



## Notiz / Memo

OPerA\_M\_MachzahlKorrektur\_Oswald\_12-12-10.pdf

**Date:** 2012-12-10

**From:**

Dieter Scholz  
Aircraft Design and Systems Group (AERO)  
Department of Automotive  
and Aeronautical Engineering  
Hamburg University of Applied Sciences  
Berliner Tor 9, 20099 Hamburg

**To:**

Members of  
Aircraft Design and Systems Group  
(AERO)

Tel.: +49 40 42875 8825  
Mail: info@ProfScholz.de

**Copy to:**

---

# Vorschlag und grundsätzliche Analyse von Formeln zur Machzahlkorrektur des Oswald-Faktors $e$

## Inhalt

	Symbole .....	2
1	Hintergrund .....	2
2	Erster Vorschlag und dessen Analyse .....	2
3	Zweiter Vorschlag und dessen Analyse .....	6
4	Zusammenfassung .....	7
	Literaturverzeichnis	

## Liste der Symbole

$a$	Parameter
$b$	Parameter
$M$	Machzahl

## Indizes

0	dort wo der Oswald-Faktor Null wird
$comp$	dort wo Kompressibilität nicht mehr vernachlässigbar ist
$e$	Bezug zum Oswald-Faktor
$M$	Bezug zur Machzahl
$PG$	Bezug zu Prandtl-Glauert

## 1 Hintergrund

Die Auswertung von wenigen verfügbaren Polaren von Passagierflugzeugen hat gezeigt, dass ein ganz wesentlicher Einfluss auf den Oswald-Faktor  $e$  aus der Machzahlabhängigkeit kommt.

## 2 Erster Vorschlag und dessen Analyse

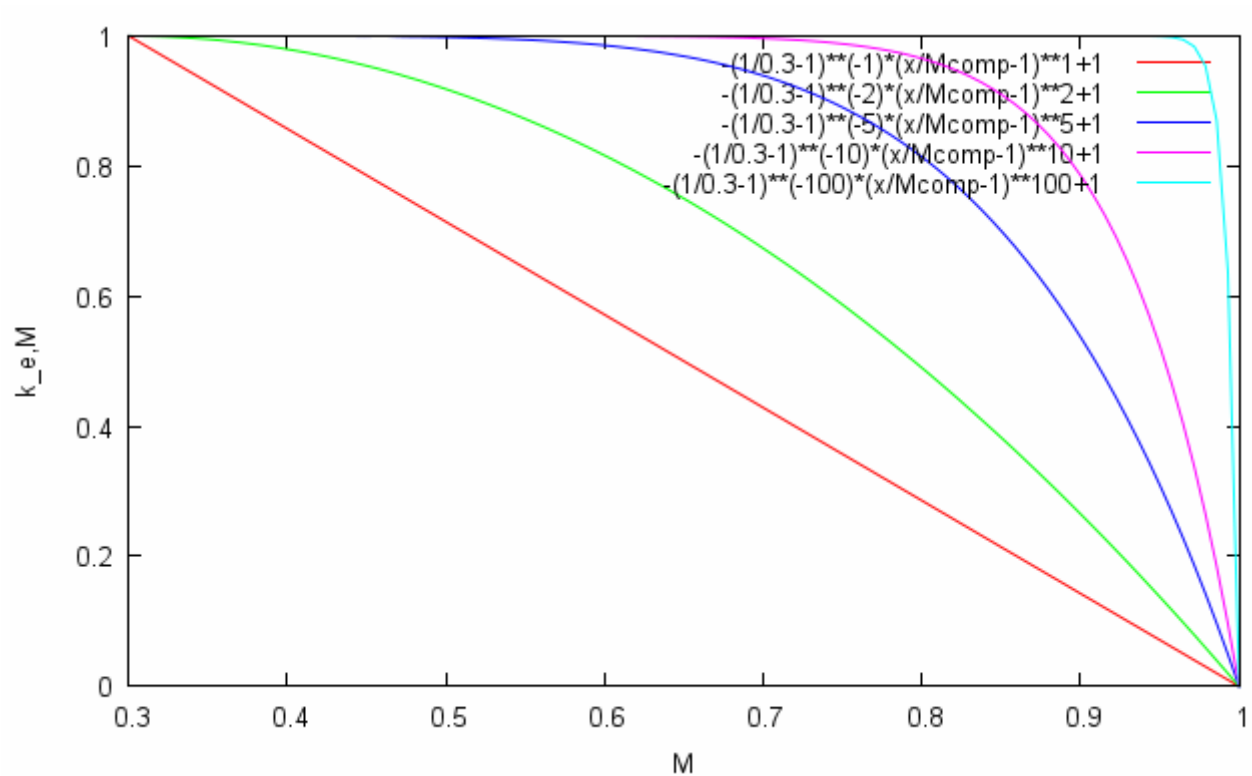
Der erste Vorschlag einer Formel zur Machzahlkorrektur für den Oswald-Faktor  $e$  lautet

$$k_{e,M} = \begin{cases} a_e \left( \frac{M}{M_{comp}} - 1 \right)^{b_e} + 1, & M > M_{comp} \\ 1, & M \leq M_{comp} \end{cases} \quad (1)$$

$$a_e < 0; \quad b_e > 0$$

$M_{comp}$  ist die Machzahl ab der der Oswald-Faktor beginnt abzufallen. Eine Analyse mit verschiedenen Passagierflugzeugen hat gezeigt, dass  $M_{comp} = 0,3$  generell ein guter Wert zu sein scheint. Ab diesem Wert nimmt  $e$  auf Grund der Machzahl ab. Das deckt sich mit den Grundlagen der Aerodynamik. Es ist bekannt, dass die Annahme der inkompressiblen Strömung bis ca.  $M = 0,3$  gut erfüllt ist, darüber aber eine Korrektur erforderlich wird.

Der Exponent  $b_e$  ermöglicht die Einstellung des Kurvenverlaufs. Von einem linearen Verlauf bei  $b_e = 1$  bis zu einem plötzlichen Abfall auf Null erst kurz vor  $M = 1$  bei sehr großen Werten von  $b_e$ . **Bild 1** zeigt den Einfluss von  $b_e$  in (1).



**Bild 1:** Variation des Exponenten  $b_e$  in  $k_{e,M}$  nach (1).  $a_e$  dabei nach (2)

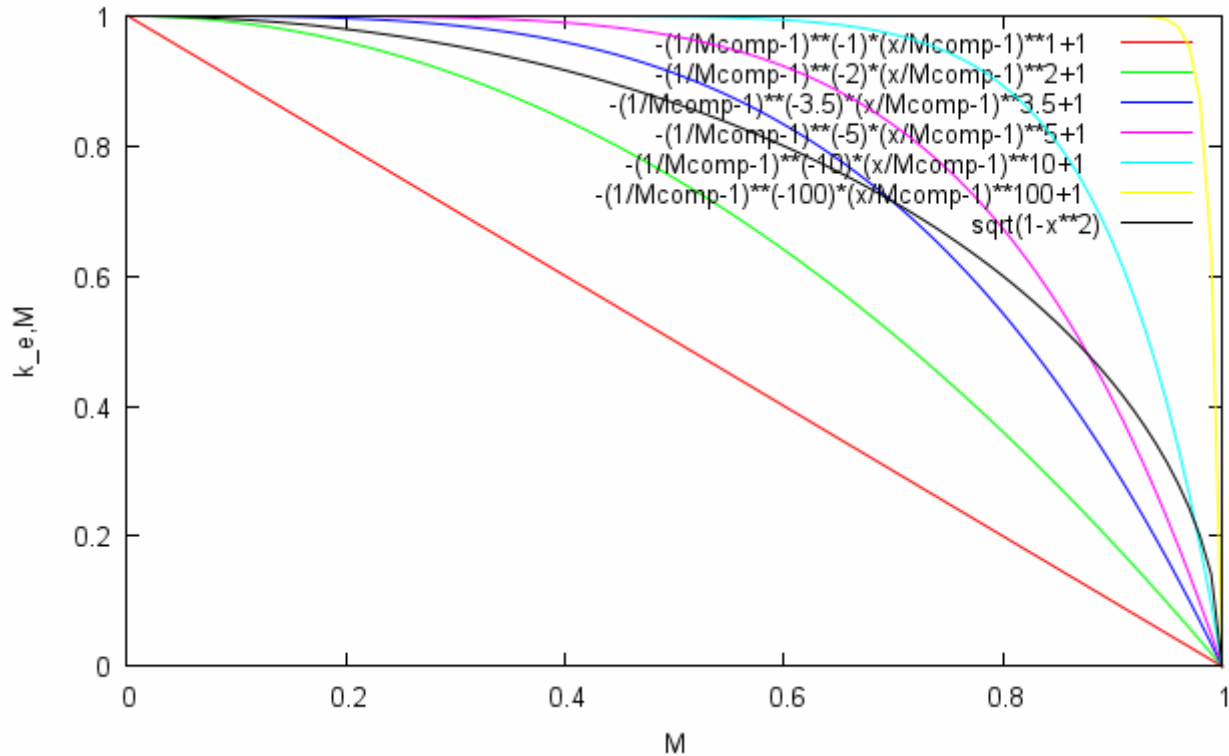
In Bild 1 wurde  $a_e$  so gewählt das gilt  $k_{e,M} = 0$  für  $M = 1$ , um den Einfluss der Parameter  $a_e$  und  $b_e$  getrennt dargestellt zu bekommen. Es ist dann

$$a_e(k_{e,M} = 0 @ M = 1) = \frac{-1}{\left(\frac{1}{M_{comp}} - 1\right)^{b_e}} \quad (2)$$

### Der Vergleich mit der Prandtl-Glauert-Korrektur

$$k_{e,M,PG} = \sqrt{1 - M^2} \quad (3)$$

gelingt am besten mit  $M_{comp}$  nahe Null – also z.B. mit z. B.  $M_{comp} = 0,01$ . Dies zeigt Bild 2. Bei einem Wert  $b_e = 3,5$  zeigt (1) einen ähnlichen Verlauf wie (3).



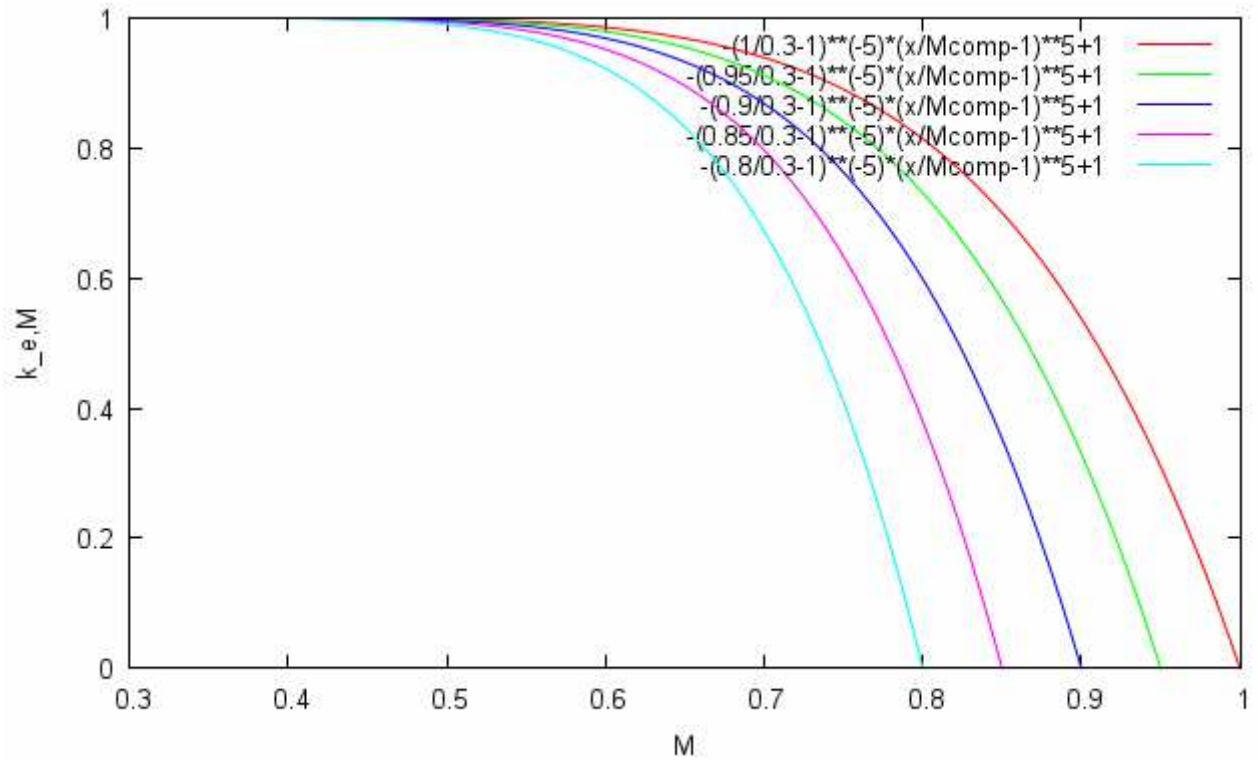
**Bild 2:**  $k_{e,M}$  aus (1) bei Variation des Exponenten  $b_e$  im Vergleich mit  $k_{e,M,PG}$  (schwarze Linie)

Mit  $a_e$  wird bestimmt bei welcher Machzahl  $M_0$  der Oswald-Faktor Null wird. Damit bietet (1) noch mehr Möglichkeiten zur Anpassung an vorgegebene Daten. Es kann eingestellt werden, dass  $k_{e,M} = 0$  bereits für Werte  $M < 1$  erreicht wird. Dann muss gewählt werden

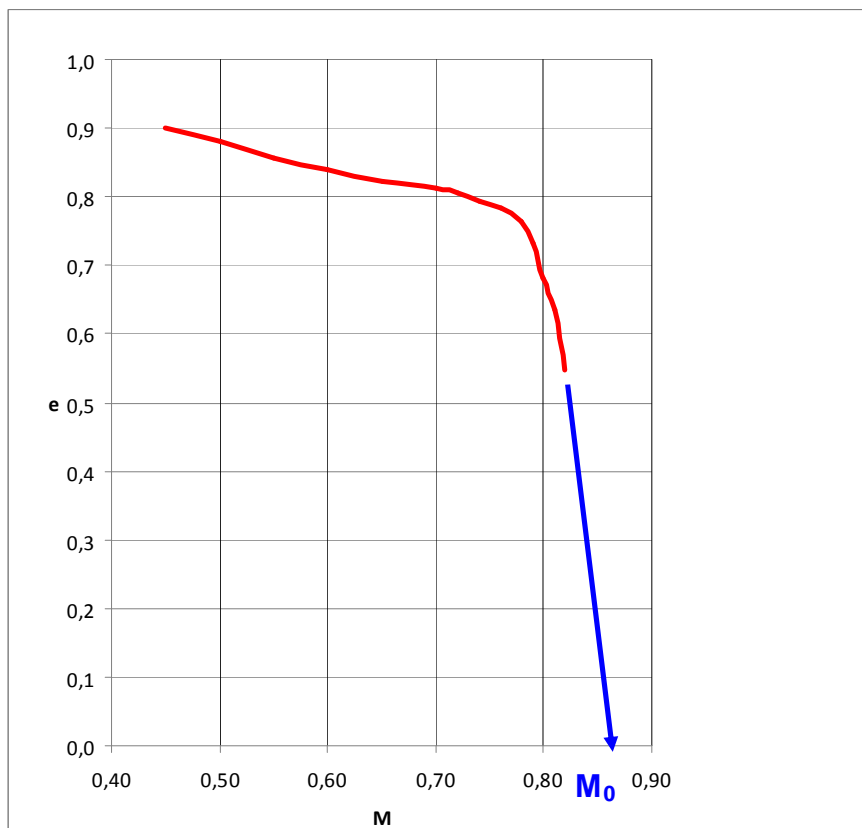
$$a_e = \frac{-1}{\left(\frac{M_0}{M_{comp}} - 1\right)^{b_e}} \quad (4)$$

**Bild 3** zeigt dies am Beispiel von  $b_e = 5$ .

**Bild 4** verdeutlicht, was man sich unter  $M_0$  in der Praxis vorzustellen hat. Bei  $M_0$  handelt es sich um eine virtuelle Verlängerung des Verlaufs der Kurve  $e = f(M)$  in Richtung  $e = 0$ . Diese verlängerte Kurve wird die M-Achse erst bei hohen Machzahlen  $M > M_D$  schneiden. Daher wird ein Flug bei dieser Machzahl nicht möglich sein. Es ist also nur eine virtuelle Machzahl, die angesetzt wird, um den Kurvenverlauf zu beschreiben.



**Bild 3:**  $k_{e,M}$  aus (1) bei Variation des Faktors  $a_e$  bei  $M_{comp} = 0.3$  und  $b_e = 5$



**Bild 4:**  $M_0$  ist der Schnittpunkt einer virtuellen Verlängerung (blau gekennzeichnet) der Kurve  $e = f(M)$  (rot gekennzeichnet) bis zur M-Achse.  $M_D < M_0$

Wenn  $a_e$  und  $b_e$  aus Messwerten bestimmt wurden, dann kann die Machzahl  $M_0$  bei der der Oswald-Faktor Null wird bestimmt werden mit

$$M_0 = M_{comp} \left[ \left( \frac{-1}{a_e} \right)^{\frac{1}{b_e}} + 1 \right] . \quad (5)$$

**Tabelle 1:**  $M_0$  berechnet aus  $a_e$  und  $b_e$

Flugzeug	$a_e$	$b_e$	$M_0$	$M_{CR}$
B737	-0,0006399	11,662	0,864	0,81
MPC75	-0,0012221	12,198	0,820	0,77
A320	-0,0027021	8,6017	0,897	0,78
Mittelwert	-0,0015213	10,8206	0,860	0,79

$a_e$  und  $b_e$  aus **MacDonald 2012**.  $M_{comp} = 0,3$ .  $M_{CR}$  : Long Range Cruise

$M_0$  liegt deutlich über der Reiseflugmachzahl  $M_{CR}$ .  $M_0$  streut um die Machzahl des Notabstieges (dive Mach number)  $M_D$  bei den hier untersuchten Flugzeugen

Allgemein kann (als grobe Abschätzung) der Machzahlverlauf des Oswald-Faktors bestimmt werden mit:

- $M_0 = M_D + 0,05$  oder  $M_0 = M_{CR} + 0,08$
- $b_e = 10,8$
- $a_e$  wird dann mit Gleichung (4) berechnet werden.

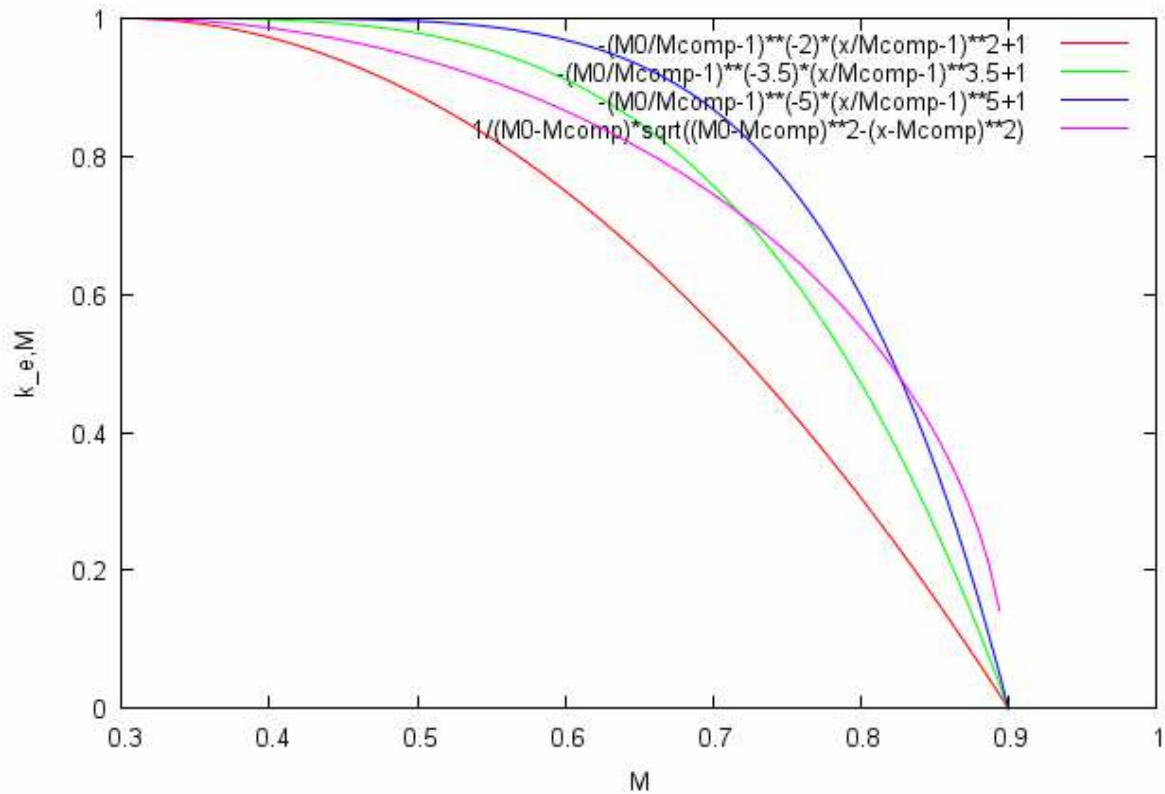
### 3 Zweiter Vorschlag und dessen Analyse

Eine Variante zu (1) basierend auf (3) wäre die **Modifizierte Prandtl-Glauert-Korrektur**

$$k_{e,M,PG,mod} = \begin{cases} \frac{1}{M_0 - M_{comp}} \sqrt{(M_0 - M_{comp})^2 - (M - M_{comp})^2}, & M > M_{comp} \\ 1, & M \leq M_{comp} \end{cases} \quad (6)$$

$M_0 > M_{comp}$

Darin ist  $M_0$  die Machzahl bei der  $k_{e,M,PG,mod}$  den Wert Null erreicht.



**Bild 4:**  $k_{e,M,PG}$  aus (6) (lila Kurve) im Vergleich mit  $k_{e,M}$  aus (1) bei  $M_0 = 0,9$ . Dadurch Variation des Faktors  $a_e$ . Dabei ist  $M_{comp} = 0,3$  und  $b_e = 2$ ;  $b_e = 3,5$  beziehungsweise  $b_e = 5$

Untersuchungen mit Flugzeugdaten bestätigen jedoch, die allgemeine Erfahrung, nach der eine immer bessere Übereinstimmung mit Messwerten erreicht werden kann, je mehr freie Parameter vorliegen. Während (3) ohne freie Parameter auskommen muss, hat diese Gleichung bereits *zwei freie Parameter* zur Anpassung an Messwerte. (1) hat *drei freie Parameter* und ergibt daher auch eine bessere Anpassung an vorliegende Messwerte.

## 4 Zusammenfassung

Weder die originale Prandtl-Glauert-Methode noch die Modifizierte Prandtl-Glauert-Methode (Zweiter Vorschlag) konnten voll überzeugen zur Berücksichtigung des Machzahleinflusses auf den Oswald-Faktor. Eine höhere Anzahl ( $M_{comp}$ ,  $a_e$  und  $b_e$ ) von freien Parametern liefert (1) (Erster Vorschlag). Diese Gleichung lässt sich besser an Messwerte anpassen und hat sich bereits in der Praxis bewährt.

Nach Auswertung der Ergebnisse von drei Passagierflugzeugen wird die grobe Empfehlung gegeben den Machzahleinfluss auf den Oswald-Faktor für weitere Passagierflugzeuge mit (1) zu berechnen. Dabei kann gesetzt werden  $M_0 = M_{CR} + 0,08$  ;  $b_e = 10,8$  und  $a_e$  berechnet mit Gleichung (4).

## Literaturverzeichnis

- MacDonald 2012**      MACDONALD, Allan: *A General View on Fuel Efficiency in Commercial Aviation*. Final Year M.Eng. Project. Aircraft Design and Systems Group (AERO), Department Automotive and Aeronautical Engineering, Hamburg University of Applied Sciences : 2012. – URL: <http://Bibliothek.ProfScholz.de>