] + [B_{ext}] + [C_{nl}]$$

mit

- $[X] \triangleq$  Zustandsvektor
- $[M] \triangleq$  Massenträgheitsmatrix
- $[D] \triangleq$  Dämpfungsmatrix
- $[K] \triangleq$  Steifigkeitsmatrix
- $[B_{ext}] \triangleq$  Externer Lastvektor
- $[C_{nl}] \triangleq$  Nichtlineare Anteile

Die Umformung der Differentialgleichungen für Schlag- und Schwenkbiegung erfolgt unter Zuhilfenahme der Differentialgleichung der elastischen Linie.

$$(7) \quad [EI_y(x)w''(x)]'' = q(x)$$

wobei  $y$  die Trägheitsachse des betrachteten Querschnitts darstellt. Integration von (7) liefert unter Verwendung der entsprechenden Randbedingungen

$$(8) \quad [EI_y(x)w''(x)]' = -Q(x) = \int q(x)dx,$$

$$(9) \quad EI_y(x)w''(x) = -M(x) = -\int Q(x)dx.$$

Hieraus ergeben sich mit

$$(10) \quad Q(x)' = q(x),$$

$$(11) \quad M(x)' = Q(x),$$

$$(12) \quad \beta(x)' = M(x)$$

und

$$(13) \quad w'(x) = \beta(x)$$

jeweils 4 Differentialgleichungen 1.Ordnung für die Darstellung der Schwenk- und Schlagbiegung in Zustandsgleichungen. Mittels des Hookeschen Gesetzes und

$$(14) \quad v'(x) = \frac{M_T(x)}{GI_T(x)}$$

ergeben sich jeweils 2 Differentialgleichungen 1.Ordnung für die Darstellung der Längung und der Torsion durch Zustandsgleichungen.

Angewendet auf das Differentialgleichungssystem von Hodges/Dowell liefert dies somit insgesamt 12 Zustandsgleichungen:

**Längung:**

$$(15) \quad P' = m'\ddot{u} - \Omega^2 m' r - 2\Omega m' \dot{v} + U_{11} \cdot \left(\frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2\right)$$

$$(16) \quad u' = U_{11}P + U_{12}H$$

**Schwenk:**

$$(17) \quad M_{bL} = -F_{QL} - \Omega^2 \int_r^R m' x dx \gamma + 2\Omega m' e \cos \theta \dot{v} - \Omega^2 m' r e (\sin \theta \phi - \cos \theta)$$

$$(18) \quad F'_{QL} = m' \ddot{v} - m' e \sin \theta \ddot{\phi} + \Omega^2 m' r (\sin \theta \phi - \cos \theta) + 2\Omega m' \dot{u} - \Omega^2 m' v - 2\Omega m' e (\dot{\gamma} \cos \theta + \dot{\beta} \sin \theta) + \int_0^R m \ddot{u} \gamma' - \int_0^R 2m' \Omega \dot{v} \gamma' + U_{12} \phi' \gamma$$

$$(19) \quad v' = \gamma$$

$$(20) \quad \gamma' = K_V M_{bL} - K_{VW} M_{bF}$$

**Schlag**

$$(21) \quad M'_{bF} = -F_{QF} + \Omega^2 \int_r^R m' x dx \beta - 2\Omega m' e \sin \theta \dot{v} + \Omega^2 m' r e (\cos \theta \phi + \sin \theta) + \int_0^R m \ddot{u} \beta' - \int_0^R 2m' \Omega \dot{v} \beta' + U_{12} \phi' \beta$$

$$(22) \quad F'_{QF} = m' \ddot{w} + m' e \cos \theta \ddot{\phi}$$

$$(23) \quad w' = -\beta$$

$$(24) \quad \beta' = K_W M_{bF} - K_{VW} M_{bL}$$

**Torsion**

$$(25) \quad H' = -I'_\theta \ddot{\phi} + \Omega^2 K_{md^2} (\cos 2\theta \Phi + \cos \theta \sin \theta) + KA^2 U_{11} \theta' \left(\frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2\right) + KA^2 U_{11} \left(u' + \frac{1}{2}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2\right) \theta' + T_1 (v'^2 - w'^2) + T_2 v'' w''$$

$$(26) \quad \phi' = U_{12}P + U_{22}H$$

mit

$$\begin{aligned} ey &= [EI_{Y'} \cos^2 \theta + EI_{Z'} \sin^2 \theta]; & K_V &= \frac{e_y}{e_y e_z - e_{yz}^2}; \\ ez &= [EI_{Z'} \cos^2 \theta + EI_{Y'} \sin^2 \theta]; & K_W &= \frac{e_z}{e_y e_z - e_{yz}^2}; \\ eyz &= [EI_{Z'} - EI_{Y'}] \sin \theta \cos \theta; & K_{VW} &= \frac{e_{yz}}{e_y e_z - e_{yz}^2}; \end{aligned}$$

und

$$U_{11} = \frac{GJ}{EA \cdot GJ - K_{\phi u^2}}; U_{11} = \frac{GJ}{EA \cdot GJ - K_{\phi u^2}}; U_{11} = \frac{GJ}{EA \cdot GJ - K_{\phi u^2}};$$

In Matrizenform dargestellt ergeben sich diese zu:

$$(27) \quad \begin{aligned} [X'] &= [B_{nl}][diag(\phi')][diag(X)][X] \\ &+ [M_{nl}][diag(\ddot{u})][X] \\ &+ [D_{nl}][diag(\dot{v})][X] \\ &+ [K_{nl}][diag(\phi')][X'] \\ &+ [A_{nl}][diag(X)][X] \\ &+ [E_{nl}][X'] \\ &+ [K][X] \\ &+ [M][\ddot{X}] \\ &+ [D][\dot{X}] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} [diag(X)] &\triangleq \text{Diagonalmatrizen mit Zustandsgrößen auf der} \\ &\quad \text{Hauptdiagonalen} \\ [X_{nl}] &\triangleq \text{Koeffizientenmatrizen} \end{aligned}$$

### 3.2 Berechnung des nichtlinearen Gleichungssystems

Die Berechnung des nichtlinearen Gleichungssystems nach der Integration mittels des Integrationsmatrizenverfahrens (siehe Anhang A) erfolgt anhand des folgenden Rechenschemas:

Gegeben seien zwei beliebige Größen

$$x(t) = x_0 + dx(t)$$

und

$$y(t) = y_0 + dy(t)$$

mit

$$\begin{aligned} x_0 &\triangleq \text{Zeitinvariante Größe } x \\ y_0 &\triangleq \text{Zeitinvariante Größe } y \\ dx(t) &\triangleq \text{Zeitvariante Größe } x \\ dy(t) &\triangleq \text{Zeitvariante Größe } y \end{aligned}$$

Multiplikation der beiden Größen liefert

$$(28) \quad \begin{aligned} x(t) \cdot y(t) &= (x_0 + dx(t)) \cdot (y_0 + dy(t)) \\ &= (x_0 \cdot y_0) + (dx(t) \cdot y_0) \\ &\quad + (dy(t) \cdot x_0) + (dx(t) \cdot dy(t)) \end{aligned}$$

Mit der Annahme  $dy(t) \cdot dx(t) \approx 0$  wird (28) zu

$$(29) \quad x(t) \cdot y(t) = (x_0 \cdot y_0) + (dx(t) \cdot y_0) + (dy(t) \cdot x_0)$$

Unter Weglassung der zeitvarianten Terme wird (29) zu

$$(30) \quad x(t) \cdot y(t) = x_0 \cdot y_0$$

und bildet damit die Basis für die nichtlineare Rechnung, welche ausschließlich die statischen Verformungsgrößen des Systems berechnet.

Die Lösung der nichtlinearen Rechnung fungiert im nächsten Schritt als Eingangsgröße für die lineare dynamische Rechnung und die finale Eigenwertbetrachtung.

### 3.3 Nichtlineare statische Rechnung

Unter Weglassung der zeitvarianten Terme und deren Ableitungen bzw. der Betrachtung der ausschließlich statischen Verformungen ergibt sich Gleichung (27) zu

$$(31) \quad \begin{aligned} [X'] &= [B_{nl}][diag(\phi')][diag(X)][X] \\ &+ [K_{nl}][diag(\phi')][X'] \\ &+ [A_{nl}][diag(X)][X] \\ &+ [E_{nl}][X'] \\ &+ [K][X]. \end{aligned}$$

Mittels des Integrationsmatrizenverfahrens erfolgt die Integration von (31). Das daraus entstehende nichtlineare Gleichungssystem

$$(32) \quad \begin{aligned} [X] &= [L][B_{nl}][diag(\phi')][diag(X)][X] \\ &+ [L][K_{nl}][diag(\phi')][X'] \\ &+ [L][A_{nl}][diag(X)][X] \\ &+ [L][E_{nl}][X'] \\ &+ [L][K][X] \\ &+ [P_0] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} [P_0] &\triangleq \text{Integrationskonstante} \\ [L] &\triangleq \text{Integrationsmatrix} \end{aligned}$$

ist nicht geschlossen lösbar und muß daher iterativ berechnet werden.

Dies geschieht mittels der Newton-Raphsonsche Methode, welche ein in der numerischen Mathematik standardisiertes Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme ist.

In (32) sind Ableitungen der Zustandsgrößen nach dem Ort enthalten, welche bei der weiteren Berechnung berücksichtigt werden müssen. Diese Ableitungen erfolgten mittels eines numerischen Differentiationsverfahrens, welches auf der Newtonschen Formel

$$(33) \quad \begin{aligned} h \cdot f'(x_v) &= \Delta^1 f(x_v) - \frac{1}{2} \Delta^2 f(x_v) + \frac{1}{3} \Delta^3 f(x_v) \\ &\quad - \frac{1}{4} \Delta^4 f(x_v) + \frac{1}{5} \Delta^5 f(x_v) + \dots \end{aligned}$$

mit den Identitäten

$$\begin{aligned} f(x_v) &\triangleq \text{Funktionswert der Funktion } f(x) \text{ an der Stelle } x_{nu} \\ f'(x_v) &\triangleq \text{Ableitung der Funktion } f(x) \text{ an der Stelle } x_{nu} \\ h &\triangleq \text{Stützstellenabstand zwischen den } N \\ &\quad \text{äquidistanten Stützstellen} \\ \Delta &\triangleq \text{Gewichtungsfaktor} \end{aligned}$$

basiert.

Umformung von (33) führt auf

$$(34) \quad f'(x_v) = \underbrace{\frac{\Delta^1 - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \dots}{h}}_{d(h)} \cdot f(x_v)$$

$d(h)$  bildet hier einen sog. Differentiationsfaktor, welcher unabhängig von den Funktionswerten  $f(x_v)$  bestimmt werden kann und sich anhand der zuvor gewählten Diskretisierung ergibt.

Angewendet auf den Zustandsvektor in Gleichung (32) ergibt sich mit (34) die Diagonalmatrix  $[D(h)]_{[12n \times 12n]}$ , deren Hauptdiagonale mit den entsprechenden Gewichtungsfaktoren belegt ist. Analog zu dem im Anhang A beschriebenen Integrationsmatrizenverfahren erfolgt eine Differentiation durch Multiplikation mit der o.g. Differentiationsmatrix. Eine ausführliche Beschreibung der Herleitung und Berechnung verschiedener Differentiationsmatrizen sei auf [5] verwiesen.

Gleichung (32) ergibt sich unter Anwendung von  $[D(h)]$  und einigen Umformungen zu

$$(35) \quad 0 = [A] \cdot [X^3] + [B] \cdot [X^2] + [C] \cdot [X] + [D]$$

und lässt sich nun mittels des o.g. Newton-Verfahrens lösen.

### 3.4 Strukturdynamische Berechnung des linearisierten Systems

Die lineare dynamische Rechnung erfolgt nun unter Berücksichtigung der zeitvarianten Terme, wobei die berechneten statischen Verformungen als Eingangsgröße fungieren. Wahlweise können auch die Ergebnisse der linearisierten statischen Rechnung als Eingangsgröße für die dynamische Rechnung dienen. Somit ist es möglich, die dynamischen Verformung wahlweise linear oder nichtlinear bzw. am unverformten oder verformten System zu berechnen. (27) ergibt sich nach einmaliger Integration und anschließender Umformung zu

$$(36) \quad [M][\ddot{X}] + [D][\dot{X}] + [K][X] = 0$$

und bildet damit die Ausgangsgleichung für ein aus der Schwingungslehre bekanntes Eigenwertproblem, dessen Lösung sich sich im Verlauf der dynamischen Rechnung angenommen wurde.

Durch Einsetzen des exponentiellen Lösungsansatzes  $[X] = [\varphi^d]Ce^{\lambda t}$  in (36) ergibt sich mit

$$(37) \quad (\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])[\varphi^d] = 0$$

mit

$$[\varphi^d] \triangleq \text{Eigenvektoren} \\ \lambda \triangleq \text{Eigenwerte}$$

ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Eigenvektoren  $\varphi^d$ .

Aus der Bedingung für nichttriviale Lösungen  $\varphi^d \neq 0$  folgt die charakteristische Gleichung:

$$(38) \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K]) = 0$$

Deren Lösung sind die Eigenfrequenzen des Systems, woraus sich dann mittels (37) die zugehörigen Eigenformen berechnen lassen.

Die berechneten Eigenfrequenzen über die Rotordrehzahl dargestellt bilden das sog. Campbell-Diagramm, anhand welchem der Rotor einer ersten schwingungstechnischen Bewertung unterzogen werden kann.

## 4 Abschließende Betrachtung

Zur strukturdynamischen Vorauslegung lagerloser Rotorblätter mit beliebig verteilten Blatteigenschaften wurde in Kapitel 3 ein Lösungsweg gezeigt, welcher grundsätzlich gesehen die folgenden Berechnungsmöglichkeiten bietet:

1. **“Lineare statische Rechnung“:** Nach der Umformung des linearisierten Differentialgleichungssystem nach Hodges/Dowell [6] in die Zustandsraumdarstellung erfolgt die numerische Integration mittels des in [4] beschriebenen Integrationsmatrizenverfahrens. Unter Berücksichtigung der zeitvarianten Terme folgt ein lineares Gleichungssystem, welches als Lösung die statischen Verformungen des Rotorblattes enthält.
2. **“Lineare dynamische Rechnung“:** Die Berücksichtigung der zeitvarianten Terme führt auf ein Eigenwertproblem, dessen Lösung die Eigenfrequenzen und Eigenformen des statisch unverformten Systems bildet.
3. **“Nichtlineare statische Rechnung“:** Unter Einbeziehung der nichtlinearen Anteile erfolgt die Umformung des Differentialgleichungssystem nach Hodges/Dowell in die Zustandsraumdarstellung. Nach der numerischen Integration mittels des in [4] hergeleiteten Integrationsmatrizenverfahrens folgt unter Weglassung der zeitvarianten Terme ein nichtlineares Gleichungssystem, welches sich mittels des Newton-Verfahrens iterativ lösen lässt und als Lösung die statischen Verformungen des Rotorblattes enthält. Als Startvektor fungiert hier z.B. der Lösungsvektor aus der linearen statischen Rechnung.
4. **“Nichtlineare dynamische Rechnung“:** Unter Einbeziehung der nichtlinearen Anteile ergibt sich aus Unterpunkt 2 ein erweitertes Eigenwertproblem, dessen Lösung die Eigenfrequenzen und Eigenformen des nichtlinearen statisch vorverformten Systems bildet.

Die Unterpunkte 1 und 2 wurden in [2] behandelt, daher wurde die Betrachtung bzw. Berechnung hier auf die Unterpunkte 3 und 4 beschränkt. Als Basis für die Berechnung diente das Modellrotorblatt einer BO-105 mit den folgenden Daten:

Länge: 2m

Profil: NACA23012

Blatttiefe: 11,5cm

Maximaldrehzahl: 110 rad/sec

Die graphische Darstellung weiterer Blatteigenschaften befinden sich im Anhang B.

### 4.1 Statische Rechnung

Bei der nichtlinearen statischen Berechnung des Modellrotorblattes einer BO-105 fällt auf, dass die Lösung gegen die Lösung des linearisierten Systems strebt. Dies liegt daran, dass bei diesem kurzen Blatt in der Praxis keine große Vorverformung vorliegt und des weiteren keine Luftkräfte, die Verformungen erzeugen, in der Berechnung berücksichtigt wurden. Bei größeren Strukturen wie z.B. Windkraftanlagen oder größeren Hubschraubern und der Berücksichtigung von Luftkräften werden die nichtlinearen Anteile gewichtiger; da zum Zeitpunkt dieser Arbeit leider keine Daten über solche Strukturen vorlagen besteht zur finalen Verifikation noch Handlungsbedarf. Die Verläufe der statischen Verformungen des BO-105 Modellrotorblattes sind in den Abbildungen 11 bis 18 im Anhang C dargestellt.

## 4.2 Dynamische Rechnung

Zur Verifikation der dynamischen Rechnung sind in Tabelle 2 die Ergebnisse der Eigenwertberechnung im linearen und nichtlinearen Fall bei einer Frequenz von 110 rad/sec gegenüber gestellt. Markiert sind jeweils die Einträge, welche stark differieren. Durch Erhöhung der Stützstellenzahl stellt sich schon im linearen Fall eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse ein. Durch die Zunahme der nichtlinearen Anteile kann eine weitere Verfeinerung erreicht werden, dass diese sehr klein ist, liegt daran, dass die statischen Verformungen, welche ja in die Berechnung der Eigenfrequenzen einfließen sehr klein sind. Die Berechnung größerer vorverformter Strukturen würde den Einfluss der nichtlinearen Anteile verdeutlichen; somit besteht auch hier noch Handlungsbedarf, da zum Zeitpunkt dieser Arbeit noch keine Daten über solche Strukturen vorlagen. Aus den Eigenfrequenzen läßt sich schließlich das FAN-Diagramm konstruieren, welches sich im Anhang C befindet.

	Lineare Rechnung N=10	Lineare Rechnung N=30	Nichtlineare Rechnung N=30
1.Schlag	17,299249480037	17,559940570685	17,559940570685
2.Schlag	20,357693684366	20,448821943776	20,448821943739
1.Schwenk	51,575799207725	51,894882138102	51,894882135714
2.Schwenk	97,721476429961	98,536614766730	98,536614766723
3.Schwenk	153,104010542391	154,460796383548	154,460796415124
4.Schwenk	225,216231172826	226,299418201327	226,299418194959
1.Torsion	71,035830748666	72,605133614501	72,605133614361
2.Torsion	93,417353961493	94,244834337358	94,244834337309
3.Torsion	206,535853798428	211,787123670403	211,787123666817
4.Torsion	247,820775930082	249,413032524498	249,413032524610

Tabelle 2: Eigenfrequenzen des einseitig eingespannten Balken mit 10 und 30 Stützstellen linear bzw. nichtlinear berechnet

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Bei der mechanischen Betrachtung rotierender Balken mittels gewöhnlicher Differentialgleichungen werden die drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen und die sich einstellenden Eigenformen wesentlich von der Verteilung der Blatteigenschaften, wie z.B. der Massen- und Steifigkeitsverteilung beeinflusst. Auch der Abstand von Schwerachse zur elastischen Achse kann über die Blattlänge variieren, was für das dynamische Verhalten der Gesamtstruktur ebenfalls von Bedeutung ist. Zur ersten Bewertung derartiger schwingender, rotierender Systeme wird ein Campbell Diagramm herangezogen, in dem die strukturdynamisch bedingten Eigen- und die Erregerfrequenzen über die Drehzahl dargestellt sind. Ziel bei der ersten rotordynamischen Optimierung ist die Vermeidung von Überschneidungen der rotorharmonischen Drehzahlen und den Eigenfrequenz bzw. deren Vielfachen im Betriebspunkt, da sonst mit starken Vibrationen zu rechnen ist. Je genauer die Beschreibung durch die o.g. Differentialgleichungen erfolgt, desto aussagekräftiger sind Campbell - Diagramm und

weitere strukturdynamische Betrachtungen.

Unter Berücksichtigung der nichtlinearen Anteile des Differentialgleichungssystems nach Hodges/Dowell [6] wurde ein einfaches Berechnungsverfahren gezeigt, mit welchem das statische und dynamische Verhalten von lagerlosen Rotorblättern mit beliebig verteilten Blatteigenschaften berechnet werden kann. Im Zuge der Berechnung wurde das o.g. Differentialgleichungssystem in Zustandsgleichungen umgeformt und mittels eines Integrationsmatrizenverfahrens [4] integriert. Das dadurch entstehende System lieferte unter Berücksichtigung der zeitvarianten Terme ein Eigenwertproblem aus dem sich die drehzahlabhängigen Eigenfrequenzen und die sich einstellenden Eigenformen ergaben. Unter Berücksichtigung der zeitinvarianten Terme ergab sich ein nichtlineares Gleichungssystem, welches iterativ mittels des Newton-Raphsonischen Algorithmus gelöst wurde. Daraus ergaben sich unmittelbar die statischen Verformungen des Rotorblattes.

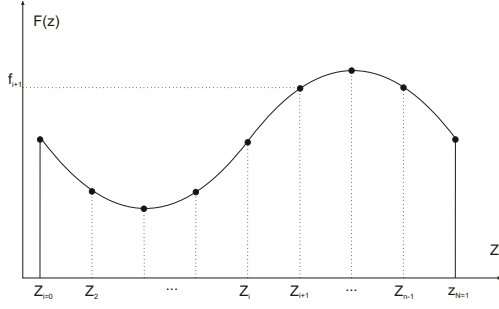
Die in Kapitel C gezeigten Ergebnisse entstammen einer Berechnung eines Modell-Rotorblattes von 2m Länge einer BO-105. Bei der Betrachtung der Ergebnisse zeigt sich, dass die nichtlinearen Anteile bei den statischen Verformungen bezogen auf die Länge des Blattes relativ klein sind und die nichtlinearen Anteile einen geringen Einfluss auf das Ergebnis haben. Eine nichtlineare Berechnung ist somit in diesem Fall nicht zielführend. Wesentlich aufschlußreicher ist die nichtlineare Berechnung von längeren Rotorblättern oder Blättern von Windkraftanlagen. Da insbesondere bei letzteren Blattlängen von bis zu 65m möglich sind und es somit notwendig ist, die dynamische Betrachtung am vorverformten Blatt durchzuführen, ist eine nichtlineare Berechnung der statischen Verformungen wesentlich aufschlußreicher. Da zum Zeitpunkt dieser Arbeit keine Daten einer solchen Anlage zur Verfügung standen, besteht bezüglich der finalen Verifikation noch Handlungsbedarf. Es gilt des weiteren zu prüfen, ob bei längeren Balkenstrukturen die Stützstellenzahl und somit der numerische Aufwand steigt.

## A Integrationsmatrizenverfahren

Allgemein gilt, dass sich m Differentialgleichungen n-ter Ordnung in  $[m \times n]$  Differentialgleichungen 1.Ordnung umformen lassen. Angewendet auf das Differentialgleichungssystem von Hodges/Dowell ergeben sich nach entsprechender Umformung 12 Differentialgleichungen 1.Ordnung. Durch Integration mittels einer Integrationsmatrix läßt sich dieses Differentialgleichungssystem in ein lineares/nichtlineares Gleichungssystem umformen. Im Folgenden sollen der Aufbau der Integrationsmatrizen und die Anwendung für die Lösung des vorliegenden nichtlinearen Differentialgleichungssystems kurz beschrieben werden. Für eine ausführliche Beschreibung der Herleitung und Berechnung verschiedener Integrationsmatrizen sei auf [4] verwiesen. Eine Funktion  $f(x)$ , welche im Intervall zwischen 0 und 1 definiert ist, lässt sich wie in Abbildung 3 gezeigt in N-1 Teilintervalle aufteilen. Der Verlauf der Funktion kann näherungsweise durch die N Funktionswerte an den Stützstellen der Teilintervallgrenzen in Gestalt des folgenden Vektors beschrieben werden:

$$(39) \quad f(z) \Rightarrow f = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_N]^T$$

Eine in jedem Teilintervall vorgenommene Approximation der Funktion, durch Polynome n-ter Ordnung, erlaubt die folgende



**Abbildung 3.** Einteilung in N-1 Streifenflächen

näherungsweise Integration über ein Teilintervall:

$$(40) \quad i\text{-tes Teilintervall: } \int_{z_i}^{z_{i+1}} f(z) dz \approx \sum_{k=j}^{k=j+n} W_{ik} f_k$$

Hierbei sind  $W_{ik}$  von der Funktion unabhängige Gewichtungsfaktoren. Die natürliche Zahl  $j$  definiert den Startpunkt der  $n+1$  Rasterpunkte, an denen die Funktion  $f(z)$  durch das Polynom  $n$ -ten Grades approximiert ist. Werden diese Gewichtungswerte in eine  $[n \times n]$ -Matrix  $W_m$  zusammengefaßt, so läßt sich die Funktion  $f(z)$ , repräsentiert durch den Vektor  $f$ , wie folgt teilintervallweise integrieren:

$$(41) \quad F = W_m f$$

Der Lösungsvektor  $F$  dieser Multiplikation setzt sich aus den  $N$  Streifenflächen der einzelnen Teilintervalle zusammen.

$$(42) \quad F = \left[ 0, \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz, \int_{z_2}^{z_3} f(z) dz, \int_{z_3}^{z_4} f(z) dz, \dots, \int_{z_{N-1}}^{z_N} f(z) dz \right]$$

Die Stammfunktion  $F(z)$  der Funktion  $f(z)$  wird jedoch durch den Vektor  $F_s$  beschrieben.

$$(43) \quad F_s = \left[ 0, \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz, \int_{z_1}^{z_3} f(z) dz, \int_{z_1}^{z_4} f(z) dz, \dots, \int_{z_1}^{z_N} f(z) dz \right]$$

Dieser die Stammfunktion  $F(z)$  repräsentierende Vektor  $F_s$  kann aus  $F$  durch eine geeignete Summation der Streifenflächen hergeleitet und unter Verwendung von Gleichung (41) wie folgt ermittelt werden:

$$(44) \quad F_s = S \cdot F = S \cdot W_m \cdot f = L \cdot f$$

Durch die Matrix  $S$  wird hierbei die entsprechende Summation der Streifenflächen vorgenommen. Sie ist eine untere Dreiecksmatrix, mit  $S_{ij} = 1$  für  $i \geq j$  und  $S_{ij} = 0$  für  $i < j$ . Die gesuchte Integrationsmatrix  $L$  errechnet sich wie in Gleichung (44) zu ersehen ist, aus der Matrizenmultiplikation zwischen der Summations- und Gewichtungsmatrix. Angewandt auf das vorliegende Differentialgleichungssystem ergibt sich nun zu dessen Lösung die folgende Vorgehensweise:

**Diskretisierung:** Zunächst einmal werden die Differentialgleichungen mit der oberen Integrationsgrenze als Bezugsgröße hinsichtlich der Integrationsvariablen dimensionslos gemacht.

$$\text{z.B. } F'_Q(r) = \frac{dF_Q}{dr} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dF_Q}{dz} = \frac{1}{R} \cdot F'_Q(z) \text{ mit } z = \frac{r}{R}$$

Danach wird basierend auf der in Gleichung (39) dargestellten Diskretisierung einer Funktion  $f(z)$  das den funktionalen Verlauf der Zustandgrößen über das Rotorblatt beschreibende Differentialgleichungssystem in ein Vektordifferentialgleichungssystem umgewandelt. Die gesuchten Funktionen werden hierbei durch die entsprechenden Vektoren repräsentiert.

$$\text{z.B. } F'_Q(r) = Rm' \ddot{w}(r) - RF'_L(r) \implies F'_Q = R\ddot{w} - RF'_L$$

Diese Diskretisierung kommt einer Zerlegung des zu untersuchenden Rotorblattes in  $N-1$  Teilintervallen gleich. Die strukturellen Eigenschaften wie z.B. Steifigkeits- oder Massenverteilung werden, wie auch die Verteilung äußerer Lasten, als bezogene Querschnittsgrößen durch die jeweiligen Werte an den  $N$  Teilintervallsgrenzen beschrieben.  $m'$  entspricht so z.B. einer Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonale die längenbezogenen Massen an den jeweiligen Teilintervallgrenzen enthält.

**Integration:** Die Integration dieses dimensionslosen Differentialgleichungssystems erfolgt durch Vormultiplikation der Integrationsmatrix  $L$ , wobei ein Vektor  $k$  mit Integrationskonstanten eingeführt werden muß.

$$\text{z.B. } F_Q = L \cdot Rm' \cdot \ddot{w} - L \cdot RF'_L + K_Q$$

Diese bei der Integration eingeführten Integrationskonstanten werden mit Hilfe der Randbedingungen berechnet. Da in der Regel für jede Zeile der dazugehörigen Vektordifferentialgleichung dieselben Randbedingungen gelten, sind alle Elemente des Integrationskonstantenvektors gleich. Die Randbedingungen lassen sich mit den Matrizen

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ und } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

berücksichtigen, da sich durch deren Multiplikation mit einem beliebigen Vektor  $f$  z.B. ein konstanter Vektor des jeweiligen Anfangswertes  $f(0) = f_1$  bzw. Endwertes  $f(1) = f_N$  ergibt.

$$B_0 \cdot f = f(0) \text{ bzw. } B_1 \cdot f = f(1)$$

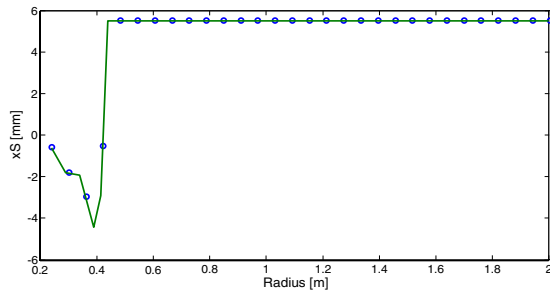
Unter Berücksichtigung der Rotorblatt spezifischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= 0; & P(R) &= 0; & \gamma(0) &= 0; & M_{bL}(R) &= 0; \\ \beta(0) &= 0; & M_{bF}(R) &= 0; & v(0) &= 0; & F_{QL}(R) &= 0; \\ w(0) &= 0; & F_{QF}(R) &= 0; & \phi(0) &= 0; & H(R) &= 0; \end{aligned}$$

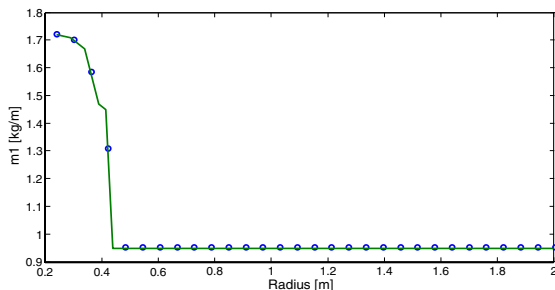
läßt sich mittels des Integrationsmatrizenverfahrens das Differentialgleichungssystem wie in Abschnitt 3 dargestellt diskretisieren und integrieren. Aus dem daraus entstandenen nichtlinearen Gleichungssystem (32) ergeben sich dann im Laufe der weiteren numerischen Berechnung die drehzahlabhängigen statischen Verformungen, die Eigenfrequenzen und -formen, aus welchen sich dann das Campbell-Diagramm konstruieren läßt.

## B Verteilung der Blatteigenschaften

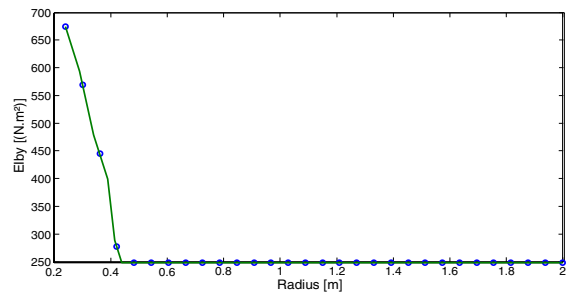
In den folgenden Bildern sind die bei den Rechnungen verwendeten Verteilungen der Blatteigenschaften des Bo105 Modellrotorblattes dargestellt.



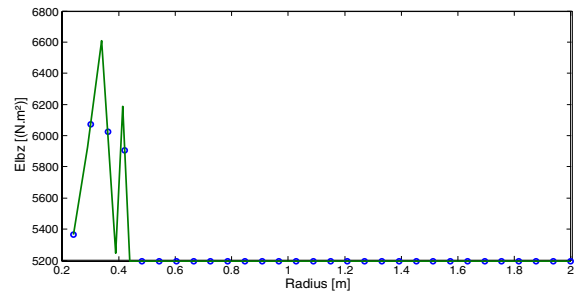
**Abbildung 4.** Abstand elastische Achse - Schwerpunkt des BO-105 Modellrotorblattes



**Abbildung 5.** Massenverteilung des BO-105 Modellrotorblattes



**Abbildung 6.** Schlagbiegesteifigkeitsverteilung des BO-105 Modellrotorblattes



**Abbildung 7.** Schwenkbiegesteifigkeit des BO-105 Modellrotorblattes

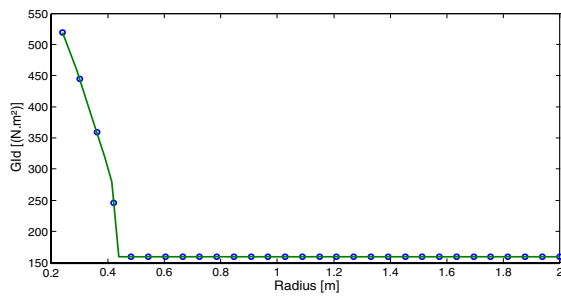
## C Blattverformungen und FAN-Diagramm

### Literatur

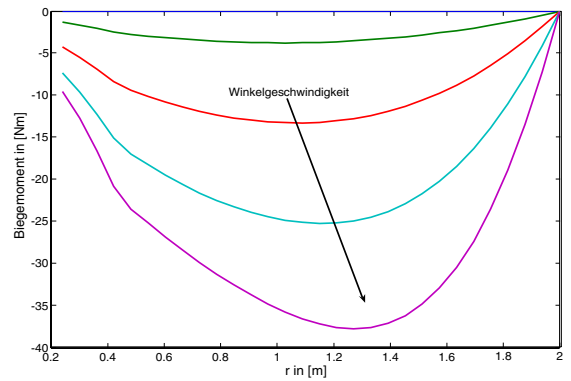
1. Andreas Büter. *Untersuchung adaptiver Konzepte zur Reduktion von Hubschraubervibrationen, zur Minderung des Hubschrauberlärms und zur Steigerung der aerodynamischen Effizienz*. 1997.
2. Dr.A. Büter. Beitrag zur berechnung der dynamik von lagerlosen rotorblättern. 2004.

3. Peter Hagedorn. *Technische Mechanik II - Festigkeitslehre*. Harri Deutsch, 1995.
4. Larry L. Lehmann. Hybrid state vector methods für structural dynamic and aeroelastic boundary value problems. *NASA Contractor Report 3591*, August 1982.
5. F. Nitzsche. A study on the feasibility of using adaptive structures in the attenuation of vibration characteristics of rotary wings. *33. SDM Conference, Adaptive Structure Forum, A Study on the Feasibility of Using Adaptive Structures in the Attenuation of Vibration Characteristics of Rotary* 1992.
6. D.H.Hodges und E.H.Dowell. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. December 1974.

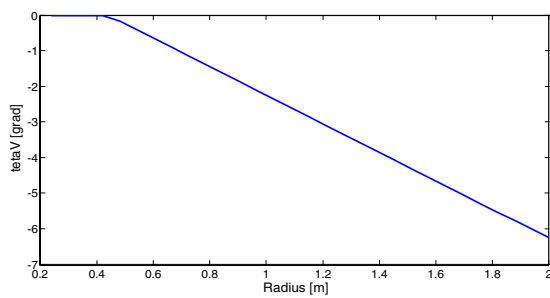




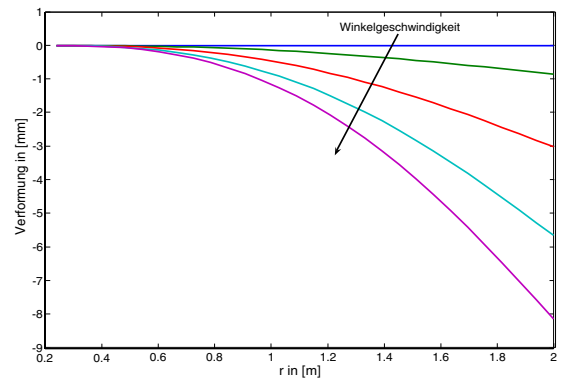
**Abbildung 8.** Torsionssteifigkeitsverteilung des BO-105 Modellrotorblattes



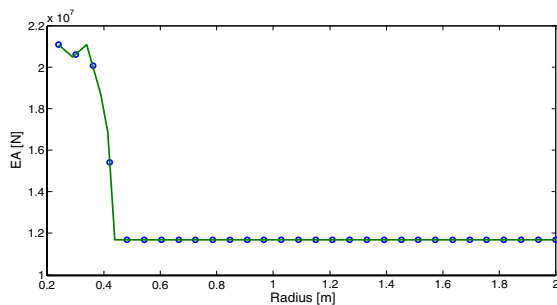
**Abbildung 11.** Schwenkbiegemomentverteilung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



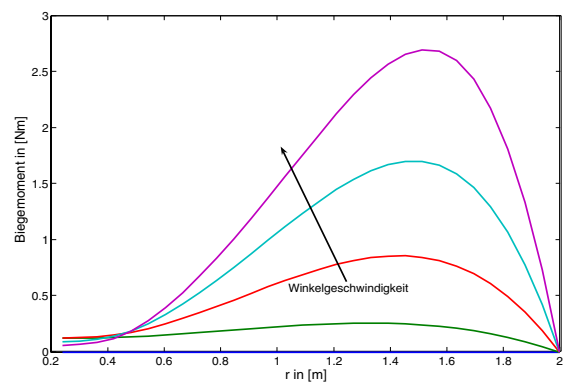
**Abbildung 9.** Vorverwindung des BO-105 Modellrotorblattes



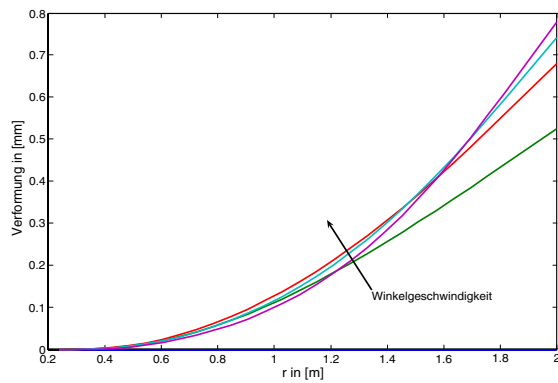
**Abbildung 12.** Schwenkbewegung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



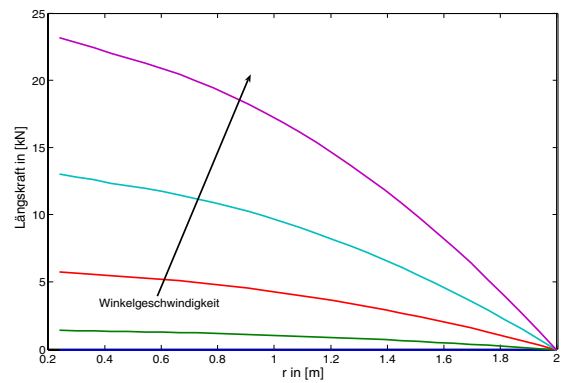
**Abbildung 10.** Längssteifigkeitsverteilung des BO-105 Modellrotorblattes



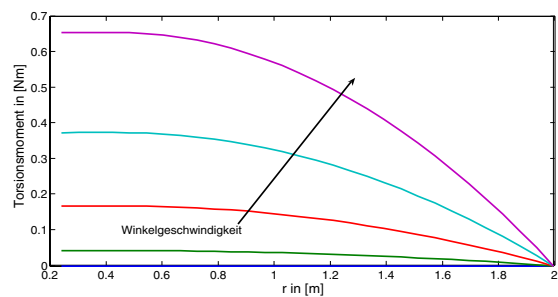
**Abbildung 13.** Schlagbiegemomentverteilung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



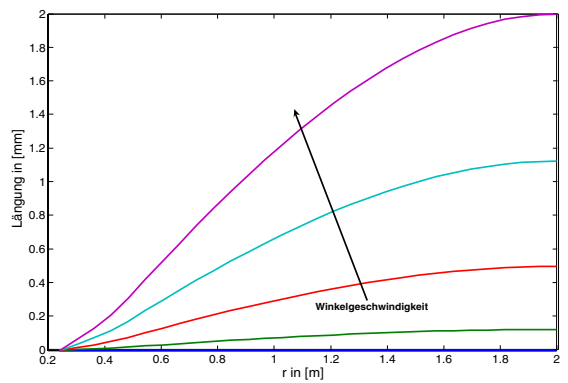
**Abbildung 14.** Schlagbewegung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



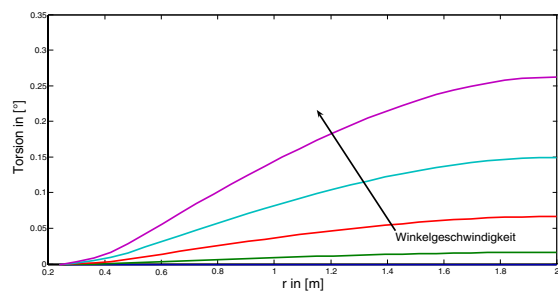
**Abbildung 17.** Längskraftverteilung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



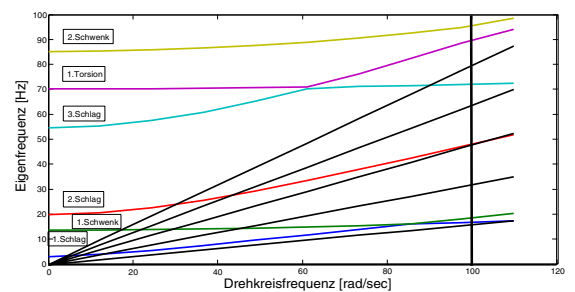
**Abbildung 15.** Torsionsmomentverteilung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



**Abbildung 18.** Längung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



**Abbildung 16.** Verdrehung des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall



**Abbildung 19.** FAN-Diagramm des BO-105 Rotorblattes im nichtlinearen Fall